УДК 519.8

Г.А. ДОНЕЦ, И.Э. ШУЛИНОК

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ НАТУРАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФОВ С ТРЕМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Рассматриваются натуральные арифметические графы с тремя образующими. Доказывается, что хроматическое число этих графов равно трем.

Рассмотрим произвольный натуральный арифметический граф (NA-граф) $G = (X, Y)$ с тремя образующими $U = (u_1, u_2, u_3)$, где $1 < u_1 < u_2 < u_3$. Для определения хроматического числа (не меньше двух) таких произвольных графов висячие вершины не играют никакой роли, так как их всегда можно раскрасить цветом, который отличается от цвета соседней вершины. Поэтому путем удаления таких вершин вместе с инцидентными ребрами всегда можно добиться того, что вопрос о хроматическом числе произвольных графов решался для графов, степень вершин которых не меньше двух.

Лемма 1. Хроматическое число n-вершинного NA-графа с произвольными образующими $U = (u_1, u_2, u_3)$ равно хроматическому числу NA-графа с теми же (или двойственными к ним) образующими с числом вершин $n' = u_2 - 1$.

Доказательство. Пусть NA-граф состоит из произвольного числа вершин. Оно должно быть не меньше $u_1 - 1$, иначе тогда первая образующая будет излишней. Если в исходном графе $u_2 > n + 1$, то с помощью преобразований $u_i' = 2n + 2 - u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ переходим к двойственным образующим u_i', у которых $u_2' \le n + 1$. Таким образом, не нарушая общности, считаем, что в исходном NA-графе $u_2 \le n + 1$. В этом случае все вершины с номерами, большими чем $u_2 - 1$, инцидентны ребрам, которые соответствуют только одной образующей u_3, поэтому имеют степень 1. Как указывалось выше, их можно удалять, не изменяя хроматического числа исходного графа. В результате и получим в остатке $n' = u_2 - 1$ вершин.

Будем называть такие NA-графы с тремя образующими нормированными графами. В дальнейшем, если потребуется, на рисунках ребра графов, соответствующие образующей u_1, будем изображать тонкой линией, образующей u_2 – жирной линией и образующей u_3 – двойной линией. Поскольку хроматическое число каждой компоненты графа не зависит от других компонент, будем рассматривать только связные графы. О связности NA-графов с тремя образующими можно судить из [1].

Лемма 2. Число компонент связности нормированного NA-графа с тремя образующими $U = (u_1, u_2, u_3)$ равно числу решений сравнения

$$i + j \equiv u_1 \pmod r, \tag{1}$$

где $r = НОД\,(u_3 - u_2,\ u_2 - u_1)$.

По формуле (1) получается, что если $r = 1$, то граф связен, так как тогда $u_1 \equiv 0 \pmod 1$, и решением (1) является единственная пара $(0,\ 0) \pmod r$, а если $r = 2$, то граф связен только для $u_1 \equiv 1 \pmod 2$ с единственным решением $(0,\ 1)$. Если $u_1 \equiv 0 \pmod 2$, то (1) имеет два решения $(0,\ 0)$ и $(1,\ 1)$, тогда граф будет несвязным. Действительно, в данном случае граф разбивается на два подграфа – с нечетными и с четными номерами вершин. Если какие-то две вершины из разных подграфов смежные, то тогда какое-то $u_i \equiv 1 \pmod 2$ $i \in \{1, 2, 3\}$, но это противоречит начальным условиям, так как из $u_1 \equiv 0 \pmod 2$, $u_3 - u_2 \equiv 0 \pmod 2$ и $u_2 - u_1 \equiv 0 \pmod 2$ следует $u_1 \equiv u_2 \equiv u_3 \equiv 0 \pmod 2$.

Рассмотрим всевозможные сочетания трех образующих с точки зрения их четности, или нечетности: 1) $u_i \equiv 1 \pmod 2$; 2) $u_i \equiv 0 \pmod 2$ $(i = 1, 2, 3)$; 3) только одна образующая равна $1 \pmod 2$; 4) две образующие равны $1 \pmod 2$. Для первого случая справедлива

Теорема 1. Хроматическое число нормированного NA-графа с тремя образующими $U = (u_1, u_2, u_3)$ для $u_i \equiv 1 \pmod 2$, $(i = 1, 2, 3)$ равно 2.

