УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА

ГАРАНТИРУЮЩИЕ И ОПТИМИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЫПУКЛЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Исследованы сложные задачи целочисленной оптимизации с неточно заданными коэффициентами линейной целевой функции и выпуклых квадратичных функций ограничений. Построены и обоснованы точные и приближенные декомпозиционные методы поиска гарантирующих и оптимистических решений таких задач. Рассмотрены некоторые классы множеств неопределенности, опи сывающих исходные данные этих задач.

Введение. При решении ряда оптимизационных задач, которые возникают на практике, приходится учитывать различные факторы неопределенности и случайности: неточность входной информации, неадекватность математических моделей реальным процессам, ошибки округления, погрешность вычислений и др. Современная теория и практика оптимизации строятся на основе классической постановки оптимизационных задач, которая предполагает, что все данные заданы точно. Но для большого числа дискретных оптимизационных задач, возникающих, например, в статистике (анализ данных и надежность), биологии (молекулярная биология, генетика, анализ ДНК), физике (физика высоких энергий, рентгеновская кристаллография), криптографии (конструирование помехозащищенных кодов), математике, политике, социальных науках (управление системами медицинского обслуживания, образования, социальной защиты), такая постановка является неудовлетворительной. Исходные данные: целевая функция и допустимая область могут изменяться в процессе оптимизации. Более того, по словам академика В.М. Глушкова [1], в их целенаправленном изменении заключается основная содержательная сущность процесса оптимизации для рассматриваемого класса задач.

Продолжая исследования, представленные в работах [2–6], в этой статье изучаются целочисленные оптимизационные задачи с линейной целевой функцией и выпуклыми квадратичными функциями ограничений в условиях неопределенности данных. Разработаны и обоснованы точные и приближенные декомпозиционные методы нахождения гарантирующих и оптимистических решений этих задач. Рассмотрены некоторые классы множеств неопределенности, описывающих исходные данные указанных задач.

1. Постановка задачи. Задача целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными ограничениями имеет следующий вид:

$$\max\left\{\left\langle c,x\right\rangle \mid f_i(x)=\left\langle D_i x,x\right\rangle+\left\langle q_i\,,x\right\rangle+b_i\le 0,\ i\in N_m=\{1,...,m\}\right\}, \qquad (1)$$

где вектор решений $x\in Z^n$; Z^n – множество n–мерных целочисленных векторов из R^n; параметры $c\in R^n$, $b\in R^m$, $q_i\in R^n, D_i\in R^{n\times n}$; $D_i\succeq 0$ (то есть являются симметричными неотрицательно определенными матрицами) для всех $i\in N_m$.

Формулировка (1) допускает, что данные о векторе c и квадратичных функциях ограничений $f_i(x)$, $i\in N_m$, известны точно. Однако на практике эти параметры оцениваются с помощью данных, которые содержат результаты помех, возмущений, ошибок измерений и различные виды неопределенностей. О них известны лишь множества возможных значений, а статистические характеристики отсутствуют. Поскольку задачи целочисленной оптимизации, как правило, чувствительны к возмущениям параметров, ошибки входных данных имеют тенденцию влиять на решения этих задач и часто приводят к результатам, далеким от оптимальных.

Целочисленную оптимизационную задачу поиска гарантирующих решений с выпуклыми квадратичными функциями ограничений в условиях неточно заданных данных можно представить в виде

$$\max\{\min\{\left\langle c,x\right\rangle \mid c\in C\}\mid x\in X_1\}, \qquad (2)$$

соответственно задачу поиска оптимистических решений с управляемыми данными представим в виде

$$\max\{\max\{\left\langle c,x\right\rangle \mid c\in C\}\mid x\in X_2\}, \qquad (3)$$

где $X_1=\{x\in Z^n \mid f_i(x)\le 0\ \forall f_i\in F_i,\ i\in N_m\}$; $X_2=\{x\in Z^n \mid \exists f_i\in F_i\ f_i(x)\le 0,\ i\in N_m\}$, $c\in R^n$; C – выпуклое замкнутое множество из R^n; $f_i(x)=\left\langle D_i x,x\right\rangle+\left\langle q_i\,,x\right\rangle+$ $+b_i\le 0$; F_i – множество выпуклых квадратичных функций в R^n, $i\in N_m$.

