УДК 519.25:621.9

СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА ЭМПИРИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ЕЕ ВОЗМОЖНОСТИ

© Г. А. Петасюк, к.т.н., В. Е. Мельник, О. У. Петасюк, Институт сверхтвердых материалов НАН Украины, Киев, О. М. Оксентюк, НТУУ «КПИ», Киев, Украина

Описано алгоритм багатоваріантної побудови емпіричних математичних моделей. Запропонована система критеріїв адекватності і відбору цих моделей. Проведено порівняння моделей, отриманих з використанням розробленої комп'ютерної програмної системи з аналогічними моделями, отриманими засобами MathCAD.

An algorithm of multiple-path synthesis of empiric mathematical models was described. System of adequacy criteria and selection of this models were offered. A comparison between models obtained by using the developed computer program system and similar models obtained by using MathCAD's instruments was made.

Постановка проблемы

Математическая модель реальной системы является ее формализованным описанием, позволяющим изучить систему математическими методами. Обычно она состоит из совокупности соотношений (уравнений, неравенств, логических условий, формул и т. д.), определяющих характеристики состояний системы, в зависимости от ее параметров, входных сигналов, начальных условий и времени. В качестве основного количественного показателя таких моделей принимается их адекватность, определяющая глубину и объективность предоставляемых ими знаний.

В вопросе построения математических моделей исследуемых процессов и явлений можно выделить два подхода, условно назвав их как фундаментальный и феноменологический. Первый из них предполагает применение фундаментальных законов природы для установления взаимосвязи между параметрами изучаемых объектов и процессов. При таком подходе процессы функционирования элементов системы записываются в виде алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностных или других соотношений. Математические модели, получаемые при таком подходе, свободны от каких-либо ограничений на область изменения значений параметров процесса. Однако на практике разработка подобных моделей представляет собой весьма сложную и в большинстве случаев неразрешимую задачу.

Смысл феноменологического подхода состоит в замене истинных зависимостей взаимосвязи основных объектов процесса — их приближенными алгебраическими, построение которых осуществляется на базе имеющихся эмпирических знаний об объекте в виде экспериментальных данных, своего рода зафиксированной количественной характеристики некоторого частного его состояния. Как метод получения эмпирических математических моделей применяется математический аппарат аппроксимации, интерполяции и регрессионного анализа. При таком подходе могут быть получены всеобъемлющие (в смысле охвата независимых параметров процесса) математические модели в виде алгебраических зависимостей. Степень адекватности таких моделей во многом зависит от удачного выбора их вида, объема экспериментальных данных, использованных для определения параметров модели, и других факторов.

Поэтому задача автоматизации процедуры выбора аппроксимирующих зависимостей для эмпирических математических моделей является весьма актуальной.

Анализ предыдущих исследований

Одним из направлений построения эмпирических математических моделей является направление, базирующееся на стратегии оптимальной организации опытов, и получившее название планирование эксперимента [1].

В институте сверхтвердых материалов (ИСМ) НАН Украины разработан оригинальный алгоритм многовариантного построения эмпирических математических моделей [2], основанный на методологии линеаризации [3] базовых функциональных зависимостей и ориентированный на максимальное использование огромных вычислительных возможностей современной компьютерной техники. Алгоритм предусматривает автоматическую генерацию и линеаризацию аппроксимирующих зависимостей для использования в качестве эмпирических математических моделей, а также селективный анализ каждой новой модели на предмет ее адекватности. При этом акцент делается на поиск подходящих аппроксимирующих зависимостей, наиболее адекватно описывающих имеющиеся экспериментальные данные. Дальнейшие исследования в этом направлении должны быть направлены на разработку критериев оценки адекватности и отбора моделей.

Цель работы

Разработка критериев адекватности и отбора эмпирических математических моделей.

Результаты проведенных исследований

Как метод генерации аппроксимирующих зависимостей предлагается использовать обычную и двойную суперпозицию в базовые функциональные зависимости, в качестве которых приняты следующие основные классы зависимостей: рациональные, дробно-рациональные, степенные и показательные вида:

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n x_n; \qquad (1)$$

$$y = \left[a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right]^{-1}; \qquad (2)$$

$$y = a_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_n}; \qquad (3)$$

$$y = a_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} a_n^{x^n}. \qquad (4)$$

где x_n и a_o, $a_n(n = 1, ..., N)$ — аргументы и неизвестные коэффициенты аппроксимирующих зависимостей соответственно; N — число аргументов.