Доказательство. Графы с хроматическим числом 2 называются бихроматическими. По теореме Кёнига [2] такие графы не содержат циклов нечетной длины. Предположим противное, что в заданном графе существует цикл нечетной длины, который проходит через вершины с номерами $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x_1$ $(k \geq 1)$. Тогда для какой-то последовательности образующих $v_1, v_2, v_3, \ . \ . \ . \ , v_{2k+1}$, где $v_i \in U\,(i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , 2k+1)$ получаем

$$x_2 = v_1 - x_1\,;\; x_3 = v_2 - v_1 + x_1\,;\; . \;\; . \;\; .\,;\; x_{2k+1} = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} v_i + x_1\,, \qquad (2)$$

замыкая цикл, получаем $x_1 = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} v_i - x_1$. Отсюда $x_1 = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} v_i$.

Но сумма нечетного числа нечетных чисел является нечетным числом и не делится на 2. Следовательно, в графе нет циклов с нечетной длиной, что и требовалось доказать.

Следствие. В любой последовательности образующих, соответствующих ребрам, не может быть двух подряд одинаковых.

Действительно, если представить в доказательстве теоремы 1, что $v_1 = v_2$, то это приводит к $x_3 = x_1$, а это невозможно.

Лемма 3. Если $\sum_{i=1}^{3} u_i \equiv 0 \pmod 2$, то граф содержит единственный цикл длиною 3.

Из теоремы 1 и следствия видно, что любой цикл длиною 3 (треугольник) должен соответствовать трем разным образующим, тогда вершинам должны соответсвовать числа

$$x = \frac{\pm u_1 \pm u_2 \pm u_3}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя различные знаки (+ или –), получим 8 разных чисел. Но не все эти числа соответствуют вершинам нормированного графа. Необходимо, чтобы

$$1 \le x \le u_2 - 1. \qquad (4)$$

Прежде всего очевидно, что невозможно сочетание (–, –, –), так как не выполняется левое неравенство (4) или (+, +, +), тогда не выполняется правое неравенство (4). Если $u_3 \ge u_2 + u_1$, то тогда этой образующей не соответствует ни одно ребро. Следовательно, должно быть $u_3 < u_2 + 1$. В этом случае в формуле (3) не может быть двух знаков минус, иначе получается отрицательное число. Для каждого минуса получаем три значения, которые и определяют ровно три вершины искомого треугольника, поэтому треугольник единственный. Его вершины имеют координаты

$$x_1 = \frac{u_1 + u_2 - u_3}{2};\;\; x_2 = \frac{u_1 + u_3 - u_2}{2};\;\; x_3 = \frac{u_2 + u_3 - u_1}{2}. \qquad (5)$$

Например, у графа с образующими $U = (19, 22, 27)$, с числом вершин $n = u_2 - 1 = 21$ получаем треугольник с координатами $x_1 = 7, x_2 = 12$ и $x_3 = 15$. Здесь $x_1 + x_2 = u_1$, $x_1 + x_3 = u_2$ и $x_2 + x_3 = u_3$.

Теорема 2. Нормированный NA-граф с тремя четными образующими состоит из нескольких компонент, каждую из которых можно представить в виде нормированного NA-графа.

Доказательство. Так как $u_i \equiv 0 \pmod 2$ $(i=1,2,3)$, то найдется такое $r = НОД(u_3-u_2, u_2-u_1) \equiv 0 \pmod 2$. По этому определению $u_1 \equiv u_2 \equiv u_3 \pmod r$, и существуют такие числа $0 \le a < b < c$ и $0 \le s < r$, что

$$u_1 = ar + s; \quad u_2 = br + s; \quad u_3 = cr + s; \quad s \equiv 0 \pmod 2. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) имеет $\frac{r}{2}+1$ решений, которые имеют вид

$$(1,\ s-1),\ (2,\ s-2),\ \dots,\left(\frac{s}{2},\ \frac{s}{2}\right),\ (s,\ r),\ (s+1,\ r-1),\ \dots,\ \left(\frac{r+s}{2},\ \frac{r+s}{2}\right). \tag{7}$$

Например, для графа с $U = (44,\ 68,\ 80)$ получаем $n=67$, $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $r = 12$, $s = 8$ и (7) представится так

$$(1,7),\ (2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (8,12),\ (9,11),\ (10,10). \tag{8}$$

