Теорія оптимальних рішень

Рассматривается дифференциальная игра трех преследователей и одного убегающего на плоскости. Для позиционной игры преследования указана стратегия, обеспечивающая ε *-встречу для начальных состояний игроков, таких, что* $y^0 \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I} x_i^0\right\}$ *и любых движениях убегающего.*

УДК 518.9

А.П. ИГНАТЕНКО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Введение. Данная работа посвящена исследованию дифференциальной игры трех преследователей и одного убегающего на плоскости. Такая задача в случае полной информации для точной встречи впервые была рассмотрена и решена в [1]. Дальнейшее развитие с применением теории разрешающих функций было проведено в [2]. Случай позиционной информации для задачи группового преследования впервые рассматривался в [3]. В работах [4, 5] были сформулированы достаточные условия точной встречи для задачи группового преследования с позиционной информацией.

В настоящей работе решается задача ε -встречи в случае позиционной информации, т. е. считается, что преследователи обладают информацией о текущих геометрических координатах убегающего игрока. Рассматривается случай простой динамики, т. е. уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ \|u_i\| \le 1,\ i = \overline{1,3},$$
$$\dot{y} = v,\ \|v\| \le 1. \qquad (1)$$

Терминальное множество определяется неравенством $\|x - y\| < \varepsilon$. Таким образом, необходимо указать условия на начальное состояние, достаточные для того, чтобы траектория процесса (1) могла быть приведена на терминальное множество не позже некоторого момента времени T в классе позиционных стратегий при любых противодействиях убегающего.

Рассмотрим геометрическое состояние игроков, такое, что выполняется $\operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I} x_i\right\} \neq \varnothing$, где $I = \{1,2,3\}$ – множество индексов преследователей. Будем называть такие положения невырожденными.

Определение. Введем множество $Z(\alpha, t)$ по правилу

$$Z(\alpha,t) = cl\{\, p \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I} x_i\right\} : \forall i, j \in I :$$

$$\min\left[\left(\frac{x_i - p}{\|x_i - p\|}, \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}\right), \left(\frac{x_j - p}{\|x_j - p\|}, \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|}\right)\right] \le \cos\alpha\}\,.$$

Указанное множество зависит от времени, поскольку подразумевается, что $x_i = x_i(t)$. Легко видеть, что для каждого невырожденного геометрического состояния преследователей существует угол $\alpha^* > 0 : Z(\alpha,t) \neq \varnothing, \alpha \in [0, \alpha^*]$.

Здесь и далее считаем, что задано начальное состояние x_1^0, x_2^0, x_3^0, y^0 и величина $\varepsilon > 0$. Выберем угол α достаточно малым, чтобы выполнялось условие

$$\max_{i,j\in I}(\|x_i^0 - x_j^0\|^2 + \|x_k^0 - x_j^0\|^2 - 2\|x_i^0 - x_j^0\|\|x_k^0 - x_j^0\|\cos 2\alpha) < \varepsilon^2 . \qquad (2)$$

Расширим множество $Z(\alpha, t)$ следующим образом:

$$Z_1(\alpha,t) = \left\{ p \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I} x_i\right\} : \min_{i,j\in I} \min_{\lambda} \|p - (\lambda x_i + (1-\lambda)x_j)\| > \varepsilon \sin\alpha \right\} \bigcup Z(\alpha,t).$$

Построим вспомогательное векторное поле $V^*(y, x_1, x_2, x_3)$. Разобьем область $Z_1(\alpha, t)$ с помощью биссектрис треугольника на три части.

1. Пусть $y \in co\{O, x_i\}$ для некоторого $i \in I$, где O – точка пересечения биссектрис. В этом случае положим $v^* = 0$.

2. Пусть $y \in \partial Z_1(\alpha,t)$, тогда существуют индексы $i, j \in I$, для которых выполняется соотношение $\left(\frac{x_i - y}{\|x_i - y\|}, \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}\right) < \cos\alpha$. Управление v^* зададим следующим образом: $\|v^*\| = 1, (v^*, x_i - x_j) = 0, (v^*, x_i - y) < 0$. Продолжим определение на внутренние точки.

3. Пусть $y \in \operatorname{int} co\{O, x_k, x_l\}$. Проведем через точку y прямую, перпендикулярную к стороне $x_k x_l$. Построенная прямая пересекает границу множества $Z_1(\alpha,t) \bigcap co\{O, x_k, x_l\}$ в точках M и N. Существует $\lambda \in (0,1) : y = \lambda N + (1-\lambda)M$.

Определим значение v^* для точки y как $v^* = \lambda v^*(N) + (1-\lambda)v^*(M) = \lambda v^*(N)$. Таким образом, для всех точек $Z_1(\alpha, t)$ определено векторное поле. Непосредственно проверяется непрерывность заданного поля на области определения.