Простая суперпозиция осуществляется с помощью функций вида $G(x_n,t_n) = x_n^{t_n} = X_n\ (t_n > 0)$ подстановкой $X_n \to x_n$; двойная — функциями $F_1(u) = u$, $F_2(u) = u^{-1}$, $F_3(u) = \lg(u)$, $F_4(u) = [\lg(u)]^{-1}$ и подстановкой $F_k(X_n) \to X_n(k = 1, 2, 3, 4)$. Двойная суперпозиция осуществляется только в аппроксимирующие зависимости (1), (2). При таком подходе на базе зависимостей (1—4) генерируется множество линеаризованных аппроксимирующих зависимостей, общее представление которых имеет вид:

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n F_k\left[G(x_n,t_n)\right]; \qquad (5)$$

$$y = \left\{a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n F_k\left[G(x_n,t_n)\right]\right\}^{-1},$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \qquad (6)$$

$$y = a_0 \cdot \prod_{n=1}^{N}\left[G(x_n,t_n)\right]; \qquad (7)$$

$$y = a_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} a_n^{G(x_n,t_n)}. \qquad (8)$$

Методом линеаризации уравнения (5, 6) сводятся к одному из линейных уравнений вида:

$$Y = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot Z_{nk}, \qquad (9)$$

где $Y = y$ для уравнения (1) и $Y = y^{-1}$ для уравнения (2); $A_n = a_n(n = 0, ..., N)$, $Z_{nk} = F_k[G(x_n, t_n)]$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Зависимости (7, 8) после линеаризации преобразуются к виду:

$$Y = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot Z_n. \qquad (10)$$

Здесь $Y = \lg(y)$, $A_o = \lg(a_o)$ и приняты следующие обозначения: $Z_n = \lg(x_n)$, $A_n = t_n a_n(n = 1, ..., N)$ для уравнения (3) и $Z_n = x_n$, $A_n = t_n \lg(a_n)$ $(n = 1, ..., N)$ для уравнения (4).

Определение неизвестных коэффициентов a_o, $a_n(n = 1, ..., N)$ в уравнениях (1—4) основано на использовании минимизационной процедуры метода наименьших квадратов [4].

Адекватность получаемых эмпирических математических моделей предлагается оценивать такими характеристиками, как среднеквадратическое или среднелинейное отклонение прогнозируемых значений зависимой переменной от фактических (Δ^c), надежность (n) и тенденция (t) прогнозирования.

Смысл первой характеристики ясен и не требует каких-либо комментариев.

Надежность прогнозирования является количественной характеристикой эмпирической математической модели. Пусть $\pm\delta$ — интервал допустимых отклонений (в %) зависимой переменной, а M_δ — число прогнозируемых значений зависимой переменной, попадающих в интервал $[T - \delta, T + \delta]$, где T — точное (экспериментальное) значение зависимой переменной. Тогда надежность прогнозирования определяется, как выраженное в процентах отношение M_δ к общему числу M точек наблюдений зависимой переменной, т.е., $n = (M_\delta/M)\cdot 100$, (%).

Тенденция прогнозирования является качественной характеристикой и выражается в преобладании завышения или занижения результатов прогнозирования зависимой переменной по отношению к точным (экспериментальным) ее значениям. Если через M^- обозначить число прогнозируемых значений зависимой переменной, не попадающих в интервал $[T - \delta, T + \delta]$, и лежащих за нижней его границей, а через M^+ — число аналогичных значений, но лежащих за верхней его границей, то при $M^+ > M^-$ имеет место тенденция к завышению, а при $M^+ < M^-$ — тенденция к занижению. При $M^+ = M^-$ тенденция не определена (или имеет место нулевая тенденция). Количественной характеристикой тенденции может служить вероятность завышения или занижения, определяемые как $t^+ = M^+/M$, $t^- = M^-/M$ соответственно. Введенные таким образом характеристики надежности и тенденции прогнозирования могут служить и критериями адекватности получаемых математических моделей.

