УДК 519.8

А.В РУДЕНКО

ДВУМЕРНАЯ ТЕЛЕЖКА: ВАРИАЦИОННАЯ ОЦЕНКА СНИЗУ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА

В одномерном случае задача о тележке — это известный тестовый пример применения принципа максимума. В двумерном случае, к которому сводится трехмерный и, вообще, n-мерный, задача не имеет аналитического решения, ее приходится решать численно. Здесь возникает проблема локализации неизвестных, одним из которых является оптимальное время T.

Простейшая оценка для T есть

$$\max\left\{\|\dot{x}_0\|, \sqrt{2\|x_0\|}\right\} < T.$$

Ее можно существенно улучшить, если воспользоваться устанавливаемым в работе неравенством

$$\left\|x_0 + S\dot{x}_0\right\| < \frac{S|S|}{2} + \frac{(T-S)|T-S|}{2}.$$

Оно справедливо для всех $S \in \mathrm{R}$ и для любой нормы $\|x\|$ в R^2. Это приводит к явной оценке снизу вида

$$T_m(S) < T$$

и, таким образом, к задаче глобальной оптимизации оценочной функции $T_m(S)$ по S.

Напомним постановку исходной задачи. В евклидовой плоскости R^2 имеется материальная точка массы $m=1$, которая движется по закону

$$\ddot{x} = u, \quad \|u\| \le 1. \tag{1}$$

Цель управления — из заданного начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ перейти в начало координат с нулевой скоростью за минимальное время *T*.

В работах [1-3] для *T* была указана оценка

$$\max\left\{\|\dot{x}_0\|, \sqrt{2\|x_0\|}\right\} < T. \tag{2}$$

В модельном случае, когда $(x_0, \dot{x}_0)$ есть пара ортонормированных векторов (типичный двумерный случай, который в дальнейшем рассматривается более подробно), оценка (2) дает

$$\max\left\{1, \sqrt{2}\right\} < T,$$

где точное значение $T = 2.752\ldots$, т.е.

$$1.414\ldots < 2.752\ldots.$$

Предлагаемый в данной работе метод оценивания сначала дает оценку

$$2.197\ldots < 2.752\ldots,$$

а после оптимизации — оценку

$$2.737\ldots < 2.752\ldots$$

с относительной погрешностью

$$\delta = \frac{2.752\ldots - 2.737\ldots}{2.752\ldots} = 0{,}0056\ldots.$$

Таким образом, вариационная оценка снизу

$$\max T_m(S) < T$$

дает существенное улучшение предварительной оценки (2).

1. Краевые условия в интегральной форме. Пусть $x \in \mathrm{R}^n$ и пусть в R^n задана система уравнений *второго* порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u), \quad u \in U \subset \mathrm{R}^m, \tag{3}$$

где множество U ограничено, а функция $f(x, \dot{x}, u)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Пространством состояний этой системы является множество всех пар $(x, \dot{x}) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$, и ее можно представить в виде системы первого порядка в $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$, а затем перейти к эквивалентному *интегральному* уравнению в $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$. Но данное интегральное уравнение может быть записано непосредственно в терминах переменных $(x, \dot{x})$. При заданных начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ это приводит к системе двух интегральных уравнений в R^n вида

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \int_0^t f(x(s), \dot{x}(s), u(s))ds, \tag{4}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s)ds. \tag{5}$$

Имеются случаи, когда интеграл в (4) может быть вычислен (например, в случае тележки с трением). Тогда возникают дополнительные возможности. Однако в общем случае ситуация состоит в следующем.

Рассмотрим уравнение (5). Здесь, очевидно, имеется возможность продолжить выкладку, применив правило интегрирования по частям:

$$x(t) = x_0 + \{\dot{x}(s)s\}\Big|_0^t - \int_0^t f(x(s), \dot{x}(s), u(s))sds.$$

Если учесть, что $\{\dot{x}(s)s\}\Big|_{s=0} = 0$, получим уравнение

$$x(t) = x_0 + \dot{x}(t)t - \int_0^t f(x(s), \dot{x}(s), u(s))sds.$$

Пусть в момент $t = T$ выполнены условия $x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0$. Тогда

$$\int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), u(t))dt = -\dot{x}_0, \tag{6}$$

$$\int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), u(t))tdt = x_0. \tag{7}$$

Это исходные уравнения в интегральной форме. Они справедливы для *произвольного* (не обязательно оптимального) управления $u(t)$, которое переводит систему (3) из состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ в состояние $(0,0)$ за конечное время *T*.

Дальнейший шаг состоит в том, чтобы оценить уравнения (6), (7) по норме и выяснить, какие при этом могут быть получены оценки.