Описание стратегии преследования. Стратегия преследования будет строиться на основе метода параллельного преследования и векторного поля V^*. Пусть $y \in \operatorname{int} co\{O, x_k, x_l\}$. Рассмотрим уравнение

$$\left\| v^* - \alpha \cdot (x_i - y) \right\| = 1,\ i = \overline{1,3}.$$

Решением этого уравнения является разрешающая функция

$$\alpha(v^*, x_i - y) = \frac{(v^*, x_i - y) + \sqrt{(v^*, x_i - y)^2 + \|x_i - y\|^2 (1 - \|v^*\|^2)}}{\|x_i - y\|} =$$

$$= \frac{1}{\|x_i - y\|}\left[(v^*, \frac{x_i - y}{\|x_i - y\|}) + \sqrt{(v^*, \frac{x_i - y}{\|x_i - y\|})^2 + (1 - \|v^*\|^2)} \right].$$

Рассмотрим управление преследователей

$$u_i^* = v^* - \alpha(v^*, x_i - y)(x_i - y),\ i = \overline{1,3}.$$

Оценим время встречи при таком управлении. Скорость уменьшения величины $\|x_i - y\|$ можно записать как

$$\frac{d}{dt}\| x_i - y \| = -\alpha(v^*, x_i - y)\| x_i - y \|,$$

$$T_i = -1/\alpha(v^*, x_i - y),\ i = \overline{1,3}.$$

Переопределим управление таким образом, чтобы встреча происходила одновременно:

$$u_k = v^* - (x_k - y)/T,\ \text{где } T = \max\{T_k, T_l\},$$

$$u_l = v^* - (x_l - y)/T.$$

Если $T_m > T$, где $m \in I \setminus \{k, l\}$, то

$$u_m = (v^* - (x_m - y)/T) / \left\| v^* - (x_m - y)/T \right\|,$$

иначе

$$u_m = v^* - (x_m - y)/T.$$

Перейдем теперь к обоснованию указанной стратегии. Легко видеть, что управления u_i, $i = \overline{1,3}$ — допустимые, непрерывные по позиции функции. Для допустимости достаточно показать $\|u_i\| \le 1$, что следует из определения. Непрерывность следует из непрерывности векторного поля V^*.

Рассмотрим некоторое положение x_1, x_2, x_3, y. Пусть на промежутке времени $[t_1, t_2]$ выполняется $y \in co\{x_1, O, x_3\}$ и $T_1 \leq T_3$.

Лемма 1. Пусть для всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется $Z_1(\alpha, t) \neq \varnothing$. Тогда при любых управлениях убегающего игрока либо $y \in Z_1(\alpha)$ для всех $t \in [t_1, t_2]$, либо $\|x_i(t) - y(t)\| < \varepsilon$ для некоторых $t \in [t_1, t_2]$, $i \in I$.

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени $y \in \partial Z_1(\alpha, t)$. Рассмотрим произвольное управление v убегающего. По построению, при любом управлении стратегия преследователей гарантирует, что y не выйдет за границу множества $Z_1(\alpha, t)$ в области, где $\|x_i - y\| > \varepsilon, \forall i \in I$.

Лемма 2. Пусть для всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется $\|x_i - y\| > \varepsilon, \forall i \in I$ и $T_2 \leq T$. Тогда при любом управлении убегающего игрока вектор $x_i(t) - x_j(t)$ параллелен вектору $x_i(t_1) - x_j(t_1)$, где $i, j \in I$.

Доказательство. Управления игроков, определенные выше, таковы, что $u_i - u_j = -\alpha(v^*, x_1 - y)(x_i - x_j)$, таким образом управление не поворачивает вектор $x_i(t) - x_j(t)$, а только изменяет его длину.

Замечание. Этот результат верен и в случае $T_2 \geq T$ для вектора $x_1 - x_3$.

Лемма 3. Пусть для всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется $T_2 \geq T$. Тогда при любых управлениях убегающего игрока выполняются условия:

1. Величина $\max\limits_{k,i \in \{1,3\}} \left(\dfrac{x_2 - x_i}{\|x_2 - x_i\|}, \dfrac{x_k - x_i}{\|x_k - x_i\|} \right)$ монотонно не возрастает по времени.

2. Длины сторон $\|x_1 - x_2\|$ и $\|x_3 - x_2\|$ уменьшаются.