Оптимальным решением задачи (2) (соответственно задачи (3)) является пара $(\underline{c},\overline{x})$ ($(\overline{c},\overline{x})$ задачи (3)), элементы которой $\underline{c}\in C$, $\overline{x}\in X_1$ ($\overline{c}\in C$, $\overline{x}\in X_2$) удовлетворяют условию

$$\langle \underline{c},\overline{x}\rangle=\min\{\langle c,\overline{x}\rangle \mid c\in C\}\ge\min\{\langle c,x\rangle \mid c\in C\}, \qquad (4)$$

$$(\langle \overline{c},\overline{x}\rangle=\max\{\langle c,\overline{x}\rangle \mid c\in C\}\ge\max\{\langle c,x\rangle \mid c\in C\}) \qquad (5)$$

для всех (c,x), таких, что $x\in X_1$, $(x\in X_2)$.

Если решение ($\underline{c}, \overline{x}$) задачи (2) (соответственно ($\overline{c}$, $\overline{x}$) задачи (3)) существует, то оно является гарантирующим (оптимистическим) в том понимании, что $\langle D_i x, x\rangle + \langle q_i , x\rangle + b_i \le 0 \; \forall \left(D_i, q_i, b_i\right) \in S_i, i \in N_m$,($\exists \left(D_i, q_i, b_i\right) \in S_i$: $\langle D_i x, x\rangle + \langle q_i, x\rangle + b_i \le 0$, $i \in N_m$) и $\forall x \in X_1 (x \in X_2)$ выполняется условие (4) – (5).

Задание множеств неопределенности C и F_i существенно влияет на степень сложности сопутствующих задач оптимизации при построении оптимального решения. Следует отметить, что для некоторых классов множеств неопределенности задачи целочисленного линейного, квадратичного и полуопределенного программирования легко сводятся к стандартным оптимизационным задачам с точно заданными данными.

Опишем некоторые классы множеств неопределенности, для которых задачи (2) и (3) могут быть сведены к оптимизационным задачам с точно заданными данными. Рассмотрим случай, когда множество C задано таким образом: $C = \{c : \left|c - c_0\right| \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, где c_0 и ε - соответственно заданные вектор и число. Тогда $\min\left\{\langle c, x\rangle : c \in C\right\} = -f_C(-x)$, $\max\left\{\langle c, x\rangle : c \in C\right\} = f_C(x)$, где $f_C(x)$ – опорный функционал выпуклого множества C. Поскольку $f_C(x)$ для C в этом случае вычисляется аналитически [7, с.132], то целевая функция задачи (2) принимает вид $\max\left(\langle c_0, x\rangle - \varepsilon|x|\right)$, а задачи (3) соответственно $\max\left\{\langle c_0, x\rangle + \varepsilon|x|\right\}$.

Покажем, что при некоторых ограничениях на множества неопределенности C и $S_i = \left\{\left(D_i, q_i, b_i\right)\right\}, i \in N_m$, решение задачи (2) и задачи (3) может быть найдено однократным решением задачи целочисленной оптимизации вида (1).

Будем говорить, что множество W при заданном X имеет максимальный элемент $w^* \in W$ (минимальный элемент $w_* \in W$), если $f(x, w^*) \ge f(x, w)$ ($f(x, w^*) \le f(x, w_*)$) $\forall x \in X, \forall w \in W$. Если $w^* (w_*)$ существует, то является решением $w^* \in \arg\max\limits_{w \in W} \min\limits_{x \in X} f(x, w)$ ($w^* \in \arg\min\limits_{w \in W} \max\limits_{x \in X} f(x, w)$).

Приведем примеры множеств, имеющих максимальные (минимальные) элементы, в предположении, что $S_i = \left\{D_i\right\}, i \in N_m$.

