УДК 519.8

В.Н. КУЗЬМЕНКО, В.В. БОЙКО

О ПРИМЕНЕНИИ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении практических задач оптимизации может быть неизвестно выполняется ли условие Слейтера и есть ли допустимое решение. Предлагаются дополнительные процедуры и настройки комбинированного метода [1], которые делают его поведение предсказуемым в указанных случаях. При выполнении условия Слейтера они позволяют генерировать последовательность точек, сходящуюся к решению по допустимой области. Результаты обосновываются.

В работе [1] описан и обоснован комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования. Этот метод использует идеи разработанных ранее методов линеаризации [2], отсекающих плоскостей [3], точных штрафных функций [4] и отличается простотой в реализации и надежностью в работе.

Комбинированный метод разработан для задач с ограничениями, но он также применим к задачам без ограничений при соответствующей формулировке последних и в этом случае совпадает с модифицированным методом отсечения [5].

Особенностью комбинированного метода является то, что последовательность точек, которая сходится к решению, лежит, как правило, вне допустимой области задачи.

Однако при решении практических задач [6] пользователя может интересовать поведение целевой функции в допустимой области, тем более что вне допустимой области целевая функция может быть не определена. Возможна ситуация, когда в задаче нет допустимого решения. Тогда пользователя интересует информация, позволяющая "правильно" скорректировать задачу. Такие задачи возникают, например, при оптимизации комплексных систем в энергетике.

Ниже предлагается некоторый подход к использованию комбинированного метода, который позволяет расширить его применимость и увеличить "полезность" выходной информации.

Итак, решается задача

$$\min_x \{ f(x) \colon f_j(x) \le 0, \; 1 \le j \le m, \; x \in M \}, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, f, f_j - выпуклые непрерывные функции, принимающие конечные значения на M . M заданно системой линейных неравенств и ограничено.

Положим $\varphi(x) = \max_j \{ f_j(x) \colon \; 1 \le j \le m \}$.

Пусть в задаче (1) выполнены условия Слейтера: $\exists \tilde{x} \in M$ и $\gamma > 0$, т.ч.

$$\varphi(\tilde{x}) \; \le -\gamma.$$

Выберем $x_1 \in M$, зададим $N_1 > 0$, положим $\varepsilon_1 = \gamma / 2$, $X_1 = \{x_1\}$.

Точка x_{k+1}, множество X_{k+1} и значения N_{k+1}, ε_{k+1} определяются на k-м шаге по результату решения задачи

$$\begin{gathered} \min_{x,\,\xi_1,\xi_2} \{ \; \| x - \tilde{x}_k \|^2 + \xi_1 + N_k \, \xi_2 \}, \\ f(x_i) + (f'(x_i), \; x - x_i) \le \xi_1, \; \forall x_i \in X_k, \\ \varphi(x_i) + (\varphi'(x_i), \; x - x_i) \le \xi_2, \; \forall x_i \in X_k, \\ \xi_2 \ge -\varepsilon_k, \; x \in M, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\tilde{x}_k = \arg\min\{F_k(x) : x \in X_k\}$ – точка минимума штрафной функции $F_k(x) = f(x) + N_k \max\{-\varepsilon_k ; \varphi(x)\}$ на X_k; $f'(x), \varphi'(x)$ – элементы субдифференциалов $\partial f(x), \partial \varphi(x)$.

Пусть x_{k+1}, ξ_1^k, ξ_2^k – решение задачи (2). Выполним *регулировку 1*:

$X_{k+1} = X_k \cup \{x_{k+1}\}$;

$N_{k+1} = 2 N_k$, если $\xi_2^k > -\varepsilon_k$, иначе $N_{k+1} = N_k$;

$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k / 2$, если $\varphi(x_{k+1}) \; < 0$, иначе $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

Лемма 1. Описанный процесс при $\varepsilon_1 > 0$ порождает подпоследовательность точек $x_{p(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, такую что $\varphi(x_{p(j)}) \; < 0$.