Доказательство. Первый пункт означает, что меньший из углов при стороне $x_1 x_3$ не уменьшается. Если $T_2 = T$, то $u_i - u_j = -\alpha(v^*, x_1 - y)(x_i - x_j)$ и углы не изменяются. Если $T_2 > T$, то движение игрока x_2 направлено в точку встречи двух других преследователей, но время ее достижения больше, следовательно, длина основания уменьшается быстрее, чем длины боковых сторон. Поскольку вектор $x_1 - x_3$ не поворачивается, то стороны стремятся к прямой, соединяющей x_2 и точку встречи двух других убегающих. Углы при этом, по крайней мере, не уменьшаются.

Уменьшение длин сторон следует из того, что разность проекций u_2 и u_i, где $i \in I \setminus \{2\}$, всегда больше нуля, т.е. скорость уменьшения положительна.

Следствие. Поскольку меньший угол при стороне $x_1 x_3$ не уменьшается, то множество $Z_1(\alpha, t) \neq \varnothing$, если только третий угол не стремится к нулю. Однако в этом случае ввиду (2) наступает момент времени, когда треугольник x_1x_3O попадает в ε-окрестность.

Лемма 4. Пусть для всех $t\in[t_1,t_2]$ выполняется $\|x_i-y\|>\varepsilon, \forall i\in I$. Тогда при любом управлении убегающего игрока $\frac{d}{dt}\|x_1-x_3\|\le\delta<0$, где δ определяется начальным положением и зависит от ε,α.

Доказательство. Как следует из предыдущих утверждений, $Z(\alpha,t)\neq\varnothing$ и $y\in Z(\alpha,t)$ для $t\in[t_1,t_2]$. Существует угол α^*, такой, что для любого положения угол между v^* и x_i-y, $i\in\{1,3\}$ меньше α^*. Скорость уменьшения стороны при угле α^* будет самой медленной из всех возможных. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\|x_1-x_3\|=(u_1-u_3,(x_1-x_3)/\|x_1-x_3\|)=-\alpha(v^*,x_1-y)<\delta<0.$$

Теорема. Пусть задано начальное положение, такое, что $y^0\in\operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I}x_i^0\right\}$ и $\varepsilon>0$. Тогда можно указать позиционные управления преследователей, такие, что для любой стратегии убегающего существует момент времени T и индекс $i\in I$, для которых выполняется $\|y(T)-x_i(T)\|<\varepsilon$.

Доказательство. Построим множество $Z_1(\alpha,t^0)$, так чтобы выполнялось $y^0\in Z_1(\alpha,t^0)$. Пусть преследователи придерживаются описанной стратегии. Как было показано, либо существует момент времени t_1, такой, что $\|y(t_1)-x_i(t_1)\|<\varepsilon$, для некоторого $i\in I$, либо $Z_1(\alpha,t)\neq\varnothing$ и $y\in Z_1(\alpha,t)$. Кроме того, показано, что в каждый момент времени одна из сторон треугольника уменьшается со скоростью не менее $\delta<0$, а две другие, по крайней мере, не увеличиваются. Следовательно, для некоторого момента времени, не большего чем $T=\dfrac{3\cdot\max_{i,j\in I}\|x_i^0-x_j^0\|}{\delta}$, выполняется $\max_{i,j\in I}\|x_i-x_j\|<\varepsilon$. Таким образом, существует $i\in I$, такой, что $\|y(t)-x_i(t)\|<\varepsilon$, $t\in[t^0,T]$.

Заключение. Предложен подход к решению позиционных задач ε-сближения для группы преследователей и одного убегающего. Представлена стратегия преследования и показана возможность окончания игры для невырожденных начальных состояний не позже времени T, зависящего от начальных геометрических координат игроков.

О.П Ігнатенко

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ПОЗИЦІЙНОГО ГРУПОВОГО ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Розглядається диференційна гра трьох переслідувачів та одного втікача на площині. Для позиційної гри переслідування вказана стратегія, яка забезпечує ε-зустріч для початкових станів гравців, таких, що $y^0 \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i \in I} x_i^0\right\}$ та за будь-яких рухів втікача.

A.P. Ignatenko

ON THE ONE PROBLEM OF POSITION GROUP PURSUIT

This work deals with differential game of three pursuers and one evader on the plane. It is proved that defined position strategy provided ε-catch for initial states that satisfy condition $y^0 \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i \in I} x_i^0\right\}$ and for arbitrary evader moving.

1. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами / Кибернетика. – 1976. – № 3. – С. 145 – 146.
2. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
3. *Тарлинский С.И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения нескольких управляемых объектов // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 3. – С. 34 – 35.
4. *Чикрий А.А.* Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками // Докл. АН СССР. – 1979. – **246**, № 6. – С. 27 – 28.
5. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. центра им. С. Банаха (Варшава). Мат. теория управления. – 1985. – **14**. – С. 81 –107.

Получено 26.05.2004