УДК 681.326

ПРОСТЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРИОРИТЕТНОЙ ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ В ОПЕРАТИВНОЙ ПОЛИГРАФИИ

© В. М. Гасов, профессор, М. Е. Постников, аспирант, МГУП, В. М. Постников, доцент, МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

У статті запропоновані прості аналітичні вирази для оцінки тимчасових характеристик функціонування двоканальних систем масового обслуговування з абсолютними і відносними пріоритетами для двох і трьох класів заявок у разі пуасонівських вхідних потоків заявок і експоненціальних часів обслуговування. Доведена достовірність отриманих аналітичних виразів.

The article proposes simple analytical expressions for evaluation of temporary characteristics of functioning of two-channel systems of general servicing with absolute and relative priorities for two and three classes of demands in the case of Poisson inflows of requests and exponential holding times. There is also demonstrated reliability of the analytical expressions obtained.

В настоящее время широкое распространение получили салоны оперативной полиграфии и мини-типографии, построенные на базе цифровых печатных машин [3, 4]. Клиенты обращаются в такие салоны и типографии с заказами на малотиражную полиграфическую продукцию: визитки, листовки, буклеты и т.д. Как правило, все заказы клиентов подразделяются на обычные и срочные (приоритетные). Приоритетность заказа проявляется на всех стадиях его выполнения: допечатная обработка (дизайнеры рабочих станций), печатная обработка (операторы печатных машин), послепечатная обработка (операторы послепечатного оборудования). При этом на каждой стадии выполнения заказа с целью увеличения пропускной способности салона или типографии, а также для удовлетворения временных потребностей клиента, параллельно может работать несколько станций или машин, однако заказ всегда выполняется только на одной из них. Учитывая произвольный закон поступления заказов и произвольное время их выполнения возможно образование очередей на любой стадии их выполнения. Поэтому для оценки временных характеристик выполнения заказов клиентов и допустимой производительности салонов и типографий формализованные схемы технологического процесса выполнения заказов клиентов на полиграфическом оборудовании следует представлять в виде систем массового обслуживания с очередями. При этом работа оборудования на любой стадии может быть представлена в виде многоканальной системы массового обслуживания (СМО) с приоритетами, на вход которой поступает несколько классов заявок. К сожалению, в настоящее время отсутствуют простые аналитические выражения, позволяющие проводить анализ даже двухканальных СМО с приоритетами, потребность в которых очень актуальна.

Необходимо разработать простые аналитические выражения для проведения анализа двухканальных СМО с приоритетами, пуассоновскими входными потоками и экспоненциальными временами обслуживания, двумя и тремя классами заявок. Выражения должны позволять определять такие основные характеристики функционирования СМО для каждого класса заявок, как загрузка системы, среднее количество заявок в очереди и в системе, средние времена ожидания в очереди и пребывания в системе. Рассматриваемые двухканальные СМО имеют два идентичных аппарата обслуживания.

Исходными данными для разработки аналитической модели являются:

Интенсивность входного потока заявок i-го типа в СМО — λ_i, i = 1, 2, 3.

Интенсивность обслуживания заявок i-го типа в СМО — μ_i, i = 1, 2, 3.

Для решения поставленной задачи будем использовать метод инвариантов отношения [1].

Для обозначения СМО будем использовать терминологию, предложенную Кендаллом [5]. В этом случае справедливы следующие соотношения для вычисления идентичных характеристик одноканальных (М/М/1) и двухканальных (М/М/2) СМО без приоритетов, с относительными (Оотн) и абсолютными (Абс.) приоритетами с бесконечной длиной очереди и бесконечным источником заявок [1].

$$\frac{M/M/1}{M/M/2} = \frac{M/M/1/\infty/\text{Отн}/\infty}{M/M/2/\infty/\text{Отн}/\infty}. \tag{1}$$

$$\frac{M/M/1}{M/M/2} = \frac{M/M/1/\infty/\text{Абс}/\infty}{M/M/2/\infty/\text{Абс}/\infty}. \tag{2}$$

Используя результаты работ [1, 2, 5] после ряда преобразований для СМО типов М/М/1 и М/М/2 без приоритетов (обслуживание заявок в соответствии с дисциплиной первый пришел — первым обслужен) получены простые выражения, которые приведены в табл. 1. При этом с целью упрощения дальнейших вычислений при переходе от одноканальной СМО к двухканальной будем считать, что $\rho^* = \rho$, где ρ^* — загрузка аппарата в одноканальной СМО; ρ — загрузка аппарата в двухканальной СМО.