1. Пусть для некоторых $i \in N_m, D_i^0$ – известные симметричные неотрицательно определенные матрицы; S_i – замкнутые сферы с центром в D_i^0 радиусом $\rho_i > 0$: $S_i = \{D_i : D_i = D_i^T, \left\|D_i - D_i^0\right\|_S \le \rho_i\}$, где $\left\|D\right\|_S = \max\left\{\langle D y, y\rangle : \left\|y\right\| = 1\right\}$ – спектральная норма матрицы D_i. Тогда при $0 \le \rho_i \le \lambda^i_{\min}\left[D_i^0\right]$, где $\lambda^i_{\min}\left[A\right]$ – мини-мальное собственное значение матрицы A; S_i является выпуклым компактом симметричных неотрицательно определенных матриц. Нетрудно проверить,

что для $D_i^* = D_i^0 + \rho_i E$ и $D_{*i} = D_i^0 - \rho_i E$, где E – единичная матрица, справедливо $f_i(x, D_i^*) \geq f_i(x, D_i)$, $f_i(x, D_{*i}) \leq f_i(x, D_i)$ при любых $x \in Z^n$ и $D_i \in S_i$, поэтому D_i^* – максимальный, а D_{*i} – минимальный элементы при любом $X \subseteq Z^n, i \in N_m$.

2. Пусть S_i, $i \in N_m$, заданы поэлементными ограничениями на матрицы D_i $D_i = \{\{d_{kj}\} : \underline{d}_{kj} \leq d_{kj} \leq \overline{d}_{kj}, k, j \in N_n\}$, где матрицы $\underline{D}_i = \{\underline{d}_{kj}\}$ и $\overline{D}_i = \{\overline{d_{kj}}\}$ известны и неотрицательно определены $\forall D_i \in S_i$. Если X содержит только неотрицательные элементы, то $(\overline{D}_i, \overline{q}_i, \overline{b}_i)$ – максимальный, а $(\underline{D}_i, \underline{q}_i, \underline{b}_i)$ – минимальный элементы, так как при любом $x \geq 0$ $f(x, \overline{D}_i, \overline{q}_i, \overline{b}_i) \geq f(x, D_i, q_i, b_i)$ и $f_i(x, \underline{D}_i, \underline{q}_i, \underline{b}_i) \leq f_i(x, D_i, q_i, b_i)$ $\forall (D_i, q_i, b_i) \in S_i$.

Заметим, что множества S_i, определенные таким образом, возникают, например, при оценивании элементов неизвестной ковариационной матрицы D_0 по эмпирическим данным с помощью доверительных интервалов.

Поскольку каждая матрица $D_i \succeq 0$, $i \in N_m$, неотрицательно определена, то для решения задачи (2) можно применить предложенные в [2] декомпозиционные методы, согласно которым решение этой задачи сводится к последовательному решению задач целочисленной оптимизации с линейными ограничениями, а также задач линейного программирования. В этой работе данный подход развивается для решения задачи (3), допустимая область которой представляет собой бъединение выпуклых множеств и, следовательно, может быть невыпуклой.

Для некоторого $x^j \in Z^n$, $j = 1,2,...$, рассмотрим задачу *МР* следующего вида:

$$\max x_0, \tag{6}$$

при условиях

$$x_0 \leq \max_{j \in N_k} \left\langle c^j, x \right\rangle, \; c^j \in C, \; k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$\min_{(D_i, q_i, b_i) \in S_i} \; \max_{j \in N_l} \left(f_i^j(x^j) + \left\langle \nabla f_i^j\left(x^j\right), x - x^j \right\rangle \right) \leq 0, \; f_i^j \in F_i, \; i \in I \subset N_m, \; l = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$x \in Z^n, \tag{9}$$

где $\nabla f_i^j\left(x^j\right)$ – градиент функции $f_i^j\left(x\right)$ в точке x^j.

Определим множества $Q_i = \{x \in R^n \mid \exists (D_i, q_i, b_i) \in S_i : \langle D_i x, x\rangle + \langle q_i, x\rangle + b_i \leq 0\}$, $i \in N_m$. $X_2 = \bigcap_{i \in N_m} Q_i$. Будем предполагать, что множество X_2 ограниченное.

Назовём величину $r_i(x) = \min\{\langle D_i x, x\rangle + \langle q_i, x\rangle + b_i \leq 0 \mid (D_i, q_i, b_i) \in S_i\}$, $i \in N_m$, отклонением точки $x \in Z^n$ от границы множества Q_i, а величину $r(x) = \max\{r_i(x) \mid i \in I\}$

– отклонением точки $x \in Z^n$ от границы множества X_2. Множества, описываемые ограничениями вида (7), (8), представим соответственно в виде множеств S^k и P^l.