Критериями адекватности приняты:

— минимум $(\Delta^c_{\min})$ среднелинейного отклонения прогнозируемых значений зависимой переменной от фактических на совокупности проанализированных моделей;

— максимум показателя надежности прогнозирования при заданном уровне допустимой погрешности;

— экстремум требуемого характера (к завышению, к занижению, к совпадению) тенденции прогнозирования.

Вычисление числовых значений критериев производится на базовой совокупности экспериментальных данных после определения неизвестных коэффициентов a_o, $a_n (n = 1, \ldots, N)$. В [5] такие коэффициенты называются рабочими параметрами модели, а процедура определения их значений по набору данных, полученному в результате наблюдений над реальной системой — задачей идентификации модели.

Аргументы функциональных зависимостей (1—4) отождествляются с независимыми факторами анализируемого процесса. В созданном в ИСМ НАН Украины компьютерном программном обеспечении реализован вариант построения и анализа эмпирических математических моделей с числом ра-

Показатели адекватности эмпирических математических моделей

Показатели адекватности		Составляющие силы резания		
название	обозначение	P_x	P_y	P_z
показатели адекватности	(Δ^c_{min}), %	1,32/1,28	1,38/2,45	1,64/3,29
	(Δ^c_{max}), %	4,36/4,69	5,86/7,85	5,92/9,26
показатель надежности прогнозирования при допустимой 5%-ной ошибке	$n_{5\%}$, %	100/100	98,21/87,5	98,21/76,6
Примечание: числитель — разработанная система, знаменатель — MathCAD				

бочих параметров до 7-ми включительно. Такие модели описывают процессы с числом независимых факторов, не превышающим 6. Если в решаемых конкретных задачах число независимых факторов меньше 6, то образовавшиеся «вакантные» места могут быть заполнены дополнительными, так называемыми квазинезависимыми переменными, функционально связанными с основными. По такой схеме можно учитывать, например, эффекты парного влияния независимых факторов. Значения введенных таким образом новых независимых переменных определяются расчетным путем по зависимостям, которые выражают принятые функциональные связи. Благодаря этому увеличивается число рабочих параметров получаемых моделей, а с ним и дополнительные возможности при поиске наиболее адекватных из них.

Эффективность разработанной компьютерной программной системы была проверена при построении эмпирических математических моделей взаимосвязи составляющих силы резания с показателями режимов обработки при нарезании зубчатых колес дисковыми фрезами. В качестве независимых переменных были приняты: подача (S), число оборотов (N) и глубина резания (t). Зависимыми переменными выступали осевая (P_x), тангенциальная (P_y) и радиальная (P_z) составляющих сил резания.

Для аппроксимации данных экспериментального исследования силовых факторов были выбраны однотипные аналитические зависимости типа:

$$P_i = a_{0,i} \cdot N^{a_{1,i}} \cdot s_{пр}^{a_{2,i}} \cdot t^{a_{3,i}} \quad (14)$$

где $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, $a_{3,i}$ — рабочие параметры моделей.

Результаты определения рабочих параметров моделей (14) с помощью разработанной системы были сравнены с аналогичными результатами, полученными средствами MathCAD. Значения показателей адекватности сравниваемых эмпирических математических моделей для трех составляющих сил резания приведены в табл.

Выводы

1. Разработанная система автоматизированного многовариантного построения и анализа эмпирических математических моделей и положенный в ее основу алгоритм инвариантны по отношению к объекту исследования и предметной области, к которой этот объект принадлежит.

2. Сравнение эмпирических математических моделей, полученных с использованием разработанной компьютерной программной системы с аналогичными моделями, полученными средствами MathCAD доказывает их безусловное преимущество по всем показателям адекватности.

1. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976. — 279 с. 2. Петасюк Г. А., Петасюк О. У. Алгоритм багатоваріантної комп'ютерної побудови та аналізу емпіричних математичних моделей технологічних процесів // «Процеси механічної обробки в машинобудуванні». Збірник наукових праць Житомирського державного технологічного університету. — 2005. — Випуск 1. — С. 181—193. 3. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул. — М.: Высшая школа, 1982. — 224 с. 4. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 632 с. 5. Рыжиков Ю. И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере. — Санкт-Петербург: КОРОНАпринт, 2000. — 271 с.

Рецензент — В. І. Лавриненко, д.т.н., зав. відділом № 3,
Інститут надміцних матеріалів ім. В. Н. Бакуля

Надійшла до редакції 16.04.08