Доказательство. Для любого из вышерассматриваемых ε_k задача (2) соответствует исходной задаче

$$\min_x \{ f(x) \colon f_j(x) \le -\varepsilon_k, \; 1 \le j \le m, \; x \in M \},$$

для которой выполнены условия сходимости комбинированного метода [1]. Следовательно при условии $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ за конечное число шагов после изменения ε будет сгенерирована некоторая точка $x^+_{\varepsilon_k}$, такая что $f_j(x^+_{\varepsilon_k}) < 0$, $1 \le j \le m$. Такие точки и образуют указанную подпоследовательность $x_{p(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Последовательность x_k, $k = 1, 2, \ldots$ и подпоследовательность $x_{p(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, в частности, сходятся к решению задачи (1).

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству сходимости комбинированного метода с учетом того, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, а при $\varepsilon_1 = 0$ предложенный алгоритм совпадает с комбинированным методом.

При решении практических задач может быть неизвестно есть ли у задачи допустимое решение, а тем более с какой константой выполняется условие Слейтера. Поэтому вопрос о поведении метода в вырожденных случаях и при отсутствии допустимого решения, а также разработка алгоритма, который учитывает возможность таких данных, является важным [7].

Положим $\psi_\varepsilon(x) = \max\{-\varepsilon; \varphi(x)\}$ и рассмотрим задачу

$$\min_x \{\psi_\varepsilon(x) : x \in M\}. \tag{3}$$

Пусть $Q_\varepsilon = \operatorname{Arg}\min\{\psi_\varepsilon(x) :\ x \in M\}$, $x^* \in Q_\varepsilon$, $t_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x^*)$.

Q_ε – выпуклое компактное множество решений задачи (3), $Q_\varepsilon \subseteq M$.

Далее рассмотрим задачу

$$\min_x \{f(x) : x \in Q_0\}. \tag{4}$$

Если $t_0 = 0$, то задачи (1) и (4) эквивалентны. Если $t_0 > 0$, то задача (1) не имеет допустимого решения, в то время как задача (4) имеет решение. Поэтому для решения практических задач предпочтительно применение метода, который решает задачу (4), оперируя исходной информацией (1).

Возможность применения к задаче (4) тех или иных методов оптимизации зависит от свойств множества Q_0 и поведения функции $\psi_0(x)$ в окрестности множества Q_0. Теория и практика показывает, что наименее зависимым от указанных свойств есть метод штрафных функций, его сходимость доказывается при наиболее общих предположениях о свойствах задач [8]. Одновременно отмечается, что при неограниченном росте множителя N_k задача (2) может стать плохо обусловленной, поэтому желательно использовать "точные" штрафы.

Если задача (1) обладает вышеперечисленными "хорошими" свойствами, то рост N_k ограничен [1]. Если условие Слейтера не выполнено, то независимо от того существует допустимое решения или нет, может оказаться, что алгоритма (2) при $\varepsilon_1 = 0$ и без изменения N_k сходится при достаточно большом N_1.

Ниже предлагается регулировка элементов X_{k+1}, N_{k+1}, ε_{k+1} алгоритма (2), которая используется при условии, что мы не знаем выполняется ли для задачи (1) условие Слейтера, и позволяет по возможности ограничить рост N_k.

Итак, пусть заданы $x_1 \in M$ $(\varphi(x_1) > 0)$, числа $N_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $X_1 = \{x_1\}$ и решена задача (2).

На k-м шаге алгоритма выполняется *регулировка 2*.

1. Положим $X_{k+1} = X_k \cup \{x_{k+1}\}$.
2. Если, $\varphi(x_{k+1}) < 0$, то положим $\varepsilon_{k+1} = -\varphi(x_{k+1})/2$, $N_{k+1} = N_k$. Условие Слейтера выполнено и далее используем *регулировку 1*.
3. Если $\xi_2^k > -\varepsilon_k$, то:

   3.1. Решим задачу
$$\min_{x,\,\xi_2} \xi_2,$$
$$\varphi(x_i) + (\varphi'(x_i),\ x - x_i) \le \xi_2,\ \ \forall x_i \in X_k,$$
$$\xi_2 \ge -\varepsilon_k,\quad x \in M. \tag{5}$$
   Пусть $\underline{\underline{x_{k+1}}},\ \underline{\underline{\xi_2^k}}$ – ее решение. Положим $\underline{\xi_1^k} = \max_{x_i \in X_k}\{f(x_i) + (f'(x_i), \underline{x_{k+1}} - x_i)\}$.

