Исследуется задача управления торговыми стратегиями на финансовом рынке с помощью теории марковских процессов.

УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

ОБ УПРАВЛЕНИИ ФИНАНСОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

Введение. Каждый инвестор, который оперирует на рынке ценных бумаг, хочет получить наибольший возможный доход при наличии некоторого капитала за определенный период времени. Поэтому из большого количества разнообразных финансовых стратегий ему необходимо выбрать оптимальную с этой точки зрения.

В настоящей работе исследуется метод определения оптимальной торговой стратегии с помощью функции полезности. Этот метод базируется на методах теории управления марковскими процессами и принципе Беллмана.

В работе [1] исследованы случаи конечных пространства состояний управляемой системы и пространства возможных торговых стратегий на рынке ценных бумаг, из которой следует выбирать оптимальную стратегию. А также рассмотрен случай, когда эти пространства являются счетными или компактными. Доказаны соответствующие теоремы существования оптимальных торговых стратегий в этих случаях.

В настоящей работе продолжается исследование задачи управления торговыми стратегиями на финансовом рынке.

Определения и обозначения, которые нам понадобятся в настоящей работе подробно изложены в [1]. Приведем основные из них.

Пусть (Ω, Φ, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество состояний финансовой системы, и пусть также $\forall t \geq 0$ $\Phi_t \subset \Phi$ множество событий, которое соответствует информации, которая была получена к моменту времени t. Другими словами, если событие $B\in \Phi_t$, то в момент времени t известно, является ли это событие истинным или ложным. Далее будем предполагать, что Φ_t – неубывающий поток σ-алгебр, т. е. $\forall t < s\ \Phi_t\subset \Phi_s$. В данной работе будем рассматривать так называемые адаптированные процессы, которыми называются последовательности вида $X = \{X_0, X_1,...\}$, такие, что $\forall t \geq 0\ X_t$ является Φ_t-измеримой случайной величиной.

Рынок ценных бумаг задается следующим образом. Рассмотрим ценную бумагу (требование к адаптированному процессу дивидендов δ), дивиденды δ_t, заплаченные по ценной бумаге в момент времени t. Каждой ценной бумаге соответствует адаптированный процесс цены S, а S_t – стоимость ценной бумаги (которую еще называют *ex*-дивидендом) в момент времени t. На рынке существует N ценных бумаг, которые определяют $\boldsymbol{R}^N$-измеримый адаптированный процесс $\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)$... Предположим также, что эти ценные бумаги имеют некоторые процессы стоимостей (цен) $S = (S^1,\ldots,S^N)$. Торговой стратегией будем считать адаптированный процесс $\theta\in\boldsymbol{R}^N$, а процесс $\theta_t = (\theta^1{}_t ,\ldots , \theta^N{}_t)$ – портфель, полученный после торговли в момент времени t. Дивидендный процесс δ^θ определятся с помощью торговой стратегии θ следующим образом:

$$\delta^\theta{}_t = \theta_{t-1}(S_t+\delta_t) - \theta_t S_t,\ \text{ где } \theta_{-1} = 0. \tag{1}$$

Пусть Θ пространство торговых стратегий, и $\Theta \equiv L^N$, где L – это пространство адаптированных процессов. Для агента, который оперирует на рынке ценных бумаг, рассмотрим строго возрастающую функцию полезности U, определенную на L_+ (множестве неотрицательных адаптированных процессов потребления) и процесс взноса $e\in L_+$. При заданной паре (δ, S) торговая стратегия θ ставит в соответствие агенту процесс (суммарного общего) потребление $e + \delta^\theta$. Таким образом агент имеет множество возможных потреблений $X = \{c = e + \delta^\theta\in L_+ : \theta \in\Theta\}$.

Перед агентом стоит задача максимизации функции полезности, которая показывает, насколько выгодной для инвестора является выбранная стратегия, т. е. нужно найти решение задачи: $\sup\limits_{c\in X} U(c)$.

1. Рассмотрим задачу выбора портфеля и стоимости ценных бумаг с помощью динамического программирования, т. е. метода решения задачи динамической оптимизации с помощью рекурсивных структур. Этот метод базируется на принципе оптимальности Беллмана и на теории марковских цепей, основные положения которых изложены далее.