Все множество (7) можно разбить на четыре группы, которые между собой различаются. Рассмотрим первую такую группу, которая представляется парами $(i,\ j)$, где $i < j,\ i \ne j,\ i < \frac{s}{2}$. В нашем примере это пары $(1,7), (2,6)$ и $(3,5)$. Каждая пара $(i,\ j)$ представляет подграф, который состоит из вершин только двух видов:

$$x_k \equiv i \pmod r = i + kr < u_2 \ \text{ и } \ y_k \equiv j \pmod r = j + lr < u_2\ ;\ (k,\ l \ge 0).$$

Произведем в каждом таком подграфе перенумерацию вершин:

$$x'_k = \frac{2(x_k - i)}{r} + 1\ ; \quad y'_k = \frac{2(y_k - j)}{r} + 2\,. \tag{9}$$

Благодаря этому все подграфы первой группы превратятся в один и тот же граф G'. Действительно, номера x_k, принимающие значения i, $i+r$, $i+2r,\ \dots,\ u_2 - r + i$, перейдут в номера $1,\ 3,\ 5,\ \dots,\ \frac{2(u_2-s)}{r}+1$. Аналогично y_k, принимающие номера $j,\ j+r,\ j+2r,\ \dots,\ u_2 - r + j$, перейдут в номера $2,\ 4,\ 6,\ \dots,\ \frac{2(u_2-s)}{r}+2$.

Таким образом в графе G' будет всегда четное число вершин, равное $\frac{2(u_2 - s)}{r} + 2 = 2(b + 1)$. Всякое сложение x'_k и y'_k дает определенную образующую, которую можно вычислить непосредственно:

$$x'_k + y'_k = \frac{2(x_k + y_k)}{r} - \frac{2(i + j)}{r} + 3.$$

Так как $x_k + y_k = u_\lambda$ $(\lambda = 1,2,3)$, а $i + j = s$, то получаем

$$u'_\lambda = \frac{2(u_\lambda - s)}{r} + 3 \quad (\lambda = 1,2,3).$$

Отсюда $u'_1 = 2a + 3$; $u'_2 = 2b + 3$; $u'_3 = 2c + 3$.

Поскольку все $u'_\lambda \equiv 1 \pmod 2$, то согласно теореме 1 граф G' имеет только четные циклы и его хроматическое число равно 2. На рис.1 показано, где из (8) реализованы пары $(1,7), (2,6)$ и $(3,5)$.

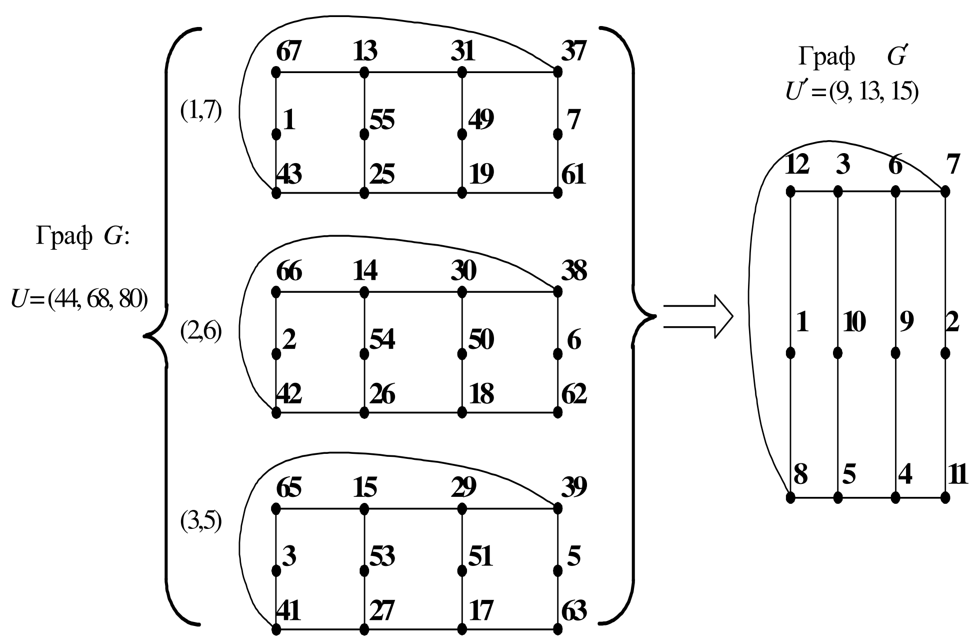

РИС. 1. Первая группа подграфов графа G

Рассмотрим строение подграфов, которые соответствуют в (7) парам $(s,\ r),\ (s+1,\ r-1),\ .\ .\ .,\ \left(\frac{r+s}{2}-1,\ \frac{r+s}{2}+1\right)$, т. е. парам $(i,\ j)$, где первый номер соответствует вершинам $x_k = i,\ i+r,\ \ldots,\ u_2 - r + j - s\left(\frac{r+s}{2}+1 \le\ j \le r\right)\ \ (k \ge 1)$.