Поскольку $\rho^* = \dfrac{\lambda}{\mu^*}$, а $\rho = \dfrac{\lambda}{2\cdot\mu}$,

то $\mu^* = 2 \cdot \mu$,

где μ^* — интенсивность обслуживания заявок в одноканальной СМО; μ — интенсивность обслуживания заявок в двухканальной СМО.

При этом следует иметь в виду, что среднее время обслуживания заявок i-го класса в одноканальной СМО $t_i^* = 1/\mu_i^*$, а в двухканальной $t_i = 1/\mu_i$. Поэтому $t_i = 2t_i^*$.

При получении приведенных в таблице 1 выражений использовались формулы Литтла [1], которые имеют вид $Q = \lambda \cdot W$ и $L = \lambda \cdot T$.

Будем рассматривать выражения (1) и (2) относительно времени ожидания заявок в очереди. Тогда левая часть этих выражений для оценки средних времен ожидания заявок в очереди после подстановки в нее выражений из табл. 1 может быть представлена в следующем виде

$$\frac{M/M/2}{M/M/1} = \frac{W_2}{W_1} = \\ = \frac{(1-\rho)\cdot\mu^*}{\rho}\frac{\rho^2}{(1-\rho^2)\cdot\mu} = \\ = \frac{2\cdot\rho}{(1+\rho)}.$$

Относительные приоритеты. Для анализа СМО типа М/М/1/∝/Отн/∝ в [1, 2, 5] приведены аналитические выражения, которые для трех приоритетных классов заявок после ряда пре-

Таблица 1

Аналитические выражения для анализа СМО типов М/М/1 и М/М/2 в случае одного класса заявок

Характеристика СМО	СМО типа М/М/1	СМО типа М/М/2
Загрузка одного аппарата СМО	$\rho^* = \rho = \frac{\lambda}{\mu^*}$	$\rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$
Средняя длина очереди на обслуживание	$Q_1 = \frac{\rho^2}{1-\rho}$	$Q_2 = \frac{2\cdot\rho^3}{1-\rho^2}$
Среднее количество заявок в СМО (в очереди и на обслуживании)	$L_1 = \frac{\rho}{1-\rho}$	$L_2 = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2}$
Среднее время ожидания заявок в очереди	$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu^*}$	$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda} = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)\cdot\mu}$
Среднее время пребывания заявок в системе	$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{1}{(1-\rho)\cdot\mu^*}$	$T_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{1}{(1-\rho^2)\cdot\mu}$

образований можно привести к более простому виду. При этом среднее время ожидания заявок в очереди для первого приоритетного класса (сверхсрочные заявки) — $W^{O}_{1(1)}$, второго класса (срочные заявки) — $W^{O}_{1(2)}$ и третьего класса (обычные заявки) — $W^{O}_{1(3)}$ соответственно определяется из следующих выражений

$$W^{O}_{1(1)} = \frac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2 + \rho_3 \cdot t^*_3}{(1 - \rho_1)}, \quad (3)$$

$$W^{O}_{1(2)} = \frac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2 + \rho_3 \cdot t^*_3}{(1 - \rho_1) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2)}, \quad (4)$$

$$W^{O}_{1(3)} = \frac{\dfrac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2 + \rho_3 \cdot t^*_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)}}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)} = \frac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2 + \rho_3 \cdot t^*_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot (1 - \rho)}, \quad (5)$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 — загрузка одноканальной СМО соответственно сверхсрочными, срочными и обычными заявками; $\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$ — суммарная загрузка одноканальной СМО всеми заявками.

В случае двух приоритетных классов заявок для СМО М/М/1/∝/Отн/∝ выражения (3-5) упрощаются поскольку $\rho_3 = 0$ и имеют вид

$$W^{O}_{1(1)} = \frac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2}{(1 - \rho_1)},$$

$$W^{O}_{1(2)} = \frac{\rho_1 \cdot t^*_1 + \rho_2 \cdot t^*_2}{(1 - \rho_1) \cdot (1 - \rho)},$$

$$W^{O}_{1(3)} = 0. \quad (6)$$

Для средних времен ожидания в очереди заявок трех приоритетных классов с относительными приоритетами выражение (1) можно представить в виде набора следующих выражений

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{W^{O}_{2(1)}}{W^{O}_{1(1)}}, \quad \frac{W_2}{W_1} = \frac{W^{O}_{2(2)}}{W^{O}_{1(2)}},$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{W^{O}_{2(3)}}{W^{O}_{1(3)}}, \quad (7)$$

где $W^{O}_{2(i)}$ — среднее время ожидания в очереди двухканальной СМО заявки i-го приоритетного класса.