2. Предварительная оценка времени *T* снизу. Пусть в R^n задана произвольная норма $\|x\|$, эквивалентная евклидовой. Оценивая уравнения (6), (7) по норме, получим, соответственно, неравенства

$$\| \dot{x}_0 \| < \int_0^T \| f\big(x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) \| \, dt \,, \tag{8}$$

$$\| x_0 \| < \int_0^T \| f\big(x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) \| t \, dt \,. \tag{9}$$

Ниже рассматриваются три конкретных примера.

Пример 1. Пусть в R^n задано уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x} = u, \quad u \in U \,, \tag{10}$$

где множество *U* ограничено (в смысле любой нормы $\|x\|$, эквивалентной евклидовой), т.е. $\|u\| \le \rho$. Пусть также выполнено условие $\mathbf{0} \in \operatorname{Int} \operatorname{Co} U$, которое обеспечивает возможность перехода из любого состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ в любое другое состояние $(x_1, \dot{x}_1)$ за конечное время *T* (в классе обычных или обобщенных управлений). Положим $(x_1, \dot{x}_1) = (0,0)$. Тогда исходные уравнения имеют вид

$$\int_0^T u(t)\, dt \;\; = -\dot{x}_0, \tag{11}$$

$$\int_0^T u(t)\, t\, dt \; = \; x_0. \tag{12}$$

Поскольку $\|u\| \le \rho$, то после оценки данных уравнений по норме будем иметь

$$\| \dot{x}_0 \| < \rho T \,, \tag{13}$$

$$\| x_0 \| < \rho \frac{T^2}{2}. \tag{14}$$

Это приводит к следующим явным оценкам времени T *снизу*:

$$\frac{\| \dot{x}_0 \|}{\rho} < T \,, \tag{15}$$

$$\sqrt{\frac{2 \| x_0 \|}{\rho}} \; < T \,. \tag{16}$$

Их можно объединить в одну, представив ее в виде

$$\max\left(\frac{\| \dot{x}_0 \|}{\rho}, \sqrt{\frac{2 \| x_0 \|}{\rho}} \right) < T \,. \tag{17}$$

При $\rho = 1$ получаем оценку (2), т.е.

$$\max\left(\| \dot{x}_0 \|, \sqrt{2 \| x_0 \|}\right) < T .$$

Цель данной работы — показать, что эта оценка может быть улучшена. Вместо того, чтобы оценивать уравнения (11), (12) порознь, сначала можно образовать из них подходящую линейную комбинацию (см. пункт 3 ниже).

Пример 2. При тех же предположениях, что и в примере 1, рассмотрим тележку с трением

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + u, \quad u \in U . \tag{18}$$

Это линейная система первого порядка относительно скорости $v = \dot{x}$. В этой связи возникают дополнительные возможности, которые заключаются в следующем.

1. Уравнение (18) можно проинтегрировать:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = -\alpha\left(x(t) - x_0\right) + \int_0^t u(s)ds .$$

При $t = T$, когда $x(T) = 0,\ \dot{x}(T) = 0$, получим уравнение

$$\int_0^T u(s)ds = -\left(\dot{x}_0 + \alpha x_0\right). \tag{19}$$

Отсюда следует оценка

$$\|\dot{x}_0 + \alpha x_0\| < \rho T . \tag{20}$$

При $\alpha \to 0$ она переходит в оценку (13).

2. Имеется возможность воспользоваться формулой Коши

$$\dot{x}(t) = e^{-\alpha t}\dot{x}_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds .$$

При $t = T$ имеем

$$0 = e^{-\alpha T}\dot{x}_0 + \int_0^T e^{-\alpha(T-t)}u(t)dt ,$$

или, после деления на $e^{-\alpha T}$,

$$\int_0^T u(t)e^{\alpha t}dt = -\dot{x}_0 . \tag{21}$$

Это приводит к оценке

$$\|\dot{x}_0\| < \rho\,\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha}, \tag{22}$$

которая в пределе при $\alpha \to 0$ переходит также в оценку (13), поскольку

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} = T\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} = T .$$

Неравенство (22) позволяет перейти к явной оценке T:

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left\{1 + \frac{\alpha}{\rho}\|\dot{x}_0\|\right\} < T. \tag{23}$$

Однако было бы желательно иметь такую оценку, которая в пределе при $\alpha \to 0$ переходила бы в оценку (14), т.е.

$$\| x_0 \| < \rho\frac{T^2}{2}.$$

Ее можно построить следующим образом.