Если подставить сюда $u_2 = br + s$, то в результате получаем, что каждый подграф содержит $2b$ вершин. Сделаем для каждого подграфа перекодировку вершин по формулам (9), при этом $1 \le k \le b$. В результате каждый подграф превратится в граф G', для которого получим образующие $u'_\lambda = x'_k + y'_k = \frac{2(x_k + y_k)}{r} - \frac{2(i+j)}{r} + 3$.

Так как $i + j = r + s$, то $u'_\lambda = \frac{2(u_\lambda - s)}{r} + 1,\quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3)$.

Отсюда $n' = 2b,\ u'_1 = 2a + 1,\ u'_2 = 2b + 1,\ u'_3 = 2c + 1$. Это нормированный NA-граф, у которого все образующие – нечетные числа, поэтому по теореме 1 его хроматическое число равно 2. Соответствующие преобразования для нашего примера показаны на рис. 2.

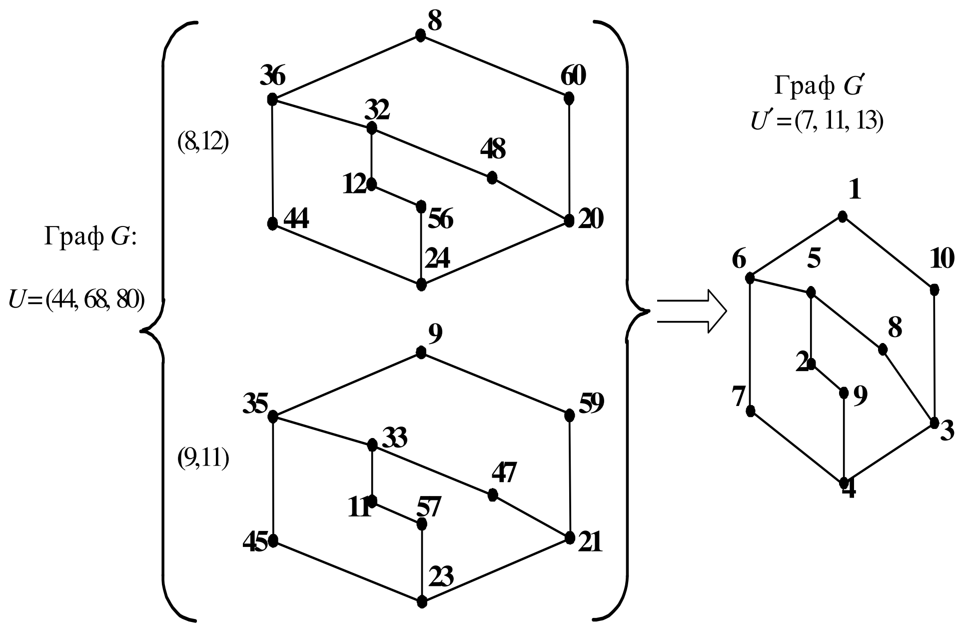

РИС. 2. Вторая группа подграфов графа G

Рассмотрим теперь подграф, который соответствует в (7) паре $\left(s/2; s/2\right)$. Этим числам в подграфе соответствует множество вершин графа G с кодами $\frac{s}{2}, \frac{s}{2}+r, \ldots, u_2-\frac{s}{2}$, т. е. $n' = \frac{u_2-s}{r}+1 = b+1$ вершин. Перекодируем их по правилу

$$x_i' = \frac{1}{r}\left(x_i - \frac{s}{2}\right) + 1, \; i = 1, 2, \ldots, b. \tag{10}$$

Найдем теперь образующие данного графа $u_k' = x_i' + x_j' = \frac{x_i + x_j}{r} + 2 - \frac{s}{r}$.

Так как $x_i + x_j = u_k$, то $u_k' = \frac{u_k - s}{r} + 2, \; (k = 1, 2, 3)$.