Теорема 1. Допустимое (оптимальное) решение (x_0, x) задачи *MP* является допустимым (оптимальным) решением задачи (3), где x_0 – значение целевой функции, x – решение этой задачи, тогда и только тогда, когда $r(x) \le 0$ и ($x_0 \le \max\{\langle c, x\rangle : c \in C\}$) $x_0 = \max\{\langle c, x\rangle : c \in C\}$.

Доказательство. Допустимое решение задачи *MP* является допустимым решением задачи (3) тогда и только тогда, когда $r(x) \le 0$ и $x_0 \le \max\{\langle c, x\rangle : c \in C\}$. Необходимость этого утверждения очевидна. Достаточность следует из построения задачи *MP* и определения $r(x)$. Учитывая, что задача *MP* при выполнении условий теоремы 1 эквивалентна задаче (3), доказывается справедливость этого утверждения относительно оптимального решения.

Следуя работе [2] и используя предложенные автором декомпозиционные методы, задача (3) сводится к последовательному решению задач частично целочисленной оптимизации вида *MP* с линеаризованными ограничениями, а также задач линейного программирования вида $\max\left\{\left\langle c, x^j\right\rangle | \, c \in C\right\}$.

Основная идея предложенного алгоритма состоит в следующем. Если решение (x_0, x) является недопустимым в задаче (3), т.е. $r(x) > 0$, то оно исключается из последующего рассмотрения добавлением линейного ограничения к ограничениям задачи *MP*. Это ограничение обладает таким свойством, что отсекает недопустимое решение, а также часть недопустимой области задачи (3) из всех последующих рассмотрений. Все добавленные ограничения являются правильными отсекающими плоскостями, т.е. такими, которые не отсекают никакую часть допустимой области нелинейной задачи (3). Если согласно теореме 1 решение (x_0, x) оптимально для задачи *MP* и $r(x) \le 0$, $x_0 = \max\{\langle c, x\rangle : c \in C\}$, то найденное решение оптимально и для задачи (3).

Алгоритм

1. Выбираем $c^1 \in C$, пусть k, l = 1, $P^1 = \{x \in Z^n\}$, $S^1 = \{x_0, x\} | x_0 \le c^1 x,\ x_0 \in R^1,\ x \in Z^n\}$.

2. Решаем частично целочисленную оптимизационную задачу *MP*. Если она недопустима, то на основании того, что ограничения (8) являются релаксацией ограничений $\exists (D_i, q_i, b_i) \in S_i : \langle D_i x, x\rangle + \langle q_i, x\rangle + b_i \le 0$, $i \in N_m$, задачи (3) делаем вывод, что задача (3) также недопустима. Этот случай возможен лишь для k=1. Иначе получаем допустимое (оптимальное) решение (x_0^l, x^l) или информацию о том, что целевая функция не ограничена на допустимом множестве. Тогда в качестве координат вектора x^l выбираем достаточно большие числа.

3. Находим отклонение $r(x^l)$ от границы множества X_2. Если $r(x^l) \le 0$, то согласно теореме 1 (x_0^l, x^l) – допустимое (оптимальное) решение задачи (3). Переходим к п. 4, полагая (x_0^k, x^k) = (x_0^l, x^l). В противном случае находим элемент $f_i^l \in \bigcup_{i \in I} F_i$, для которого $r(x^l) > 0$, и включаем его в образование множества $P_i^{l+1}, i \in I$, по формуле (8). Заменяя l на $l+1$, переходим к п. 2.

4. Решаем задачу линейного программирования вида max $\{\langle c,x^k\rangle \mid c \in C\}$. Пусть c^{k+1} – найденное оптимальное решение.

5. Если $\langle c^{k+1},x^k\rangle \ge x_0^k$ ($\langle c^{k+1},x^k\rangle = x_0^k$), то алгоритм заканчивается. В соответствии с теоремой 1 заключаем, что (c^{k+1}, x^k) – приближенное (оптимальное) решение задачи (3) со значением x_0^k её целевой функции. Иначе, заменяя k на $k+1$, переходим к п. 2.