После подстановки в выражение (7) найденных ранее выражений для W_1, W_2, $W_{1(1)}$, $W_{1(2)}$, $W_{1(3)}$ можно определить выражения для средних времен ожидания в очереди заявок трех приоритетных классов двухканальной СМО с относительными приоритетами. Получаем для СМО М/М/2/∝/Отн/∝

$$W^{O}_{2(1)} = \frac{(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3) \cdot \rho}{(1 - \rho_1) \cdot (1 + \rho)}, \quad (8)$$

$$W^{O}_{2(2)}=\frac{(\rho_1\cdot t_1+\rho_2\cdot t_2+ +\rho_3\cdot t_3)\cdot\rho}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho_1- -\rho_2)\cdot(1+\rho)}, \quad (9)$$

$$W^{O}_{2(3)}=\frac{(\rho_1\cdot t_1+\rho_2\cdot t_2+ +\rho_3\cdot t_3)\cdot\rho}{(1-\rho_1-\rho_2)\cdot \cdot(1-\rho^2)}. \quad (10)$$

В случае двух приоритетных классов заявок для СМО М/М/2/∝/Отн/∝ выражения (8-10) упрощаются поскольку $\rho_3 = 0$ и имеют вид

$$W^{O}_{2(1)}=\frac{(\rho_1\cdot t_1+\rho_2\cdot t_2)\cdot\rho}{(1-\rho_1)\cdot(1+\rho)},$$

$$W^{O}_{2(2)}=\frac{(\rho_1\cdot t_1+\rho_2\cdot t_2)\cdot\rho}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho^2)},$$

$$W^{O}_{1(3)}=0. \quad (11)$$

Абсолютные приоритеты. Для анализа СМО типа М/М/1/∝/Абс/∝ в [1, 2, 5] приведены аналитические выражения, которые для трех приоритетных классов заявок после ряда преобразований также можно привести к более простому виду. Поэтому среднее время ожидания заявок в очереди для первого приоритетного класса (сверхсрочные заявки) — $W^{A}_{1(1)}$, второго класса (срочные заявки) — $W^{A}_{1(2)}$ и третьего класса (обычные заявки) — $W^{A}_{1(3)}$ соответственно определяется из следующих выражений

$$W_{1(1)}=\frac{\rho_1\cdot t^*_1}{(1-\rho_1)}, \quad (12)$$

$$W_{1(2)}=\frac{\rho_1\cdot t^*_2}{(1-\rho_1)}+\frac{(\rho_1\cdot t^*_1+\rho_2\cdot t^*_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho_1-\rho_2)}, \quad (13)$$

$$W_{1(3)}=\frac{(\rho_1+\rho_2)\cdot t^*_2}{(1-\rho_1-\rho_2)}+\frac{(\rho_1\cdot t^*_1+\rho_2\cdot t^*_2+ +\rho_3\cdot t^*_3)}{(1-\rho_1-\rho_2)\cdot \cdot(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3)}. \quad (14)$$

Значения для ρ_1, ρ_2, ρ_3 и $\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$ имеют тот же смысл, что и для СМО с относительными приоритетами.

В случае двух приоритетных классов заявок для СМО М/М/1/∝/Абс/∝, когда $\rho_3 = 0$, выражения (12 и 13) имеют тот же самый вид, а $W^{A}_{1(3)}=0$.

Для средних времен ожидания в очереди заявок трех приоритетных классов в случае абсолютных приоритетов выражение (1) можно представить в виде следующего набора выражений

$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{W^{A}_{2(1)}}{W^{A}_{1(1)}},\quad \frac{W_2}{W_1}=\frac{W^{A}_{2(2)}}{W^{A}_{1(2)}},$$

$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{W^{A}_{2(3)}}{W^{A}_{1(3)}}. \quad (15)$$