Окончательно получаем граф G' с параметрами $n' = b+1$, $u_1' = a+2$, $u_2' = b+2$, $u_3' = c+2$. Из определения r следует, что $НОД\left(u_3' - u_2', u_2' - u_1'\right) = НОД(c-b, b-a) = 1$. Поэтому граф G' связен и является нормированным NA-графом, у которого не все образующие равны $0 \pmod 2$.

Из множества решений (7) остался еще один тип подграфа, соответствующий паре $\left(\frac{s+r}{2}, \frac{s+r}{2}\right)$. Коды вершин этого подграфа образуют последовательность $\frac{r+s}{2}, \frac{3r+s}{2}, \ldots, \frac{(2b-1)r+s}{2}$, число которых равно b. Перекодируем вершины этого подграфа по правилу

$$x_i' = \frac{1}{r}\left(x_i - \frac{r+s}{2}\right) + 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, b), \tag{11}$$

отсюда выведем значения образующих

$$u_k' = x_i' + x_j' = \frac{1}{r}\left(x_i + x_j\right) - \frac{r+s}{r} + 2 = \frac{u_k - s}{r} + 1, \; (k = 1, 2, 3).$$

В результате получаем граф G' с параметрами $n' = b$, $u_1' = a+1$, $u_2' = b+1$, $u_3' = c+1$. Так же, как и выше, этот граф G' является связным нормированным NA-графом, у которого не все образующие равны $0 \pmod 2$. Преобразования для двух последних графов показаны на рис. 3.

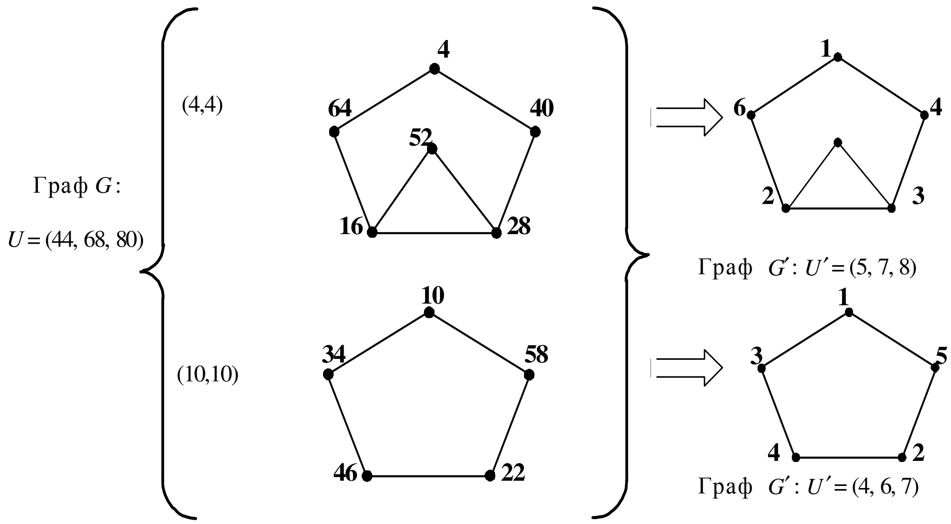

РИС. 3. Последние два подграфа графа G

Этим и завершается доказательство данной теоремы. Из рисунков 1–3 видно, что для нашего графа подтверждается справедливость леммы 3. На рис. 3 показан единственный треугольник исходного графа G.

Теорема 3. Хроматическое число NA-графов с тремя образующими равно 2 или 3.

Доказательство. Как следует из теоремы 2, все нормированные NA-графы с тремя образующими представляют собой набор компонент, из них либо некоторые, либо все имеют хроматическое число 2, а остальные сводятся к нормированным NA-графам, у которых не все $u_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ $(i = 1, 2, 3)$. Нам необходимо рассмотреть только такие графы и доказать, что их хроматическое число меньше 4. Если граф не содержит вершины со степенью больше 2, то его хроматическое число равно 2. Если он содержит вершины со степенью 3, то это возможно при условии, что код вершины $u_3 - n$ меньше кода вершины $u_1 - 1$, а для нормированного графа, учитывая значение $u_2 = n + 1$, это равносильно

$$u_1 + u_2 - u_3 \geq 2 . \qquad (12)$$

Если две из образующих нечетные, то по лемме 3 граф содержит единственную треугольную грань, одна из вершин которого имеет код $x = {(u_1 + u_2 - u_3)}/{2}$. Следовательно, хроматическое число таких графов не меньше 3. Если в нормированном NA-графе только одна из трех образующих нечетная и выполняется условие (12), то граф может содержать нечетные циклы длиной 5 и больше. Предположим, что при раскраске графа тремя красками одна из вершин (критическая) не может быть окрашена. Такая ситуация показана на рис. 4, где соседние к критической вершине $\boldsymbol{x}$ вершины окрашены в цвета α, β и γ. Выделим двухцветную компоненту графа $G_{\alpha\beta}$, в которую входят вершины x_1, x_2, x_3 и x_4.