Замечание. При использовании этого алгоритма для получения оптимального решения задачи (3) требование к оптимальности решения задачи *MP* можно ослабить. Оптимальность требуется лишь на завершающем шаге. Промежуточные решения для построения новых отсекающих плоскостей должны быть только допустимыми решениями *MP* и недопустимыми в задаче (3), т.е. не принадлежать допустимой области X_2.

Теорема 2. Описанный алгоритм сходится к приближенному (оптимальному) решению за конечное число шагов, либо заканчивается на первом шаге с выводом о том, что задача (3) недопустима.

Далее даются критерии проверки решений на допустимость в задачах (2) и (3) при некоторых множествах неопределенности, описывающих данные задачи.

2. Задание множеств неопределенности. Простейшим типом такого множества является дискретное множество, заданное следующим образом:

$$S_a = \{(D,q,b) | (D,q,b) = (D_j,q_j,b_j),\ D_j \succeq 0,\ j = 1,\dots,k\}.$$

Гарантирующее ограничение $\langle Dx,x\rangle + \langle q,x\rangle + b \le 0$, для всех $(D,q,b) \in S_a$ эквивалентно k выпуклым квадратичным ограничениям

$$\langle D_j x,x\rangle + \langle q_j,x\rangle + b_j \le 0,\ \ j = 1,\dots,k. \qquad (10)$$

Множество, описываемое ограничением вида

$$\exists (D,q,b) \in S_a : \langle Dx,x\rangle + \langle q,x\rangle + b \le 0 \qquad (11)$$

в задаче (3), эквивалентно объединению множеств, описываемых этим ограничением при каждом $(D,q,b) \in S_a : \bigcup_{j=1}^{k} \langle D_j x,x\rangle + \langle q_j,x\rangle + b_j \le 0$, что равносильно выполнению неравенства

$$\min\{\langle D_j x,x\rangle + \langle q_j,x\rangle + b_j : (D_j,q_j,b_j) \in S_a\} \le 0. \qquad (12)$$

Дискретные множества неопределенности, как правило, используются, если возникает необходимость принимать решение, устойчивое (в задаче (2)) и оптимистическое (в задаче (3)) относительно нескольких сценариев – каждое значение (D_j, q_j, b_j) соответствует определенному сценарию.

Выпуклая оболочка дискретного множества неопределенности задается таким образом: $S_{a'} = \{(D,q,b) \mid (D,q,b) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(D_j,q_j,b_j),\ D_j \succeq 0,\ \lambda_j \geq 0, \forall\ j \in N_k,$
$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\}$.

Ограничение $\langle Dx, x\rangle + \langle q, x\rangle + b \leq 0 \quad \forall (D,q,b) \in S_{a'}$ эквивалентно следующему: $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \ \langle D_j x, x\rangle + \langle q_j, x\rangle + b_j \leq 0, \forall\ \lambda_j \geq 0,\ \ j \in N_k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, что в свою очередь эквивалентно множеству ограничений (10). Ограничения вида (11) в случае множества неопределенности $S_{a'}$ эквивалентны ограничениям (12).

Множества неопределенности S_a и $S_{a'}$ могут быть в дальнейшем расширены на следующее многогранное множество неопределенности:

$$S_b = \{(D,q,b) \mid (D,q,b) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(D_j,q_j,b_j),\ D_j \succeq 0, \forall\ j \in N_k,\ A\lambda = d,\ \lambda \geq 0\},$$

где $\{\lambda \in R^k \mid A\lambda = d,\ \lambda \geq 0\} \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение вектор $g \in R^k$, $g = (g_1, \ldots, g_k)$,
$g_j = \langle D_j x, x\rangle + \langle q_j, x\rangle + b_j,\ j \in N_k$.

Утверждение 1. Вектор $x \in Z^n$ удовлетворяет ограничению $\langle Dx, x\rangle + \langle q, x\rangle + b \leq 0$ для всех $(D,q,b) \in S_b$, если и только если существует вектор $u \in R^k$, такой, что удовлетворяет соотношениям $A^T u \geq g$, $\langle d, u\rangle \leq 0$.