После подстановки в выражение (15) найденных ранее выражений для W_1, W_2, $W^A_{1(1)}$, $W^A_{1(2)}$, $W^A_{1(3)}$ можно определить выражения для средних времен ожидания в очереди заявок трех приоритетных классов в двухканальной СМО с абсолютными приоритетами. Получаем для СМО M/M/2/∝/Абс/∝

$$W^A_{2(1)} = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1-\rho_1)} \cdot \frac{\rho}{(1+\rho)}, \qquad (16)$$

$$W^A_{2(2)} = \left[\frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1-\rho_1)} + \frac{(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho_1-\rho_2)} \right] \cdot \frac{\rho}{(1+\rho)}, \qquad (17)$$

$$W^A_{2(3)} = \left[\frac{(\rho_1+\rho_2)\cdot t_2}{(1-\rho_1-\rho_2)} + \frac{(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3)}{(1-\rho_1-\rho_2)\cdot(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3)} \right] \cdot \frac{\rho}{(1+\rho)}. \qquad (18)$$

В случае двух приоритетных классов заявок для СМО M/M/2/∝/Абс/∝ выражения (16 и 17) имеют тот же самый вид, а $W^A_{2(3)} = 0$.

Оценка достоверности полученных аналитических выражений осуществляется с использованием закона сохранения времени ожидания Клейнрока [1, 3]. Согласно этого закона, например, для двухканальной СМО с абсолютными приоритетами, пуассоновскими входными потоками и экспоненциально распределенными временами обслуживания, справедливо следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i W^A_{2(i)} = \rho W_2, \qquad (19)$$

где W_2 — среднее время ожидания в очереди двухканальной СМО заявок n приоритетных классов в случае их обслуживания в порядке поступления.

При этом $W_2 = \dfrac{\rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot t_i}{(1-\rho^2)}$,

где $$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i. \qquad (20)$$

При этом следует иметь в виду, что в случае обслуживания без приоритетов среднее время пребывания заявок i-го класса в двухканальной СМО определяется по следующей формуле

$$T_{2(i)} = W_2 + t_{(i)}.$$

При этом следует иметь в виду, что в случае обслуживания заявок без приоритетов среднее время ожидания заявок всех классов одинаковое, а средние времена пребывания заявок каждого класса отличаются, так как у заявок различные средние времена обслуживания.

С целью уменьшения объема промежуточных выкладок, достоверность полученных аналитических выражений покажем для двухканальной СМО с абсолютными приоритетами и двумя классами заявок, когда $\rho = (\rho_1 + \rho_2)$.

В этом случае правая часть выражения (19) принимает следующий вид

$$\rho \cdot W_2 = \rho \cdot \frac{\rho \cdot (\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho^2)} = \frac{\rho^2 \cdot (\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho^2)}.$$

Левая часть выражения (19) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_i W^A_{2(i)} = \rho_1 W^A_{2(1)} + \rho_2 W^A_{2(2)} = \rho_1 \cdot \left[\frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1-\rho_1)} \cdot \frac{\rho}{(1+\rho)}\right] + \rho_2 \cdot \left[\frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1-\rho_1)} + \frac{(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho_1-\rho_2)}\right] \cdot \frac{\rho}{(1+\rho)} = \frac{\rho}{(1-\rho_1)\cdot(1+\rho)} \cdot \left[\rho_1(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2) + \frac{(\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)\cdot \rho_2}{(1-\rho)}\right] = \frac{\rho \cdot (\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1+\rho)} \cdot \left[\frac{\rho_1(1-\rho) + \rho_2}{(1-\rho)}\right].$$

Поскольку

$$\left[\frac{\rho_1(1-\rho)+\rho_2}{(1-\rho)}\right] = \frac{\rho_1 - \rho_1 \cdot \rho + \rho_2}{(1-\rho)} = \frac{\rho - \rho_1 \cdot \rho}{(1-\rho)} = \frac{\rho \cdot (1-\rho_1)}{(1-\rho)}.$$

То имеем, что левая часть выражения (19) принимает следующий вид

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_i W^A_{2(i)} = \frac{\rho \cdot (\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1+\rho)} \cdot \frac{\rho \cdot (1-\rho_1)}{(1-\rho)} = \frac{\rho^2 \cdot (\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2)}{(1-\rho^2)}.$$

Поскольку левая и правая части выражения (19) для двухканальной СМО с абсолютными приоритетами и двумя классами заявок равны, то закон сохранения времени ожидания Клейнрока выполняется. Это доказывает достоверность полученных аналитических выражений.

Порядок расчета основных характеристик двухканальной СМО:

1. Определяем среднее время ожидания заявок i-го класса в очереди:

а) для СМО с относительными приоритетами по формулам (8-11);

б) для СМО с абсолютными приоритетами по формулам (12-14).