Пусть процесс накопления капитала агента при процессе потребления c обозначается W_c и определяется следующим образом:

$$W_0^c = 0,$$

$$W_t^c = \frac{W_{t-1}^c + e_{t-1} - c_{t-1}}{d_t},\ t\geq 1, \tag{2}$$

где W_t – накопленный капитал в момент времени t; e_t – взнос в момент времени t; c_t – потребление в момент времени t; $d_t > 0$ – дисконт в момент времени t.

Тогда задачу агента, при заданной функции полезности $U{:}L_+ \to \mathbf{R}$ на множестве неотрицательных адаптированных процессов L_+, можно записать следующим образом: $\sup\limits_{c} U(c)$, уравнение (2), $c \le W_T^c + e$.

Заметим, что динамическое программирование удобно применять со специальными типами функций полезности. Одним из простейших таких примеров есть адитивна функция полезности U, которая определяется следующим образом:

$$U(c)=E\,[\sum_{t=0}^{T} u_t(c_t)],$$

где $u_t{:}\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ – строго возрастающая и непрерывная по t функция, T – фиксированный момент платежа.

Для простоты исследования этого примера будем считать, что $\Phi_t=\{\Omega, \varnothing\}$, $t\ge 0$. И, пусть текущий капитал $W_t^c = w$. Тогда максимизация полезности в момент времени t при каждом $w\in \boldsymbol{R}$ будет

$$V_t(w) = \sup_{c\in L_+} \mathrm{E}\sum_{s=t}^{T} u_s(c_s),$$

при условиях $W_t^c = w$, уравнение (2), $c \le W_T^c + e$.

При $t = T$ функция V_t будет иметь вид $V_T(w) = u(w + e)$, $w\ge - e$, а для $t < T$, как показано в [2],

$$V_t(w) = \sup_{\bar{c}\in R_+} \mathrm{E}\; ut(\bar{c}\,) + Vt_{+1}\left(\frac{w+e_t-\bar{c}}{d_t}\right). \tag{3}$$

Соотношение (3) называют уравнением Беллмана. Оптимальная политика потребления c определяется индуктивно следующим образом: ([2]) $c_t = C_t\,(W_t^c\,)$, где $C_t\,(w)$ – решение уравнения (3) для $t < T$ и $C_T\,(w) = w + e$. Из уравнения Беллмана (3) вытекает, что функция стоимости V_{t+1} содержит всю необходимую информацию о будущем для принятия решения в момент времени t.

Для некоторых функций полезности рассмотрим задачу управления финансовой стратегией на рынке ценных бумаг с помощью теории управления цепями Маркова. Основные понятия и положения этой теории подробно изложены в [1].

Напомним, что управление θ называется марковским, если $\forall t \ge 0$ θ_t в действительности зависит только от последнего аргумента $\theta_t = \theta_t\,(z_t)$, т. е. для любых значений $z'_0, z'_1,..., z'_{t-1}$ и $z''_0, z''_1,..., z''_{t-1}$: $\theta_t(z'_0, z'_1,..., z'_{t-1}, z_t)=\theta_t\,(z''_0, z''_1,..., z''_{t-1}, z_t)$. Управление θ называется однородным марковским, если $\theta_{t_1}(z) \equiv \theta_{t_2}(z)$, t_1, $t_2 > 0$.

Пусть Δ – совокупность всех управлений θ. Обозначим $\Theta_t(z)$, $t \ge 0$ некоторые фиксированные подмножества (разные для различных значений $X_t = z$) пространства Θ, каждое из которых ограничивает область значений управления θ_t в момент времени t, если $X_t = z$. Управление $\theta\in\Delta$ называется допустимым, если $\forall t \geq 0 : \theta_t (X_0,\dots , X_{t-1}, z)\in \Theta_t(z) \subseteq \Theta$.

Класс допустимых управлений обозначим Δ'. Очевидно, что выделение класса Δ', который характеризуется набором $\{\Theta_t(z),\ t \geq 0\}$, зависит от сути конкретной задачи. Обозначим Δ'' класс тех допустимых управлений, для которых $\forall t \geq 0 :\ \Theta_t(z) \equiv \Theta(z)\ (\subseteq \Theta)$.

Рассмотрим на рынке ценных бумаг марковский процесс состояний $X = \{X_0, X_1,\dots\}$ такой, как вышеописан. Пусть L – пространство последовательностей случайных величин вида $c = \{c_0,\ c_1,\ c_2,\dots\}$ и, таких, что $\forall t \geq 0$ c_t есть Φ_t-измеримой, и существует константа k, такая, что $|c_t| \leq k$. Другими словами, L – это пространство ограниченных адаптированных процессов. Агент выбирает процесс потребления из множества L_+ неотрицательных процессов из L.