Объединим уравнения(19), (21) в систему уравнений

$$\int_0^T u(s)ds = -\left(\dot{x}_0 + \alpha x_0\right), \tag{24}$$

$$\int_0^T u(t)e^{\alpha t}dt = -\dot{x}_0 \tag{25}$$

и вычтем из второго уравнения первое. Получим уравнение

$$\int_0^T u(t)\left(e^{\alpha t} - 1\right)dt = \alpha x_0. \tag{26}$$

Если поделить обе его части на α, то легко видеть, что в пределе при $\alpha \to 0$ оно переходит в уравнение (12) (в то время как оба уравнения (24), (25) переходят в одно и то же уравнение (11)). При этом из (26) следует оценка

$$\|x_0\| < \frac{\rho}{\alpha}\int_0^T \left(e^{\alpha t} - 1\right)dt = \frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} - T\right\}. \tag{27}$$

Здесь можно использовать два подхода.

Первый состоит в том, чтобы выделить в правой части (27) множитель $T^2/2$ и показать, что в пределе при $\alpha \to 0$ оценка (27) переходит в оценку (14), содержащую $T^2/2$. Однако при этом, из-за наличия трансцендентности, может быть утрачена возможность получения явной оценки T.

Второй подход заключается в том, чтобы найти такую оценку, которую можно было бы трансформировать в явную оценку T.

Это реализуется следующим образом.

1. Пусть $z = \alpha T$ ($z > 0$). Тогда из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует

$$e^z - (1 + z) = \frac{z^2 e^{\theta z}}{2} < \frac{z^2 e^z}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}-T\right\}=\frac{\rho}{\alpha^2}\left(e^{\alpha T}-(1+\alpha T)\right)<\frac{\rho T^2}{2}e^{\alpha T},$$

т.е.

$$\|x_0\| < \frac{\rho T^2}{2}e^{\alpha T}.$$

2. От трансцендентности в (27) можно избавиться, если для T воспользоваться оценкой (20), представив ее в виде

$$-\rho T < -\|\dot{x}_0+\alpha x_0\|.$$

Тогда

$$\|x_0\| < \frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}-T\right\}=\frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}\right\}-\frac{\rho T}{\alpha}<\frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}\right\}-\frac{\|\dot{x}_0+\alpha x_0\|}{\alpha}.$$

Это приводит к неравенству

$$\|x_0\|+\frac{\|\dot{x}_0+\alpha x_0\|}{\alpha} < \frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}\right\},$$

которое позволяет получить новую явную оценку времени T снизу:

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left\{1+\frac{\alpha^2}{\rho}\left(\|x_0\|+\frac{\|\dot{x}_0+\alpha x_0\|}{\alpha}\right)\right\}<T.$$

Теперь вернемся к исходным неравенствам (8), (9). В данном случае эти неравенства имеют вид

$$\|\dot{x}_0\| < \int_0^T \|-\alpha\dot{x}+u\|dt, \tag{28}$$

$$\|x_0\| < \int_0^T \|-\alpha\dot{x}+u\|t\,dt. \tag{29}$$

Если формально оценивать величину $\|-\alpha\dot{x}+u\|$ сверху, то получим ∞. Но если рассматривать ее вдоль траектории, то здесь имеет место конечная оценка. Покажем это.

Система (18) формально удовлетворяет критерию управляемости Калмана. Однако, поскольку сила тяги ограничена ($\|u\|\le\rho$), ее нельзя перевести из любого состояния $(x_0,\dot{x}_0)$ в любое другое состояние $(x_1,\dot{x}_1)$. Имеется ограничение на скорость.

Допустим, что мы стартуем из произвольного начального положения x_0 с нулевой скоростью $\dot{x}_0=0$, используя при этом максимально возможное ускорение $u_{\max}$ в произвольно заданном направлении u° ($\|u^\circ\|=1$), т.е. $u_{\max}=\rho(u^\circ)u^\circ$, где $\rho(u^\circ)$ — расстояние от начала координат до границы выпуклого компакта CoU

вдоль направления u°. Тогда максимальная скорость $\dot{x}_{\max}$, которую можно развить в этом направлении (в пределе при $t \to \infty$), есть

$$\dot{x}_{\max} = \frac{u_{\max}}{\alpha} = \frac{\rho(u^{\circ})}{\alpha} u^{\circ}, \tag{30}$$

а ее норма есть $v_{\text{м}}(u^{\circ}) = \|\dot{x}_{\max}\| = \rho(u^{\circ})/\alpha$. Соотношение (30) вытекает из условия, что скорость принимает значение, при котором сила трения уравновешивает активную силу $u_{\max}$ (стационарный режим):

$$-\alpha\dot{x}_{\max} + u_{\max} = 0.$$

Если начальная скорость $\dot{x}_0$ произвольна (причем, $\dot{x}_0 \neq 0$), то имеются два случая: либо $\|\dot{x}_0\| \le \rho/\alpha$, либо $\|\dot{x}_0\| > \rho/\alpha$.