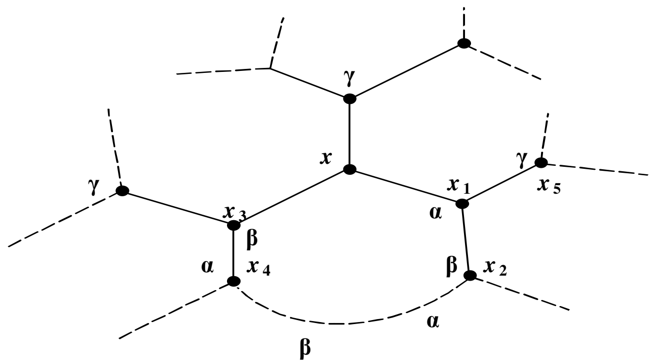

РИС. 4. Граф с критической вершиной x

Если $G_{\alpha\beta}$ несвязен, то в компоненте, содержащей вершину x_1, поменяем местами цвета α и β, после чего вершина x_1 приобретет цвет β и $\boldsymbol{x}$ можно окрасить цветом α. Поэтому будем считать, что все двухцветные компоненты $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\gamma}$ и $G_{\beta\gamma}$ связны, и никакая перекраска не приведет к изменению ситуации на рис. 4. Возьмем любую двухцветную компоненту, к примеру, $G_{\alpha\beta}$ и рассмотрим в ней наименьший цикл, соединяющий вершины x_1 и x_3. Этот цикл единственный, так как при первом разветвлении можно его разорвать, окрасив точку разветвления в цвет γ. Очевидно, что вместе с вершиной $\boldsymbol{x}$ это будет цикл нечетной длины. Если в нем хотя бы одна вершина имеет степень 2, то окрашивая ее в цвет γ, мы добиваемся несвязности подграфа $G_{\alpha\beta}$, что позволит получить правильную раскраску вершины x. Поэтому будем считать, что все вершины цикла имеют степень 3 и окрашены в цвета α и β, а все вершины, смежные с циклом – в цвет γ. Если хотя-бы одна такая вершина окрашена в цвет α или β, то тогда соответствующую вершину цикла можно перекрасить в цвет γ и опять тем самым мы разорвем цикл подграфа $G_{\alpha\beta}$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда компонента $G_{\alpha\beta}$ представляет собой единственный цикл с вершинами степени 3, а все отходящие от цикла внешние вершины имеют цвет γ. Так как каждой образующей соответствует опредленное ребро и при этом одинаковые ребра не могут быть смежными, то это равносильно тому, что ребра графа правильно окрашены тремя цветами.

Лемма 4. Будь-какой цикл из пяти вершин содержит вершину степени 2.

Представим противоположное, что существует цикл из пяти вершин и все их степени равны 3 (рис. 5).