Пусть на рынке существует N ценных бумаг, причем n-я ценная бумага определяется процессом дивидендов δ^n из L, и ему соответствует процесс цены S^n из L. Торговой стратегией агента считаем $\theta = (\theta^1,\dots ,\theta^N)$, который принадлежит множеству $\Theta \equiv L^N$. Каждая стратегия $\theta\in\Theta$ определяет дивидендный процесс δ^θ из L соотношением (1).

Будем считать, что процесс X зависит от торговой стратегии θ, т. е. (X, θ) – управляемая цепь.

Агенту, который оперирует на рынке ценных бумаг, поставим в соответствие процесс вклада $e\in L_+$ и при заданном начальном состоянии u функцию полезности U^i: $L_+ \to \boldsymbol{R}$, которая характеризует доход агента от выбранной стратегии θ и, таким образом, дает возможность судить о качестве того или иного управления. Таким образом перед агентом стоит задача

$$\sup_{\theta\in\Theta(e)} U^i(\mathrm{e} + \delta^\theta),\ \text{где}\ \Theta(\mathrm{e}) = \{\theta \in\Theta\colon \mathrm{e} +\delta^\theta \geq 0\}.$$

Для любого t Φ_t – множество событий, порожденное $\{X_0,\ \dots,\ X_t\}$, т. е. информация, доступная в момент времени t, полученная наблюдением процесса состояний X к моменту времени t.

2. Далее будем считать однородными по времени функцию полезности, процесс взноса и процесс дивидендов.

При заданном начальном состоянии i рассмотрим функцию полезности U^i: $L_+ \to \boldsymbol{R}$, которую определяют величина переоценки $\rho\in(0, 1)$ и строго возрастающая, ограниченная, вогнутая и непрерывная функция u: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$, такая, что

$$U_i(c) = E_i \Big[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)\Big],$$

где E_i – математическое ожидание по вероятностной мере P_i, согласованное с начальным состоянием $X_0 = i$.

Рассмотрим другую функцию полезности, которая определяет для стратегии θ средний доход в единицу времени

$$U_1^i(c) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \inf \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{t=0}^{\mathrm{T}} E_i\, u(c_t).$$

Пусть функции g: $Z \to \boldsymbol{R}_{++}$, f: $Z \to R_{++}^N$, такие, что $\forall t$ вклад $e_t = g(X_t)$ и дивиденды $\delta_t = f(X_t)$. Предположим, что стоимость ценной бумаги заданна некоторой функцией S: $Z \to R_{++}^N$ таким образом: $\forall t$: $S_t = S(X_t)$.

Зафиксируем портфель $b \in R_{++}^N$, пусть $-b$ – нижняя граница короткой позиции, капитал ограничен снизу величиной $\underline{w} = \min_{i\in Z} -b[S(i) + f(i)]$.

Обозначим $D = Z \times [\underline{w}, \infty)$. Будем считать, что функция F: $D \to \boldsymbol{R}$ относится к пространству, которое обозначим $B(D)$, если $\forall i \in Z$ $F(i, \cdot)$: $[\underline{w}, \infty) \to \boldsymbol{R}$ является ограниченной, непрерывной и вогнутой функцией.

Для функции $U^i(c)$ определим функцию $V \in B(D)$, такую, что

$$V(i,w) = \sup_{(c,\theta)\in L_+\times\theta} U^i(c), \tag{4}$$

и выполнены условия

$$W_0^\theta = w, \tag{5}$$

$$W_t^\theta = \theta_{t-1}[S(X_t) + f(X_t)],\ t \ge 1, \tag{6}$$

$$c_t + \theta_t S(X_t) \le W_t^\theta + g(X_t),\ t \ge 0, \tag{7}$$

$$\theta_t \ge -b,\ t \ge 0. \tag{8}$$

Управление $\tilde{\theta} \in \Delta'$ называется оптимальным по U-критерию, если $\forall u \in Z$: $V(i, w) = U^i(e, \tilde{\theta})$.

В работе [2] рассмотрена задача нахождения оптимизации в случае, когда процесс состояний $\{X_t,\ t \ge 0\}$ – марковская (не управляемая) цепь, т. е. вероятность перехода в другое состояние не зависит от выбора стратегии.

В настоящей работе исследуются управляемые цепи Маркова, определения которого даны выше. Следовательно пусть далее пара (X, θ) определяет управляемую цепь Маркова.