В первом случае $\|\dot{x}(t)\|$ не может превысить значения $v_{\text{м}} = \rho/\alpha$:

$$\|\dot{x}(t)\| \le v_{\text{м}}.$$

Во втором случае $\|\dot{x}(t)\|$ не может превысить начального значения $\|\dot{x}_0\|$:

$$\|\dot{x}(t)\| \le \|\dot{x}_0\|.$$

Формально это следует из формулы Коши для скорости $\dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\dot{x}(t) = e^{-\alpha t}\dot{x}_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} u(s)ds,$$

$$\Downarrow$$

$$\|\dot{x}(t)\| \le e^{-\alpha t}\|\dot{x}_0\| + \left(1 - e^{-\alpha t}\right)\frac{\rho}{\alpha} \quad (t \ge 0),$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \text{если } \rho/\alpha < \|\dot{x}_0\|, \text{ то } \|\dot{x}(t)\| \le \|\dot{x}_0\|, \\ \text{если } \|\dot{x}_0\| \le \rho/\alpha, \text{ то } \|\dot{x}(t)\| \le \rho/\alpha, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\dot{x}(t)\| \le \max\{\|\dot{x}_0\|, \rho/\alpha\} \quad (t \ge 0). \tag{31}$$

Таким образом, при заданной начальной скорости $\dot{x}_0$ и произвольном управлении $u = u(t)$ величина $\|-\alpha\dot{x}(t) + u(t)\|$ (вдоль траектории) ограничена сверху:

$$\|-\alpha\dot{x}(t) + u(t)\| \le \alpha\|\dot{x}(t)\| + \|u(t)\| \le \alpha\max\left\{\|\dot{x}_0\|, \frac{\rho}{\alpha}\right\} + \rho.$$

Применяя эту оценку в неравенствах (28), (29), получаем

$$\|\dot{x}_0\| \le \left(\max\left(\alpha\|\dot{x}_0\|, \rho\right) + \rho\right) T,$$

$$\|x_0\| \le \left(\max\left(\alpha\|\dot{x}_0\|, \rho\right) + \rho\right) \frac{T^2}{2}.$$

При $\alpha \to 0$ данные оценки оказываются вдвое хуже, чем (13), (14). Это является следствием того, что оценка (31) универсальна, т.е. верна для любого управления, в то время как нас интересуют только управления, переводящие систему в нулевое конечное состояние.

Ситуацию можно исправить, если учесть, что для любого такого управления верны оценки (22), (27):

$$\|\dot{x}_0\| \le \rho\,\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}, \tag{32}$$

$$\|x_0\| \le \frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}-T\right\}. \tag{33}$$

Поскольку они справедливы для любого начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$, то в качестве такового можно принять любое текущее состояние $(x(t), \dot{x}(t))$, где $0 \le t \le T$. Тогда (вдоль траектории) будут верны оценки

$$\|\dot{x}(t)\| \le \rho\,\frac{e^{\alpha(T-t)}-1}{\alpha}, \tag{34}$$

$$\|x(t)\| \le \frac{\rho}{\alpha}\left\{\frac{e^{\alpha(T-t)}-1}{\alpha}-(T-t)\right\}. \tag{35}$$

Формально они могут быть получены с помощью формулы Коши

$$\dot{x}(t_1) = e^{-\alpha(t_1-t)}\dot{x}(t)+\int_t^{t_1} e^{-\alpha(t_1-s)}u(s)ds.$$

При $t_1 = T$ имеем

$$0 = e^{-\alpha(T-t)}\dot{x}(t)+\int_t^{T} e^{-\alpha(T-s)}u(s)ds,$$

или, после деления на $e^{-\alpha(T-t)}$,

$$\dot{x}(t) = -e^{-\alpha t}\int_t^T e^{\alpha s}u(s)ds.$$

После оценивания этого уравнения по норме и вычисления интеграла от экспоненты приходим к неравенству (34). Аналогично выводится неравенство (35).

Интегрируя (34) в пределах от 0 до *T*, будем иметь

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|\,tdt \le \rho\,\frac{e^{\alpha T}-(1+\alpha T)}{\alpha^2}. \tag{36}$$

Таким образом, исходя из общего неравенства (28), получаем более точную оценку

$$\|\dot{x}_0\| \le \int_0^T \|-\alpha\dot{x}(t)+u(t)\|dt \le \rho\,\frac{e^{\alpha T}-(1+\alpha T)}{\alpha}+\rho T = \rho\,\frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha},$$

которая, как видим, совпадает с оценкой (22).

Аналогичные выкладки, основанные на неравенстве (29), приводят к оценке

$$\|x_0\| \le \int_0^T \|-\alpha\dot{x}(t)+u(t)\| t dt \le \rho \frac{e^{\alpha T}-(1+\alpha T)}{\alpha^2},$$

которая совпадает с оценкой (27).

