Теорія оптимальних рішень

УДК 519.21

Л.Б. ВОВК, А.П. КНОПОВ

ОБ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Анализируется стационарная модель управления запасами некоторого хранилища бесконечной вместимости. Исследуются условия существования оптимальной стратегии и сходимости с вероятностью 1 итерационной процедуры для оценивания пороговой точки.

Введение. Рассматривается задача управления запасом склада бесконечной вместимости. Одной из наиболее важных проблем является нахождение условий, когда задача оптимального управления может быть сведена к некоторой задаче стохастического программирования, что дает возможность описать искомую оптимальную стратегию. В работе приведены условия, когда это возможно, и найден вид оптимальной стратегии.

Рассмотрим следующую задачу управления запасами некоторого хранилища бесконечной вместимости. Предположим, что в некоторый момент времени уровень запаса равен x. В момент проверки наличного уровня запаса принимается решение о его пополнении на величину $y-x$. Таким образом, стратегия заказа – выбрать величину $y=y(x)$. Между моментами проверок имеется спрос на товар, являющийся случайной величиной ν с функцией распределения $F(\nu)$. Качество функционирования системы определяется некоторыми функциями $r_i(x)$, $i=1,2,3...$, где $r_1(x)=cx$ – стоимость содержания товара в количестве x единиц, $r_2(x)$ – штраф за дефицит товара в количестве x единиц, $r_3(x)=K$ – стоимость заказа нового товара.

Рассмотрим функцию потерь

$$W(x,y,\nu)=cy+r_2(\nu-y)I_{[y<\nu]}+KI_{[x<y]},$$

где $I_{[z<s]}$ – индикатор события $[z<s]$.

Определим функцию риска следующим образом:

$$V(x,y) = M\left[W(x,y,\nu)\right] = cy + \int_{y^+}^{\infty} \phi(\nu - y)\, dF(\nu) + KI_{[x<y]},$$

где $\phi(x) = r_2(x) I_{[x>0]}$.

Будем говорить, что $y = y(x)$ – оптимальная стратегия, если $V(x, y(x)) = \inf_{y \ge x} V(x,y)$ для всех $x \ge 0$.

Если существует функция $y = y(x)$, такая, что $y(x) = SI_{[x<s]} + xI_{[x \ge s]}$ для некоторых констант $0 \le s \le S$, и $V(x, y(x)) = \min_{y \ge x} V(x,y)$ для всех $x \ge 0$, то будем говорить, что оптимальная стратегия является (s,S)-стратегией.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнены такие условия:

1) функция $\phi(z)$ монотонно не убывает и дифференцируема при $z > 0$;
2) $\phi(0) = 0$;
3) уравнение $\int_{y^+}^{\infty} \phi'(\nu - y)\, dF(\nu) = c$ имеет единственный корень.

Тогда существует $S > 0$, такое, что

а) при $0 < y < S$ функция $V(y,y)$ монотонно не возрастает;

б) если $c > 0$, то при $y > S$ функция $V(y,y)$ монотонно не убывает.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\int_{y^+}^{\infty} \phi(\nu - y)\, dF(\nu) = \psi(y).$$

Покажем, что функция $\psi(y)$ является монотонно невозрастающей. Для этого обозначим

$$\xi(x) = \begin{cases} \nu - x, & \nu > x, \\ 0, & \nu \le x. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{y^+}^{\infty} \phi(\nu - y)\, dF(\nu) = M\phi(\xi(y)).$$

Случайный процесс $\xi(x)$ является монотонно невозрастающим, а функция $\phi(z)$ – монотонно неубывающей, поскольку $M\phi(\xi(x))$ – монотонно невозрастающая функция.

Рассмотрим функцию $V(y,y)$, найдем ее производную и приравняем нулю:

$$V'(y,y)=c-\int_{y^+}^{\infty}\phi'(\nu-y)\,dF(\nu),\; V'(y,y)=0,$$

то есть $\int_{y^+}^{\infty}\phi'(\nu-y)\,dF(\nu)=c$.

Обозначим S единственный корень последнего уравнения.

Тогда

$$\inf_{y\ge 0}V(y,y)=\min_{y\ge 0}V(y,y)=V(S,S).$$

Очевидно, что при $y\le S$ функция $V(y,y)$ монотонно не возрастает, а при $y>S$ монотонно не убывает.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существуют $0\le s\le S$, такие, что (s,S)-стратегия является оптимальной.

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x>S$. Тогда $V(x,y)=V(y,y)+KI_{[x<y]}\ge V(x,x)+KI_{[x<y]}\ge V(x,x)$ для всех $y\ge x$.