2. Определяем среднее время пребывания заявок i-го класса в системе (в очереди и на обслуживании) по следующим формулам:

а) для СМО без приоритетов $T_{2(i)} = W_2 + t_{(i)}$;

б) для СМО с относительными приоритетами $T^O_{2(i)} = W^O_{2(i)} + t_{(i)}$;

в) для СМО с абсолютными приоритетами $T^A_{2(i)} = W^A_{2(i)} + t_{(i)}$, где $t_{(i)}$ — среднее время обслуживания заявки i-го класса.

3. Определяем среднее время ожидания в очереди всех классов заявок:

а) для СМО без приоритетов по формуле (20);

б) для СМО с относительными приоритетами по формуле:

$$W_2^O = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)} W_{2(i)}^O;$$

в) для СМО с абсолютными приоритетами по формуле:

$$W_2^A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)} W_{2(i)}^A.$$

4. Определяем среднее время пребывания в системе для всех классов заявок:

а) для СМО без приоритетов по формуле:

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)} T_{2(i)};$$

б) для СМО с относительными приоритетами по формуле:

$$T_2^O = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)} T_{2(i)}^O;$$

в) для СМО с абсолютными приоритетами по формуле:

$$T_2^A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)} T_{2(i)}^A.$$

5. Определяем среднее количество заявок i-го класса и всех классов в очереди (Q) и системе (L) по формулам Литтла:

$$Q_i = \lambda_i \cdot W_i,\ L_i = \lambda_i \cdot T_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i,\quad L = \sum_{i=1}^{n} L_i,$$

где W_i, T_i, Q_i, L_i определяются видом обслуживания заявок i-го класса (без приоритетов, относительные или абсолютные приоритеты).

При назначении приоритетов следует помнить: чем меньше среднее время обслуживания заявки тем ей следует давать более приоритетное обслуживание.

Рассмотрим пример, который носит условный характер и служит для демонстрации использования предложенных аналитических моделей.

Описание и постановка задачи

В салон оперативной полиграфии, который состоит из двух дизайнерских рабочих станций и двух цифровых печатных машин, от клиентов поступают срочные и обычные заказы (заявки) соответственно с интенсивностями λ_1 и λ_2 на изготовление малотиражной полиграфической продукции. Обслуживание каждой заявки включает две последовательные стадии: работа дизайнера и работа оператора печатной машины. Срочные заявки имеют абсолютный приоритет перед обычными при их выполнении на дизайнерских рабочих станциях и относительный приоритет при обслуживании на печатных машинах. Срочные и обычные заявки обслуживаются дизайнерами рабочих станций соответственно с интенсивностями μ_1 и μ_2. С такими же интенсивностями они обслуживаются и операторами печатных машин. Поток заявок считаем пуассоновским, а их обслуживание подчиняется экспоненциальному закону. Требуется определить для каждого класса заявок (срочные и обычные) среднее время ожидания в очереди на каждой стадии и среднее время их пребывания на каждой стадии и в салоне в целом. Исходные данные: $\lambda_1 = 2$ заявки/час и $\lambda_2 = 3$ заявки/час · $\mu_1 = 5$ заявок/час и $\mu_2 = 2{,}5$ заявки/час.

Средние значения времени обслуживания заявок первого (t_1) и второго (t_2) классов в любом аппарате соответственно равны ($t_1 = 1/\mu_1 = 0{,}2$ час) и ($t_2 = 1/\mu_2 = 0{,}4$ час).

Работа салона по выполнению заявок клиентов представляется в виде двухфазной, двухканальной системы массового обслуживания. Первая фаза соответствует работе дизайнеров, а вторая работе операторов цифровых печатных машин, поэтому СМО первой фазы типа М/М/2/∝/Абс/∝, а СМО второй фазы М/М/2/∝/Отн/∝.

Решение.

1) Определяем загрузку одного аппарата СМО (одной рабочей станции или одной цифровой печатной машины) заявками первого и второго классов соответственно $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\cdot\mu_1} = \frac{2}{2\cdot 5} = 0{,}2$

и $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{2\cdot\mu_2} = \frac{3}{2\cdot 2{,}5} = 0{,}6$.

Общая загрузка одного аппарата заявками двух классов равна $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0{,}8$.