Однако здесь имеется специфика задачи, и она позволяет воспользоваться непосредственно формулой (5), которая при $t=T$ сводится к уравнению

$$x_0 = -\int_0^T \dot{x}(s)ds,$$

откуда в силу (36) следует оценка

$$\|x_0\| \le \rho \frac{e^{\alpha T}-(1+\alpha T)}{\alpha^2}.$$

Пример 3. В предположениях примера 1 рассмотрим тележку третьего порядка

$$\dddot{x} = u, \qquad u \in U \subset \mathrm{R}^n.$$

При заданном начальном состоянии $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0)$ и нулевом конечном состоянии соответствующие краевые условия и вытекающие из них оценки имеют вид

$\int_0^T u(t)dt = -\ddot{x}_0,$	$\int_0^T u(t)tdt = \dot{x}_0,$	$\int_0^T u(t)\frac{t^2}{2}dt = \dot{x}_0,$
$\|\ddot{x}_0\| < \rho T,$	$\|\dot{x}_0\| < \rho\frac{T^2}{2},$	$\|x_0\| < \rho\frac{T^3}{3!}.$

3. Вариационная оценка снизу. Здесь излагается конструкция, которая позволяет существенно улучшить оценку снизу оптимального времени $T = T(x, \dot{x})$ в задаче о тележке без трения.

Рассмотрим исходную систему уравнений в интегральной форме:

$$\int_0^T u(t)dt = -\dot{x}_0, \tag{37}$$

$$\int_0^T u(t)tdt = x_0. \tag{38}$$

Вместо того, чтобы оценивать каждое из этих уравнений порознь, сначала можно образовать из них линейную комбинацию, содержащую неопределенный параметр S. Затем оценить полученное уравнение по норме, а после этого рассматривать задачу максимизации оценки по всем значениям параметра S.

В качестве подходящей линейной комбинации возьмем такую, которая приводит к физически естественному выражению $x_0 + S\dot{x}_0$, где S — произвольный вещественный параметр, имеющий размерность времени. Для этого достаточно из второго уравнения вычесть первое, умноженное на S:

$$\int_0^T u(t)(t-S)\,dt = x_0 + S\dot{x}_0, \qquad S \in \mathrm{R}. \tag{39}$$

Оценим полученное уравнение по норме, предполагая, что $\| u \| \le 1$:

$$\| x_0 + S\dot{x}_0 \| < \int_0^T \| u(t) \| \cdot | t - S |\, dt \le \int_0^T | t - S |\, dt. \tag{40}$$

Рассмотрим интеграл, содержащий $| t - S |$. В случае $0 \le S \le T$ он имеет вид

$$\int_0^T | t - S |\, dt = \frac{S^2}{2} + \frac{(T-S)^2}{2}.$$

Однако он вычисляется и в общем случае:

$$\int_0^T | t - S |\, dt = \frac{S\,|S|}{2} + \frac{(T-S)\,|T-S|}{2}.$$

Здесь использовался тот факт, что для неопределенных интегралов, содержащих $\mathrm{sign}(z)$ или $|z|$, с точностью до константы имеют место формулы

$$\int \mathrm{sign}(z)\,dz = |z|, \quad \int |z|\,dz = \frac{z|z|}{2}, \quad \int z|z|\,dz = \frac{z^2|z|}{3}, \cdots, \quad \int z^k |z|\,dz = \frac{z^{k+1}|z|}{k+2}.$$

Таким образом, неравенство (7) имеет в общем случае вид

$$\boxed{\| x_0 + S\dot{x}_0 \| < \frac{S\,|S|}{2} + \frac{(T-S)\,|T-S|}{2}.} \tag{41}$$

Оно справедливо для любого $S \in \mathrm{R}$ и для любой нормы $\| x \|$ в R^n. Идея состоит в том, чтобы основываясь на неравенстве (41), построить оценочную функцию $T_m(S) < T$, а затем максимизировать ее по S. Рассмотрим таблицу случаев.

№ п/п	Случай	Неявная оценка	Явная оценка $T_m(S) < T$
1	$S \le 0$	$\| x_0 + S\dot{x}_0 \| < -\frac{S^2}{2} + \frac{(T-S)^2}{2}$	$S + \sqrt{2\| x_0 + S\dot{x}_0 \| + S^2} < T$
2	$0 \le S \le T$	$\| x_0 + S\dot{x}_0 \| < \frac{S^2}{2} + \frac{(T-S)^2}{2}$	$S + \sqrt{2\| x_0 + S\dot{x}_0 \| - S^2} < T$
3	$T \le S$	$\| x_0 + S\dot{x}_0 \| < \frac{S^2}{2} - \frac{(T-S)^2}{2}$	$S - \sqrt{S^2 - 2\| x_0 + S\dot{x}_0 \|} < T$