Будем искать функцию $V \in B(D)$ как стоимость задачи управления, которая удовлетворяет условие (4) и подчиненная условиям (5) – (8). Метод нахождения функции V, предложенный в [2], состоит в следующем. Возьмем любую функцию F из $B(D)$ и с помощью ее построим новую функцию $\mathrm{Y}F$.

Следовательно пусть для некоторой функции $F \in B(D)$ определим $\mathrm{Y}F$:$D \to \boldsymbol{R}$ таким образом:

$$\mathrm{Y}F(i,w) = \sup_{(\bar{c},\bar{\theta})\in \mathrm{R}_+\times \mathrm{R}^N} \rho u(\bar{c}) + \rho E_i[F(X_2, \bar{\theta}\,[S(X_2) + f(X_2)])], \tag{9}$$

$$\bar{c} + \bar{\theta}\, S(i) \le w + g(i), \tag{10}$$

$$\bar{\theta} \geq -b. \tag{11}$$

Иными словами, $\Upsilon F(i,w)$ является супремумом функции полезности, что можно получить при определении начальных условий (i,w) в предположении, что функция V в следующий период времени будет равна F.

Уравнение (9) с условиями (10), (11) – уравнением Беллмана.

Далее показано, что если $F = \Upsilon F$, то $F = V$. Такой подход приводит к алгоритму нахождения V, что называется итерацией стоимости. Опишем этот метод подробнее. Имеет место следующее утверждения из [2].

Лемма 1. Если $F\in B(D)$, тогда и $\Upsilon F\in B(D)$.

Введем понятия расстояния между двумя функциями с $B(D)$.

Пусть F, $G\in B(D)$. Расстоянием между функциями F и G будем называть

$$d(F, G) = \sup\{\,|F(i,w) - G(i, w)| : (i, w) \in D\}.$$

Разумеется, что $F = G$ тогда и только тогда, когда $d(F, G) = 0$.

Лемма 2 [2]**.** Для любых F, $G\in B(D)$: $d(\Upsilon F, \Upsilon G) \leq \rho\, d(F, G)$.

Применив эту лемму, мы можем построить единственное решение F уравнение $\Upsilon F = F$. Решение F называется неподвижной точкой Υ.

Следующее утверждение показывает, что F может быть построенное как граница функций (путем итераций).

Лемма 3 [2]. Пусть $F_{-1}(i,w) = 0$ для всех (i,w) с D и пусть $F_t = \Upsilon F_{t-1}$, $t \geq 0$. Тогда $F(i,w) \equiv \lim\limits_{t\to\infty} Ft(i,w)$ существует для всех (i,w) с D и определяет единым образом функцию F с $B(D)$, для которой выполненное $F = \Upsilon F$.

Пусть C: $D\to\boldsymbol{R}_+$, Φ: $D\to\boldsymbol{R}^N$, и $[C(i,w), \Phi(i,w)]$ – решение уравнения (9) – (11). Пусть также при заданных начальных условиях (i,w) в (4) – (8)

$$W_0^* = w,$$

$$W_t^* = \Phi(X_{t-1}, W_{t-1}^*), \; t \geq 1.$$

Дальше определим (c^*, θ^*) таким образом: $c_t^* = C(X_t, W_t^*)$, $\theta_t^* = \Phi(X_t, W_t^*)$. Пара (c^*, θ^*) определяет оптимальную политику обратной связи.

Теорема 1. Пусть пространство состояний управляемой системы Z и пространство возможных торговых стратегий на рынке ценных бумаг Θ – конечные множества, и $0 \leq u(c) \leq K < \infty$. Тогда функция V, что определена в (4) – (8), – единая неподвижная точка Υ . Оптимальная политика обратной связи (c^*, θ^*) – решение (4) – (8).

Доказательство, такое, как доказательство аналогичного утверждения для неуправляемых цепей с [2].

Рассмотрим задачу оптимизации торговой стратегии на финансовом рынке в случае, когда фазовое пространство управляемой системы и пространство выбора допустимых стратегий являются компактными или счетными множествами.

Утверждения и определения, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения, подробно изложены в [1].

Применим теперь известные результаты, полученные в [3, 4] к рынку ценных бумаг, и получим следующие теоремы о достаточных условиях U-оптимальной торговой стратегии.