2) Определяем временные характеристики функционирования отдельных фаз рассматриваемой двухфазной системы обслуживания, учитывая приведенные ранее рекомендации по порядку расчета. Рассчитанные значения временных характеристик приведены в табл. 2.

На основании данных, приведенных, в табл. 2, составлена табл. 3, в которой приведены

Таблица 2

Временные характеристики одной фазы рассматриваемой двухфазной СМО

Обслуживание заявок в фазе СМО	Среднее время ожидания заявок в очереди (час)		Среднее время пребывания заявок в СМО (час)	
	Для всех заявок	Для заявок i-го класса	Для всех заявок	Для заявок i-го класса
Абсолютные приоритеты	0,502	1 кл 0,022	0,822	1 кл 0,222
		2 кл 0,822		2 кл 1,222
Относительные приоритеты	0,528	1 кл 0,154	0,848	1 кл 0,354
		2 кл 0,776		2 кл 1,176
Без приоритетов	0,620	1 кл 0,620	0,940	1 кл 0,820
		2 кл 0,620		2 кл 1,020

Таблица 3

Сравнительный анализ временных характеристик вариантов организации обработки заявок клиентов в салоне оперативной полиграфии

Обслуживание заявок дизайнерами	Обслуживание заявок в машине	Среднее время выполнения заявок (час)		
		У дизайнеров	В печатной машине	В салоне
Абсолютные приоритеты	Относительные приоритеты	1 кл 0,222	1 кл 0,354	1 кл 0,576
		2 кл 1,222	2 кл 1,176	2 кл 2,398
Относительные приоритеты	Относительные приоритеты	1 кл 0,354	1 кл 0,354	1 кл 0,708
		2 кл 1,176	2 кл 1,176	2 кл 2,352
Без приоритетов	Без приоритетов	1 кл 0,820	1 кл 0,820	1 кл 1,640
		2 кл 1,020	2 кл 1,020	2 кл 2,040

результаты сравнительного анализа временных характеристик различных вариантов организации обработки заявок клиентов в салоне оперативной полиграфии.

Анализ данных, приведенных в табл. 3, показывает, что правильное назначение приоритетов позволяет уменьшить как среднее время ожидания заявок в очереди, так и среднее время их пребывания в системе. Назначение срочным заявкам абсолютных приоритетов при обслуживании дизайнерами и относительных приоритетов при обслуживании операторами печатных машин позволяет уменьшить среднее время выполнения этих заявок в салоне по сравнению с отсутствием приоритетного обслуживания более чем на один час. При этом среднее время выполнения в салоне обычных заявок увеличивается примерно на 20 минут.

Выводы

1. Получены простые аналитические выражения для оценки характеристик функционирования двухканальных СМО с абсолютными и относительными приоритетами для двух и трех классов заявок в случае пуассоновских входных потоков заявок и экспоненциальных временах обслуживания.

2. Используя закон сохранения времени ожидания Клейнрока доказана достоверность полученных аналитических выражений.

3. Рассмотрен пример, иллюстрирующий возможность практического применения предложенных аналитических выражений для оценки основных временных характеристик выполнения заказов клиентов в салонах оперативной полиграфии.

4. Разработанные аналитические модели могут быть использованы для проведения

сравнительного анализа различных вариантов организации технологии обработки заявок клиентов в салонах оперативной полиграфии и оценки их временных характеристик.

5. Используя метод инвариантов отношения представляется возможным получить аналитические выражения для оценки характеристик функционирования двухканальных СМО с абсолютными и относительными приоритетами для любого числа классов заявок и в случае произвольных входных потоков заявок и произвольных временах обслуживания.

1. Бронштейн О. И. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах / Бронштейн О. И., Духовный И. М. — М. : Наука, 1976. — 220 с. 2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Клейнрок Л. — М. : Мир, 1979. — 432 с. 3. Кнабе Г. Организация рабочего процесса в оперативной полиграфии. Часть 1 / Кнабе Г. // КомпьюАрт. — 2006. — № 4. — С. 16—19. 4. Кнабе Г. Организация рабочего процесса в оперативной полиграфии. Часть 2 / Кнабе Г. // КомпьюАрт. — 2006. — № 5. — С. 57—61. 5. Майоров С. А. Основы теории вычислительных систем / Майоров С. А., Новиков Г. И., Алиев Т. И., Махарев Э. И., Тимченко Б. Д. — М. : Высшая школа, 1978. — 408 с.

Надійшла до редакції 29.06.10