Замечание 1. В случае $0 \le S \le T$ (и только в этом случае) оценочная функция $T_m(S) = S + \sqrt{2\| x_0 + S\dot{x}_0 \| - S^2}$ определена не на всем промежутке $0 \le S \le T$, так как подкоренное выражение $F(S) = 2\| x_0 + S\dot{x}_0 \| - S^2$ принимает на концах это-

го промежутка значения разных знаков: $F(0) = 2\|x_0\| > 0, \quad F(T) = 2\|x_0 + T\dot{x}_0\| - T^2 < 0.$

Последнее неравенство — это записанное в иной форме исходное неравенство (41) при $S = T$. Следовательно, на интервале $0 < S < T$ существует точка S_*, в которой $F(S)$ обращается в нуль. Это значит, что уравнение

$$\|x_0 + S\dot{x}_0\| = \frac{S^2}{2}, \tag{42}$$

где норма может быть любой, всегда имеет положительный корень $S_* \in (0, T)$. Если он найден, получаем оценку снизу $S_* < T$. Если таких корней несколько, то все они заключены в интервале $0 < S < T$, так как при $T \le S$ имеет место неравенство

$$\|x_0 + S\dot{x}_0\| < \frac{S^2}{2} - \frac{(T-S)^2}{2}.$$

Следовательно, $F(S) = 2\|x_0 + S\dot{x}_0\| - S^2 < -(T-S)^2$, т.е. $F(S) < 0$. Поэтому ни один корень уравнения $F(S) = 0$ не может лежать в диапазоне $T \le S$.

Замечание 2. Естественно потребовать, чтобы оценочная функция $T_m(S)$, как и неявная оценка (41), была определена для всех $S \in \mathrm{R}$. Поэтому в случае $0 \le S \le T$ возникает проблема доопределения функции $T_m(S)$ на тех участках, где подкоренное выражение $F(S) = 2\|x_0 + S\dot{x}_0\| - S^2 < 0$. При этом доопределенная функция должна удовлетворять условию $T_m(S) < T$. Простейший способ — доопределение нулем. Однако Scientific WorkPlace 3.0 рисует в данном случае график функции $T_m(S)$ даже на тех участках, где $2\|x_0 + S\dot{x}_0\| - S^2 < 0$. Анализ показывает, что это график непрерывной функции $T_m(S) = S + \mathrm{sign}(F(S))\sqrt{|F(S)|}$, что совпадает с определением $T_m(S)$ в случае $T \le S$ (строка 3 таблицы), когда $F(S) = 2\|x_0 + S\dot{x}_0\| - S^2 < 0$. По-видимому, это наиболее естественное доопределение. Оно иллюстрируется на рис. 1, 2 в случае пары ортогональных единичных векторов $x_0, \dot{x}_0 \in \mathrm{R}^n$.

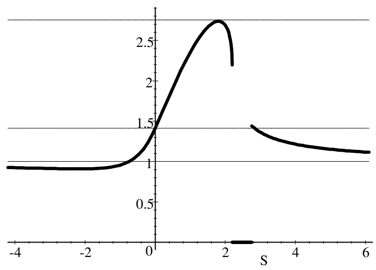

РИС. 1. Доопределение нулем при $F(S) < 0$

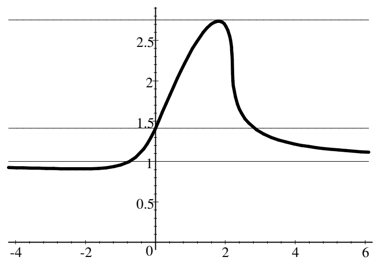

РИС. 2. Доопределение по формуле $T_m(S) = S + \mathrm{sign}(F(S))\sqrt{|F(S)|}$

Верхняя горизонтальная прямая есть точное значение $T = 2.7527482\ldots$ (при данном разрешении оно сливается с максимумом вариационной оценки $\max T_m(S) = 2.7371874\ldots$), а две расположенные ниже прямые — оценки $\sqrt{2\,\|x_0\|} = \sqrt{2}$ и $\|\dot{x}_0\| = 1$.

Таким образом, оценочная функция $T_m(S)$ для всех $S \in \mathrm{R}$ задается формулой

$$T_m(S) = \begin{cases} S + \sqrt{2\,\|x_0 + S\dot{x}_0\| + S^2}, & \text{если } S \le 0, \\ S + \operatorname{sign}(F(S))\sqrt{|F(S)|}, & \text{если } S \ge 0. \end{cases}$$

Далее возникает задача глобальной оптимизации $T_m(S)$ (негладкая, если норма $\|x\|$ негладкая). При этом функция $T_m(S)$ содержит исходные оценки:

$$T_m(0) = \sqrt{2\,\|x_0\|}, \quad \lim_{S \to \pm\infty} T_m(S) = \|\dot{x}_0\|.$$

Рассмотрим более детально уравнение

$$\|x_0 + S\dot{x}_0\| = \frac{S^2}{2}. \tag{43}$$

Оно обладает следующими свойствами.