   3.2. Если $\underline{\underline{\xi_2^k}} < \xi_2^k$, то положим $N_{k+1} = 2N_k$, иначе $N_{k+1} = N_k$.

   3.3. Если $\underline{\underline{\xi_2^k}} > -\varepsilon_k$, то положим $\varepsilon_{k+1} = \max\{0; -\underline{\underline{\xi_2^k}}/2\}$, иначе $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

   3.4. Положим $X_{k+1} = X_{k+1} \cup \{\underline{\underline{x_{k+1}}}\}$.
4. Если $\xi_2^k = -\varepsilon_k$, то положим, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

Лемма 3. Если для задачи (1) выполняется условие Слейтера, то при *регулировке 2* для некоторого k_0 будет выполнено $\varphi(x_{k_0+1}) < 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon_1 \ge 0$ таково, что $\min_{x\in M}\varphi(x) < -\varepsilon_1$. Тогда $\underline{\underline{\xi_2^k}} = -\varepsilon_k = -\varepsilon_1\ \forall k$, выполнено условие Слейтера, *регулировка 2* совпадает с *регулировкой 1* следовательно справедлива лемма 1, то есть будет найдена точка x_{k_0+1} такая, что $\varphi(x_{k_0+1}) < 0$.

2. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ таково, что $\min_{x\in M}\varphi(x) \ge -\varepsilon_1$. Предположим, что в этом случае лемма не верна. Тогда *регулировка 2* порождает бесконечную последовательность.

Предположим, что начиная с некоторого k' ε_k не изменяется, то есть $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} > 0\ \ \forall k \ge k'$. (Если $\min_{x\in M}\varphi(x) = -\varepsilon_1$, то $k' = 1$). Тогда либо $\xi_2^k = -\varepsilon_{k'}$, либо $\underline{\underline{\xi_2^k}} = -\varepsilon_{k'}\ \ \forall k \ge k'$, а соответствующие точки $x_{k+1},\ \underline{\underline{x_{k+1}}}$ являются решением задачи (5) и образуют последовательность, соответствующую методу отсекающих плоскостей [3], минимизирующую непрерывную функцию $\psi_{\varepsilon_{k'}}(x)$ и сходящуюся к множеству $Q_{\varepsilon_{k'}}$. Но тогда $\min_{x\in M}\psi_{\varepsilon_{k'}}(x) = -\varepsilon_{k'}$ и найдется точка x_{k_0+1} такая, что k_4.

Для случая $\min_{x\in M}\varphi(x) = -\varepsilon_1$ это противоречие доказывает лемму.

Для случая $\min\limits_{x\in M}\varphi(x) > -\varepsilon_1$ это противоречит тому, что *регулировка 2* используется бесконечно. Следовательно x_{k+1} и найдется k_1 такое, что $\min\limits_{x\in M}\varphi(x) \le -\varepsilon_{k_1}$. Но для такого случая лемма уже доказана.

Полученное противоречие доказывает лемму в целом.

Лемма 4. Если для задачи (1) условие Слейтера не выполнено и в описанном процессе N_k стабилизируется, то есть $\exists k'$ такое, что $N_k = N_{k'}$ $\forall k \ge k'$, то последовательность точек x_k сходится к решению x^* задачи (4).

Доказательство. Если условие Слейтера не выполнено, то $\varepsilon_k \to 0$, так как иначе по аналогии с доказательством леммы 3 получим, что $\min\limits_{x\in M}\varphi(x) < 0$. Так как N_k стабилизируется, то $\xi_2^k = \underline{\underline{\xi_2^k}}$ $\forall k \ge k'$ и точки x_{k+1} образуют последовательность сходящуюся к множеству Q_0, соответствующую методу отсекающих плоскостей для функции $\varphi(x)$. Тогда $\xi_2^k \to \min\limits_{x\in M}\varphi(x) = \xi_2^*$.