Теорема 2. Пусть на рынке ценных бумаг пространство возможных торговых стратегий Θ – конечно. Тогда $\forall\rho\in(0,1)$ в Θ_0 существует оптимальная по U-критерию стратегия θ_ρ и оптимальный доход $U_\rho = U_\rho(c, \theta_\rho)$ – единственное в $M(Z)$ решение уравнения

$$U(z) = \max_{\theta\in\Theta}\left\{ u(z,\theta)+\rho\int U(y)P(dy/z,\theta)\right\}. \qquad (12)$$

Теорема 3. Пусть на рынке ценных бумаг пространство возможных торговых стратегий Θ – компактно и

1) функция $u(z, \theta)$ полунепреравная сверху на $Z\times\Theta$;

2) переходная вероятность $P(\cdot / z, \theta)$ слабо непрерывна по z, θ .

Тогда $\forall\rho\in(0,1)$ в Θ_0 существует оптимальная по U-критерию стратегия θ_ρ и оптимальный доход $U_\rho = U_\rho(c, \theta_\rho)$ – единственное в $C_1(Z)$ решение уравнения (12).

Для того, чтобы сформулировать следующие теоремы о существовании оптимальной по U_1-критерию стратегии, введем следующую функцию:

$$v_\rho(z) = U_\rho(z) - U_\rho(c),$$

где c – некоторая фиксированная точка пространства Z.

Для $v_\rho(z)$ выполнено соотношение

$$g_\rho + v_\rho(z) = \max_{\theta\in\Theta}\left\{ u(z,\theta)+\rho\int v_\rho(y)P(dy/z,\theta)\right\},$$

где $g_\rho = (1-\rho)\, U_\rho(z)$.

Пусть также выполненное предположение:

*) существуют последовательность $\{\rho_n\}\uparrow 1$, точка $z\in Z$ и число $N < \infty$ такие, что

$$\left|v_{\rho_n}(z)\right| < N,\ z\in Z,\ \ n = 1,2,\ldots$$

Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z – компакт, и пространство возможных торговых стратегий Θ – конечное множество, и выполненное предположение *) и

1) функция $u(z, \theta)$ непрерывна по z $\forall\theta\in\Theta$;

2) $\theta(X/ z, z', \theta) \to 0$ при $z' \to z$ $\forall\theta\in\Theta$, где $\theta (\cdot / z, z', \theta)$ – полная вариация меры $Q (\cdot / z , z', \theta) = P(\cdot / z, \theta) - P(\cdot / z', \theta)$.

Тогда в Θ_0 существует оптимальная по U_1-критерию торговая стратегия.

Теорема 5. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z и пространство возможных торговых стратегий Θ – компакты, выполнено предположение *) и такие условия:

1) функция $u(z, \theta)$ непрерывна по z, θ;

2) $\theta(X/ z, z', \theta)\to 0$ при $z'\to z$ равномерно по $\theta\in\Theta$;

3) переходная вероятность $P(\cdot / z, \theta)$ слабо непрерывна по c, θ.

Тогда в Θ_0 существует оптимальная по U_I-критерию торговая стратегия.

Доказательство теорем 4, 5 аналогично доказательству соответствующих теорем из [4].

Заключение. Полученные результаты показывают, что оптимальные торговые стратегии на рынке ценных бумаг можно находить с помощью теории управляемых цепей Маркова. К задаче финансовой математики выбора портфеля и цен ценных бумаг может быть применен метод динамического программирования. На основании известных результатов теории управления были найдены условия существования оптимальной стратегии на финансовом рынке в классе однородных цепей Маркова.

Т.В. Пепелясва

ПРО КЕРУВАННЯ ФІНАНСОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ НА РИНКУ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Досліджується задача керування торговими стратегіями на фінансовому ринку за допомогою теорії марківських процесів.

T.V. Pepelyaeva

ABOUT THE FINANCIAL STRATAGIES CONTROL ON THE SECURITIES MARKET

It is investigated the task of financial strategies control on the financial market using the theory of Markov's processes.

3. *Пепеляева Т.В.* Об оптимальных торговых стратегиях на финансовом рынке // Теорія оп тимальних рішень. – 2005. – № 4 . – С. 56–65.
4. *Duffie D.* Dynamic Asset Priciny Theory – Princeton University Press, 1992. – 299 p.
5. *Blackwell D.* Discounted dynamic programming // Ann. Math. Statist.– 1965.– **36**, N 1. – P. 15–35.
6. *Maitra A.* Discounted dynamic programming on compact metric spaces // Sankhya. Ser. A. – 1968. – **30**, N 2. – P. 20–36.

Получено 10.07.2006