1. Пусть $k > 0$. Умножим обе его части на k^2. Результат запишем в виде

$$\|k^2 x_0 + (kS)k\,\dot{x}_0\| = \frac{(kS)^2}{2}.$$

Это означает, что если S — решение уравнения (43) и если задано уравнение

$$\|y_0 + \tilde{S}\,\dot{y}_0\| = \frac{\tilde{S}^2}{2}, \tag{44}$$

где $y_0 = k^2 x_0$, $\dot{y}_0 = k\dot{x}_0$, то число $\tilde{S} = kS$ будет решением уравнения (44). Иными словами, каждое решение $S = S(x_0, \dot{x}_0)$ уравнения (43) обладает свойством

$$S(k^2 x_0, k\dot{x}_0) = kS(x_0, \dot{x}_0).$$

Поэтому достаточно рассматривать это уравнение в предположении, что норма скорости равна единице (если она критически близка к нулю, то выполнить нормировку по положению). В случае нормировки по скорости это означает следующее. Сначала от произвольно заданной пары $(x_0, \dot{x}_0)$ предварительно переходим к паре $(k^2 x_0, k\dot{x}_0)$, где $k = \|\dot{x}_0\|^{-1}$. Затем находим решение $S(k^2 x_0, k\dot{x}_0)$ нормированной задачи, после чего применяем преобразование

$$S(x_0, \dot{x}_0) = k^{-1} S(k^2 x_0, k\dot{x}_0).$$

2. Уравнение (9) всегда имеет, по крайней мере, один положительный корень S_*, причем, заключенный в интервале $0 < S_* < T$. Более того, любой положительный корень этого уравнения также заключен в этом интервале (см. выше).

3. Если норма $\|x\|$ — евклидова, т.е. $\|x_0+S\dot{x}_0\| = \sqrt{x_0^2+2x_0\dot{x}_0S+\dot{x}_0^2S^2}$, то уравнение (43) имеет геометрическую интерпретацию: это условие пересечения *гиперболы* $\eta=\|x_0+\xi\dot{x}_0\|$ и *параболы* $\eta=\xi^2/2$ в плоскости $\mathrm{R}^2(\xi,\eta)$ (рис. 3, 4).

4. Уравнение (43) возникает также в контексте ослабленной задачи о тележке (см. в этой связи работу [4]). Из заданного начального состояния $(x_0,\dot{x}_0)$ перевести тележку в начало координат за минимальное время S — без каких-либо ограничений на конечную скорость. Множество U предполагается евклидовым шаром $\|u\|\le 1$. Здесь имеется только одно терминальное условие, которое при постоянном управлении $u=\mathrm{const}$, $\|u\|=1$ имеет вид

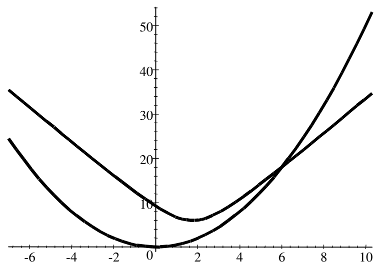

РИС. 3. Случай одного положительного корня

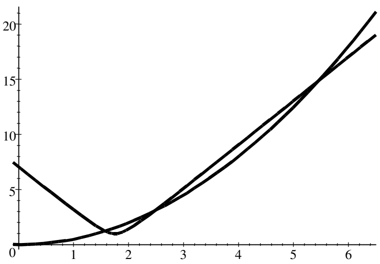

РИС. 4. Случай трех положительных корней

$$x_0+\dot{x}_0S+u\frac{S^2}{2} = 0.$$

Если перенести третье слагаемое в правую часть и перейти к нормам, то получим

$$\|x_0+\dot{x}_0S\| = \frac{S^2}{2}.$$

5. Пусть норма в R^n — евклидова. Тогда уравнение (43) комплексно эквивалентно уравнению четвертой степени

$$\left(\frac{S^2}{2}\right)^2 - 2\dot{x}_0^2\left(\frac{S^2}{2}\right) - \left(x_0^2+2x_0\dot{x}_0S\right) = 0. \tag{45}$$