Значит,

$$\inf_{y\ge x>S}V(x,y)=\min_{y\ge x>S}V(x,y)=V(x,x).$$

2. Пусть $0\le x<S$ и $V(0,0)<V(S,S)+K$. Тогда

$V(x,y)=V(y,y)+KI_{[x<y]}\ge V(S,S)+KI_{[x<y]}=V(S,S)+K\ge V(0,0)\ge V(x,x)$ для всех $y\ge x$.

Следовательно,

$$\inf_{y\ge x,0\le x\le S}V(x,y)=V(x,x).$$

3. Пусть $0\le x<S$ и $V(0,0)>V(S,S)+K$.

В силу леммы 1 $V(y,y)$ является монотонно невозрастающей и непрерывной справа для $0\le y\le S$. Поэтому существует точка $0<s\le S$, такая, что

$$V(s,s)=V(S,S)+K.$$

Значит, для $0\le x<s\le y\le S$

$V(0,0)\ge V(x,x)>V(s,s)=V(S,S)+K\ge V(y,y)\ge V(S,S)$.

Таким образом, имеем следующий результат:

1. Если $0\le x<s\le S$, то $V(x,S)=V(S,S)+K=V(s,s)<V(x,x)$, $V(x,y)=V(y,y)+K\ge V(S,S)+K=V(x,S)$ при $y>x$.

Следовательно, $\inf_{y\ge x,\,0\le x\le s}V(x,y)=\min_{y\ge x,\,0\le x\le s}V(x,y)=V(x,S)$.

2. Если $s\le x\le S$, то $V(x,y)=V(y,y)+K\ge V(S,S)+K=V(x,x)$ при $y>x$.

Значит, $\inf_{y\ge x,\,s\le x\le S}V(x,y)=\min_{y\ge x,\,s\le x\le S}V(x,y)=V(x,x)$.

Таким образом, оптимальная стратегия $y = y(x)$ имеет вид
$y(x) = SI_{[x<s]} + xI_{[x \geq s]}$.

Теорема доказана.

Относительно нахождения точек s и S можно отметить следующее: из леммы 1 следует, что точка S является единственной точкой минимума функции $V(y, y) = cy + M\varphi(\xi(y))$, или $V(y, y) = M\psi(\nu, y)$, где
$\psi(\nu, y) = cy + \varphi(\nu - y)I_{[y<\nu]}$.

Таким образом, нахождение точки $y \geq 0$, в которой достигается $\min V(y, y)$, – типичная задача стохастического программирования. Для ее решения можно воспользоваться, например, методами работы [1].

Точка s – решение уравнения $V(s,s) = V(S,S) + K$, для которого существует множество методов решения.

Выше рассмотрена модель управления запасами системы, находящейся в стационарном режиме, причем оптимизируются затраты за один период ее функционирования. Однако и в ситуации, когда рассматривается система, функционирующая в неограниченном временном интервале, и необходимо найти стратегию, минимизирующую средние затраты в единицу времени, задачу во многих случаях можно свести к стационарному случаю. Как следует из [2], в данном случае оптимальные стратегии часто также имеют пороговую структуру, и задача нахождения оптимальной стратегии сводится к задаче нахождения точки оптимума математического ожидания от некоторой функции по стационарному распределению $p(x, z)$, причем и подынтегральная функция, и сама вероятностная мера могут зависеть от параметра, по которому ищем оптимальное значение функционала. При этом предполагается, что функция стоимости

$$r(x, z) = \begin{cases} r_1(x), \ x \leq z, \\ r_2(x), \ x > z. \end{cases} \quad (1)$$

Для описанной пороговой стратегии с порогом z обозначим $P_z(\cdot)$ основную вероятностную меру на (Ω, F), которая управляет случайной эволюцией процесса состояния запаса $X = (X_n : n \in N)$. Таким образом, оптимальная стратегия для Марковской цепи X управляется $P_{x^*}(\cdot)$. Для $z \in A$ из эргодичности связанного процесса X следует, что предел

$$P(x, z) = \lim_{n \to \infty} P_z\{X_n < x\}, \ x \in X,$$

существует (см. [3]), и функция стоимости имеет вид

$$V(z) = \int_X r(x, z) dP(x, z), \ z \in A, \ x \in X.$$

Кратко остановимся на проблеме, связанной с нахождением функции распределения $P(x,z)$ или ее плотности $p(x,z)$. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть функция распределения требований F имеет строго положительную плотность. Тогда

1. Для порога $z \in [0,S]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_z\{X_n < x\} = \left(1+U(S-z)\right)^{-1} \int\limits_0^{S-z} dU(\tau)\ \left[1-F(S-x-\tau)\right] + 1 - F(S-x),\ x \le z,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{S-x < X_n < S\} = \frac{U(x)}{1+U(S-\tau)},\ 0 \le x \le S-z,$$

где $F^{\mu^*}(\cdot)$ – μ-свертка функции распределения $F(\cdot)$, а $U(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} F^{\mu^*}(x)$ – функция восстановления, связанная с $F(\cdot)$.