Доказательство. Зафиксируем x. Тогда ограничение $\langle Dx, x\rangle + \langle q, x\rangle + b \leq 0$ для всех $(D,q,b) \in S_b$ эквивалентно ограничениям $\langle g, \lambda\rangle \leq 0\ \forall \lambda \geq 0$ такого, что $A\lambda = d$.
Согласно теории двойственности линейного программирования, последнее соотношения эквивалентно следующим: $\exists\ u$ такой, что $A^T u \geq g$, $\langle d, u\rangle \leq 0$.

Утверждение 2. Вектор $x \in Z^n$ удовлетворяет ограничению $\exists (D,q,b) \in S_b$: $\langle Dx, x\rangle + \langle q, x\rangle + b \leq 0$ для всех $(D, q, b) \in S_b$, если и только если

$$\langle d, u\rangle \leq 0\ \forall\ u \geq 0\text{: } A^T u \leq g. \tag{13}$$

Доказательство. Ограничение $\exists (D,q,b) \in S_b : \langle Dx, x\rangle + \langle q, x\rangle + b \leq 0$ при данном $x \in Z^n$ эквивалентно следующему: $\exists\ \lambda \geq 0$, $\lambda \in R^k$ такой, что удовлетворяет условиям $A\lambda = d, \langle g, \lambda \rangle \leq 0$. В соответствии с теорией двойственности линейного программирования эти соотношения эквивалентны соотношениям (13).

Некоторые множества неопределенности, описывающие исходные данные для задач вида (2) с непрерывными переменными, представлены в [9].

Заключение. Исследованы сложные задачи целочисленной оптимизации с неточно заданными коэффициентами линейной целевой функции и квадратичных функций ограничений. Рассмотрены некоторые классы множеств неопределенности, для которых такие задачи могут быть записаны как задачи с точно заданными данными. Построены и обоснованы точные и приближенные декомпозиционные методы нахождения гарантирующих и оптимистических решений указанных задач в условиях неопределенности в данных, основанные на конструктивных аппроксимациях их задачами более простой структуры.

Н.В. Семенова

ГАРАНТУЮЧІ ТА ОПТИМІСТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ОПУКЛИМИ КВАДРАТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОБМЕЖЕНЬ

Досліджено складні задачі цілочислової оптимізації з неточно заданими коефіцієнтами лінійної цільової функції й опуклих квадратичних функцій обмежень. Побудовано та обґрунтовано точні і наближені декомпозиційні методи знаходження гарантуючих і оптимістичних розв'язків таких задач. Розглянуто деякі класи множини невизначеності, що описують вхідні дані цих задач.

N.V. Semenova

GUARANTEEING AND OPTIMISTIC SOLUTIONS TO INTEGER OPTIMIZATION PROBLEMS WITH CONVEX QUADRATIC FUNCTIONS OF CONSTRAINTS

The paper studies complex integer optimization problems with inexact coefficients of linear objective function and convex quadratic function of constraints. Exact and approximate decomposition methods are developed and proved for search of guaranteeing and optimistic solutions to such problems. The paper proposes some classes of uncertainty sets that describe input data of such problems.

1. *Глушков В.М.* О системной оптимизации // Кибернетика.– 1980.– № 5.– С. 89 -– 90.
2. *Семенова Н.В.* О решении задач целочисленной оптимизации на выпуклых множествах в условиях неопределенности данных // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кибернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2005. – № 4.– С. 107–112.
3. *Сергієнко І.В.*, *Рощин В.О., Семенова Н.В.* Розв'язування задач неточного цілочисельного програмування // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988.– № 12.– С. 61– 64.
4. *Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В.* Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика.– 1989.–№ 2.–С. 42–46, 64.
5. *Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В.* Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1990. – **29**, № 5. – С. 786 – 791.

6. *Сергиенко И.В., Рощин В.А., Семенова Н.В.* Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 6. – С. 116–123.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471с.
8. *Kelley J.* The cutting plane method for solving convex program //SIAM J.–1960.– **8,** №4.– P.703–712.
9. *Goldfarb D., Iyengar G.* Robust convex quadratically constrained programs // Math. Program.– 2003.– N 3.– P. 135–141.

Получено 15 .06.2006