Так как выполнено $\varepsilon_k \to 0,\ \xi_2^k \to \xi_2^*,\ N_k$ стабилизировано, то дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству сходимости комбинированного метода [1]. Лемма доказана.

Лемма 5. Если для задачи (1) условие Слейтера не выполнено и в описанном процессе $N_k \to \infty$, то $\varepsilon_k \to 0$, $\xi_2^k \to \min\limits_{x\in M}\varphi(x)$, $x_{k+1} \to Q_0$.

Доказательство. $\varepsilon_k \to 0$ согласно лемме 4. Точки $\underline{\underline{x_{k+1}}}$ образуют последовательность, сходящуюся к множеству Q_0, а $\underline{\underline{\xi_2^k}} \to \min\limits_{x\in M}\varphi(x) = \xi_2^*$. Так как $N_k \to \infty$, то значения ξ_2^k такие, что $\xi_2^k > \underline{\underline{\xi_2^k}}$, образуют последовательность, для которой справедливо

$$\| x_{k+1} - \tilde{x}_k \|^2 + \xi_1^k + N_k\, \underline{\underline{\xi_2^k}} < \| x_{k+1} - \tilde{x}_k \|^2 + \xi_1^k + N_k\, \xi_2^k \le \left\| \underline{\underline{x_{k+1}}} - \tilde{x}_k \right\|^2 + \underline{\underline{\xi_1^k}} + N_k\, \underline{\underline{\xi_2^k}}.$$

Так как множество *M* ограничено, а *f* непрерывна и конечна на *M*, то существую константы *A, B, L* такие, что $\| x_1 - x_2 \|^2 < A$ $\forall x_1, x_2 \in M$, $\max\limits_{x\in M}|f(x)| < B$, $\max\limits_{x\in M}|f'(x)| < L$. Тогда $\underline{\underline{\xi_2^k}} < \xi_2^k < \underline{\underline{\xi_2^k}} + (A + 2B + L\sqrt{A}) / N_k$ и следовательно $\xi_2^k \to \xi_2^*$, а последовательность точек $x_{k+1}, \underline{\underline{x_{k+1}}}$ сходится к множеству Q_0.

Лемма доказана.

Полученные результаты показывают, что возможно построение алгоритмов решения оптимизационных задач, которые не предъявляют каких-либо специальных требований к условиям задачи и в тоже время генерируют варианты решения, дающие пользователю существенную информацию для анализа задачи. Именно такие алгоритмы необходимы при создании интеллектуальных информационных систем.

Развитие данной работы будет направлено на доказательство сходимости алгоритма при использовании в качестве задачи (5) более совершенного модифицированного метода отсечения и проверку гипотезы о сходимости алгоритма (2) для задач, в которых условие Слейтера не выполнено. Будет исследована эффективность алгоритмов при решении конкретных практических задачах.

В.М. Кузьменко, В.В. Бойко

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розв'язуванні практичних задач оптимізації може бути невідомо чи виконується умова Слейтера і чи існує припустимий розв'язок. Пропонуються додаткові процедури та настройки комбінованого метода [1], які роблять його поведінку передбачуваною для зазначених випадків. При виконанні умови Слейтера вони дозволяють генерувати послідовність точок, що збігається до розв'язку по допустимій області. Результати обґрунтовуються.

V.N. Kuzmenko, V.V. Boyko

USING OF CONVEX PROGRAMMING COMBINATION METHOD

In a process of practical optimization problem solving it may be not known is the Slater condition true and does a feasible solution exist. Additional procedures and settings of combination method are proposed to make its behavior predictable in the cases mentioned above. When the Slater condition is true these procedures allow to generate a sequence of points that converges to solution throughout feasible region. The results are proved.

1. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н.* Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121-134.
2. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136.
3. *Kelley J.* Tne cutting plane method for solving convex program // SIAM J. – 1960. – 8. – N 4. – P. 703-712.
4. *Бертсекас Д.П.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 399 с.
5. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н.* Модифицированный метод отсечения для минимизации выпуклой функции // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 6.– С. 142-149.
6. *Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г.* Разработка программных средств оптимизации сложных технических объектов // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова, 2002. – С. 3-12.
7. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука,1983. – 384 с.
8. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.

Получено 09.09.2003