2. Для любого $z \in A$ существует строго положительная плотность

$$p(x,z) = \frac{\partial P(x,z)}{\partial x} > 0,\ x \in X.$$

3. Для любого $x \in X$ существует производная на A

$$\frac{\partial p(x,z)}{\partial z} =: p_z^{'}(x,z).$$

Доказательство следует из [3, с. 175–179].

Пример. Если требование $(\xi_n,\ n \in N)$ распределено экспоненциально с параметром μ, плотность

$$p(x,z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu(z-x)}\mu}{1+\mu(S-z)}, & x \le z, \\ \dfrac{\mu}{1+\mu(S-z)}, & z < x < S. \end{cases}$$

Используя функции стоимости вида (1), получаем

$$\tilde{V}(z) = \int\limits_0^z r_1(x)\, p(x,z)\, dx + \int\limits_z^S r_2(x)\, p'(x,z)\, dx.$$

Можно показать, что существует $\tilde{V}'(z)$, и несложно найти ее явный вид.

Поскольку предельная функция распределения $P(x,z)$ ограничена и зависит от z, а функция $r(x,z)$ не является непрерывной, задача точки нахождения минимума функции $\tilde{V}(z)$ значительно усложняется.

Учитывая, что $\tilde{V}(z) = Er(\xi, z)$, где ξ – случайная переменная с функцией распределения $P(\cdot, z)$, для нахождения оптимальной точки x^* функции $\tilde{V}(x)$ можно использовать методы стохастического программирования. Далее опишем алгоритм, основанный на прямых методах стохастической оптимизации.

Определим итерационную процедуру для оценки пороговой точки x^*. Для $x \in R$ и $X = [0,\ S]$ обозначим

$$\Pi_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le S, \\ S, & x > S. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда, начиная с любой X-значной случайной переменной $z^{(0)}$ с $E\left[\left|z^{(0)}\right|^2\right] < \infty$, вычисляем

$$z^{(s+1)} = \Pi_X\left(z^{(s)} - \rho_s \xi^{(s)}\right),\ s = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

где $\xi^{(s)}$ – статистическая оценка производной $\tilde{V}'(z)$ в точке $z^{(s)}$, и веса (ρ_s) удовлетворяют условиям

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty. \tag{4}$$

Для доказательства состоятельности оценки $\left(\xi^{(s)}\right)$ должны удовлетворять условию

$$E\left[\xi^{(s)} \mid \sigma_{z^{(s)}}\right] = \tilde{V}'\left(z^{(s)}\right),$$

где $\sigma_{z^{(s)}}$ – σ-алгебра, генерируемся случайными переменными $z^{(1)}, \ldots, z^{(s)}$.

Следующее утверждение следует из [1] и гарантирует сильную состоятельность итерационного процесса $\left(z^{(s)}\right)$.

Теорема 2. Если условия (2)–(4) выполнены, то

$$P\left\{\lim_{x \to \infty}\left|z^{(s)} - x\right| = 0\right\} = 1,$$

где x^* – точка минимума функции $\tilde{V}(z)$.

Заключение. Таким образом, сложная задача нахождения оптимальной стратегии для вышеописанной модели управления запасами сведена к решению задачи нахождения оптимума некоторой функции методом стохастического программирования.

Л.Б. Вовк, О.П. Кнопов

ПРО ОДНУ СТАЦІОНАРНУ МОДЕЛЬ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Аналізується стаціонарна модель керування запасами деякого сховища нескінченної місткості. Досліджуються умови існування оптимальної стратегії та збіжності з імовірністю 1 ітераційної процедури для оцінювання порогової точки.

L.B. Vovk, O.P. Knopov

ON ONE STATIONARY INVENTORY CONTROL MODEL

The stationary inventory control model for some storehouse of infinite capacity is analyzed. Optimal strategy existence conditions and iteration procedure for threshold point estimation convergence with probability 1 are investigated.

1. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
2. *Дадуна Г., Кнопов П.С., Тур Л.П.* Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 4. – С. 106–123.
3. *Prabhu N.U.* Queues and inventories. – New York: Wiley, 1965. – 275 p.

Получено 25.03.2008