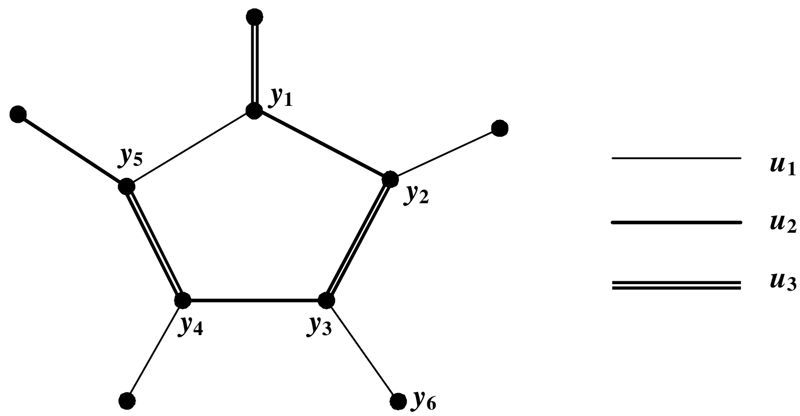

РИС. 5. Цикл из пяти вершин

Из рис. 5 следует $y_5 = u_1 - y_1$, $y_4 = u_3 - y_5 = u_3 - u_1 + y_1$, $y_3 = u_2 - y_4 = = u_2 - u_3 + u_1 - y_1$. С другой стороны, $y_2 = u_2 - y_1$, $y_3 = u_3 - y_2 = = u_3 - u_2 + y_1$, $y_6 = u_1 - y_3 = u_1 - u_3 + u_2 - y_1$. Отсюда следует равенство $y_3 = y_6$, что невозможно, поэтому вершина y_6 не существует и степень вершины y_3 равна 2. Представим теперь, что в графе все нечетные циклы имеют больше пяти вершин.

Лемма 5. В цикле нечетной длины, ребра которого правильно раскрашены тремя цветами 1, 2 и 3 всегда найдется последовательность из четырех ребер, крайние из которых раскрашены одинаково.

Доказательство. Для пяти вершин это следует из леммы 4. Пусть число вершин цикла больше пяти. Предположим противное, что такой последовательности не существует. Выделим все ребра цвета 3. Если между какими-то ближайшими из них лежат два ребра, то проблема решена. Путем стягивания двух соседних ребер добьемся, чтобы между ближайшими ребрами цвета 3 находилось больше двух других ребер, при этом четность длины цикла не изменится. В силу нечетности длины цикла найдется такое ребро цвета 3, которое имеет соседями ребра цвета 1 и 2. Если продолжить в лево и вправо последовательность, то получим цвета 1321 или 2312, что и требовалось доказать.

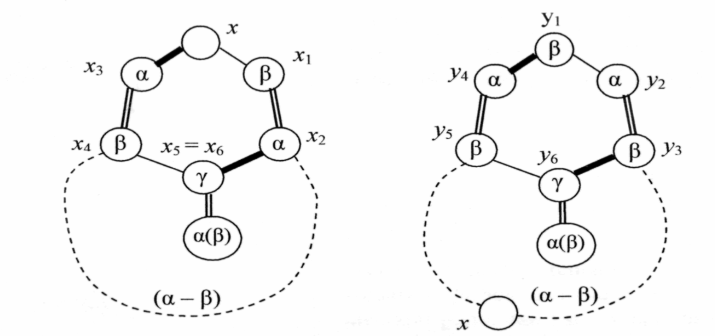

РИС. 6. Подграф $G_{\alpha\beta}$

Для доказательства теоремы 3 используем лемму 5, что дает нам 2 варианта рис. 6. В цикле нечетной длины больше пяти вершин находим четыре ребра, соответствующие образующим u_3, u_2, u_1, u_3. По построению, если вершина x в цикле из шести вершин, то $u_1 - u_3 + u_2 = x_5 = x_6 = u_2 - u_3 + u_1 - x$. Если нижняя вершина от x_5 имеет цвет $\alpha(\beta)$, то взаимно меняя цвета в вершинах $x_4(x_2)$ и $x_5(x_6)$, получим разрыв компоненты $G_{\alpha\beta}$. Если вершина x принадлежит оставшейся части цикла, то вершины y_3 и y_5 окрашены в один цвет и в зависимости от цвета нижней к y_6 вершине можно так перекрасить вршины y_3, y_5, y_6, что получим разрыв компоненты $G_{\alpha\beta}$. Это и завершает доказательство теоремы 3.

Г.П. Донець, І.Е. Шулінок

ПРО ХРОМАТИЧНЕ ЧИСЛО НАТУРАЛЬНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ГРАФІВ З ТРЬОМА ТВІРНИМИ

Розглядаються натуральні арифметичні графи з трьома твірними. Доводиться, що хроматичне число таких графів дорівнює трьом.

G.A. Donets,I.E. Shulinok

ABOUT CHROMATIC NUMBER OF NATURAL ARITHMETICAL GRAPHS WITH THREE GENERATRIXES

Natural arithmetical graphs with three generatrixes are considered. It is proved that the chromatic number of such kind graphs is three.

1. *Донец Г.А.* Необходимые и достаточные условия связности арифметических графов // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, 1989. – С. 19–24.
2. *Берж К.* Терия графов и ее применение. – М.: ИЛ, 1962. – 319 с.

Получено 11.04.2008