Однако нас интересуют только его положительные корни. Поэтому сначала рассмотрим частный случай $x_0\dot{x}_0=0$, когда уравнение (11) является биквадратным:

$$Z^2-2\dot{x}_0^2Z-x_0^2=0, \qquad Z=\frac{S^2}{2}.$$

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет единственный положительный корень

$$S_\perp = \sqrt{2\left(\dot{x}_0^2+\sqrt{\dot{x}_0^2+x_0^2}\right)}.$$

Заметим, что функция $S_{\perp} = \sqrt{2\left(\dot{x}_0^2 + \sqrt{\dot{x}_0^2 + x_0^2}\right)}$ определена не только для ортогональных векторов $x_0, \dot{x}_0$, но и для произвольных пар $(x_0, \dot{x}_0)$. Теперь допустим, что $x_0\dot{x}_0 > 0$. Тогда уравнение (45) имеет единственный положительный корень S_*, такой, что $S_{\perp} < S_*$. При этом S_* является пределом последовательности S_k, которая генерируется формулой

$$S_{k+1} = \sqrt{2 \| x_0 + S_k \dot{x}_0 \|}, \quad S_1 \geq 0.$$

При $0 \leq S_1 < S_*$ последовательность S_k возрастает и ограничена сверху числом S_*, а если $S_* < S_1$, то S_k убывает и ограничена снизу числом S_*. Скорость сходимости $S_k \to S_*$ — линейная с асимптотическим параметром ошибки [5]

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{|S_{k+1} - S_*|}{|S_k - S_*|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|Z_{k+1} - Z_*|}{|Z_k - Z_*|} = \frac{\dot{x}_0^2 \, |S_* - S_0|}{Z_* S_*},$$

где $Z_k = S_k^2/2,\ Z_* = S_*^2/2 = \| x + S_* \dot{x} \|$, $S_0 = -x_0\dot{x}_0/x_0^2$ — абсцисса вершины гиперболы $\| x + S\dot{x} \|$.

О.В. Руденко

ДВОВИМІРНИЙ ВІЗОК: ВАРІАЦІЙНА ОЦІНКА ЗНИЗУ ФУНКЦІЇ БЕЛЛМАНА

В одномірному випадку задача про візок - відомий тестовий приклад застосування принципу максимуму. У двовимірному випадку (до якого зводиться тривимірний і, взагалі, n-мірний) задача не має аналітичного розв‘язку, і її треба розв‘язувати чисельно. Тоді виникає проблема локалізації невідомих параметрів, одним із яких є оптимальний час *T*. Найпростіша оцінка для T є $\max\left\{\| \dot{x}_0 \|, \sqrt{2 \| x_0 \|}\right\} < T$. Однак її можна істотно поліпшити, якщо скористатися нерівністю $\left\| x_0 + S\,\dot{x}_0 \right\| < \frac{S\,|S\,|}{2} + \frac{(T-S)\,|T-S\,|}{2}$, яка справедлива для всіх $S \in \mathrm{R}$ і будь-якої норми $\| x \|$ в R^2. Це призводить до явної оцінки знизу вигляду $T_m(S) < T$ і, таким чином, до задачі глобальної оптимізації оцінної функції $T_m(S)$ по S.

A.V. Rudenko

2D-TRAM PROBLEM: A VARIATIONAL LOWER BOUND TO BELLMAN FUNCTION

The one-dimensional tram problem is known as a first example of how maximum principle works. However, no analytical solution to this problem exists in 2D case (3-D and n-D cases being reduced to), and it has to be solved numerically. Here, a problem of localization arises as to unknowns one of them being an optimal time *T*. The simplest lower bound to *T* is $\max\left\{\| \dot{x}_0 \|, \sqrt{2 \| x_0 \|}\right\} < T$. It could be essentially refined based on the inequality $\left\| x_0 + S\,\dot{x}_0 \right\| < \frac{S\,|S\,|}{2} + \frac{(T-S)\,|T-S\,|}{2}$ that holds true for all $S \in \mathrm{R}$ and for an arbitrary norm $\| x \|$ in R^2. This inequality leads to an explicit lower bound $T_m(S) < T$ and, in that way, to a global optimization of the function $T_m(S)$ on S.

1. *Chikrii A.A., Rudenko A.V.* Time Optimal Control of Approach // The Second Int. Workshop "Recent Advantage in Non-differentiable Optimization", October, 1 - 4, 2001, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – Kyiv, 2001. - P. 14.
2. *Rudenko A.V.* A Contribution to the 2D Tram Optimal Stopping Problem // Int. Conf. on Applied Mathematics Dedicated to the 65th Anniversary of B.N.Pshenichnyi, June 25 – 28, 2002, Kyiv, Ukraine: Abstracts.– Kyiv, 2001. – P. 74
3. *Руденко А.В.* Об одной задаче оптимального быстродействия // Теорія оптимальних рішень. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2002. - № 2. – С. 135–141.
4. *Акуленко Л.Д.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // Прикладная математика и механика. - 1996. - **60**, вып. 5. – С. 724-735.
5. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация: Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

Получено 18.09.2003