УДК 518.9

А.В. ЧИКРИЙ

О МНОГОКРАТНОЙ ПОИМКЕ УБЕГАЮЩЕГО

Рассматриваются процессы игрового взаимодействия группы преследователей и одного убегающего. Целью является многократная поимка убегающего Получены достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Введение. Для квазилинейных игровых задач с дискретным временем и группой преследователей в задаче многократной поимки получены достаточные условия завершения игры за конечное гарантированное время. При этом базовым является метод разрешающих функций [1].

Движение конфликтно управляемого объекта $z = u\left(z_1, ..., z_\nu\right)$ в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается системой квазилинейных разностных уравнений

$$z_i(t+1) = A_i(t) z_i(t) + \varphi_i(t, u_i(t), v(t)),$$

$$t = t_0,\ t_0+1, ...,\ \ z_i(t) \in R^{n_i},\ \ i = 1, ..., \nu, \quad (1)$$

где t – номер шага, $t_0 \geq 0$, $A_i(t)$ – квадратные матрицы порядка n_i с ограниченными элементами, $\varphi_i(t, u_i, v)$ – ограниченные по t и непрерывные по u_i, v вектор-функции, $U_i(t)$ и $V(t)$ – непустые компакты при каждом $t \geq t_0$, $i = 1, 2, ..., \nu.$.

Терминальное множество состоит из множеств $M_1^*, ..., M_\nu^*$, каждое из которых имеет вид $M_i^* = M_i^0 + M_i$, где M_i^0 – линейные подпространства из R^{n_i}, а M_i – выпуклые компакты, принадлежащие ортогональным дополнениям L_i к M_i^0 в пространстве R^{n_i}.

Считаем, что преследователю известно мгновенное значение управления убегающего в момент t вместе с его предысторией и начальное состояние $z^0 = (z_1^0, ..., z_\nu^0)$, т. е.

$$u_i(t) = u_i(z_i^0, v_t(\cdot)), \quad v_t(\cdot) = \{v(s),\ s = t_0, ..., t\}. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу преследования группой объектов (1). При этом, если траектория $z_i(t)$ выходит на множество M_i^*, то выигрыш преследователей составляет $q_i \ge 0$. Выход на множества M_j^*, $j \ne i$, в последующие моменты траектории $z_j(t)$ добавляет в копилку преследователей выигрыш q_j. Для окончания игры (1) суммарный выигрыш преследователей должен быть не меньше некоторой фиксированной величины $Q \ge 0$. Подобные задачи рассматривались в [1, 2].

Будем считать, что дискретная игра (1) может быть закончена из начального положения $z_0 = (z_1^0, ..., z_\nu^0)$ за время, $T - t_0$, $T = T(z_0)$, если существует отображение, ставящее в соответствие $(z_0, v_t(\cdot))$ функции $u_i(t) = u_i(z_0, v_t(\cdot)) \in U_i(t)$ такие, что сумма коэффициентов q_i, соответствующих траекториям $z_i(t)$, которые попадают на терминальные множества M_i^* не позже, чем в момент времени T, должна быть не меньше Q при любых управлениях $v(t) = v(t, z^0) \in V(t)$, $t = t_0$, $t_0 + 1, ..., T - 1$.

Пусть π_i – операторы ортогонального проектирования из R^{n_i} на L_i, $i = 1, ..., \nu$.

Тогда

$$F_i(t,k,U_i(k),v) = \pi_i \Phi_i(t,k+1)\varphi_i(k,U_i(k),v),$$

где $k = t_0, ..., t-1$, $t = t_0 + 1, ...$, $\Phi_i(t,k) = \mathrm{A}_i(t-1)\ \ldots\ \mathrm{A}_i(k)$, $\mathrm{A}_i(t,t)$ – единичная матрица порядка n_i, $i = 1, ..., \nu$.

$$F_i(t,k) = \bigcap_{v \in V(k)} F_i(t,k,U_i(k),v).$$

Условие 1 [3]. Множества значений многозначных отображений $F_i(t,k)$ – непусты для всех t,k, $t > t_0$, $t_0 \le k \le t-1$, $i = 1, ..., \nu$.

Рассмотрим функции $f_i(t,k)$ такие, что $f_i(t,k) \in F_i(t,k)$ для всех $t > t_0$, $t_0 \le k \le t-1$, и обозначим

$$\xi_i(t,t_0,z_i^0) = \pi_i \Phi_i(t,t_0) z_i^0 + \sum_{k=t_0}^{t-1} f_i(t,k),\ i = 1, ..., \nu.$$

Образуем многозначные отображения

$$P_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k)) = \{\rho_i \ge 0 : \rho_i(M_i - \xi_i(t,t_0,z_i^0)) \cap$$
$$\cap \{F_i(t,k,U_i(k),v(k)) - f_i(t,k)\} \ne \varnothing\},$$
$$\xi_i(t,t_0,z_i^0) \notin M_i,\ i = 1, ..., \nu. \qquad (3)$$

Условие 2. Множества значений многозначных отображений $P_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k))$ – выпуклы при любых $t>t_0$, $t_0 \le k \le t-1$, $v(k)\in V(k)$, $i=1,...,\nu$.

Введем функции

$$\rho_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k)) = \max\{\rho_i : \rho_i \in P_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k))\},$$

$$\rho_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k)) = (t-t_0)^{-1},\ \xi_i(t,t_0,z_i^0)\in M_i,$$

$$\rho_i(t,t_0,k,z_i^0,v(\cdot)) = \sum_{k=t_0}^{t-1}\rho_i(t,t_0,k,z_i^0,v(k)).$$

Пусть D_j – некоторое подмножество множества $I=\{1,...,\nu\}$, состоящее из разных элементов, $0<j\le 2^\nu$.

Обозначим

$$D(Q)=\{D_j : \sum_{i\in D_j} q_i \ge Q\}.$$

Рассмотрим функции

$$\mu(t,t_0,z^0) = 1-\inf_{v(\cdot)}\max_{D_j\in D(Q)}\min_{i\in D_j}\rho_i(t,t_0,z_i^0,v(\cdot)),$$

$$T=T(z^0)=\min\{t : \mu(t,t_0,z^0)\le 0\}.$$

Теорема 1. Пусть в игре (1) выполнены условия 1, 2 и существуют функции $f_i(t,k)$, $f_i(t,k)\in F_i(t,k)$, $i=1,...,\nu$, $t>t_0$, $t_0\le k\le t-1$ такие, что $T=T(z^0)<+\infty$.

Тогда игра может быть закончена из начального состояния z^0 за время $T(z^0)-t_0$.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)=(v(t_0),...,v(T-1))$ – произвольное управление убегающего. Рассмотрим функции

$$h(T,t,z_0,v(\cdot)) = 1-\max_{D_j\in D(Q)}\min_{i\in D_j}\sum_{k=t_0}^{t-1}\rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v),\tag{4}$$

$$h_i(T,t,z_0,v(\cdot)) = 1-\sum_{k=t_0}^{t-1}\rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)),\tag{5}$$

где i принадлежит множеству $\tilde{D}_j$, доставляющему максимум сумме в выражении (4). И пусть $\xi_i(T,t_0,z_i^0)\notin M_i$. При $t=t_0+1$, функции (4) и (5) равны единице. Так как $T=T(z_0)<+\infty$, то существует такой первый момент t_*, $t_0\le t_*\le T-1$, что $h(T,t_*+1,z^0,v(\cdot))\le +\infty$, а значит для любого $i\in\tilde{D}_j$ найдутся такие моменты времени t_i^*, $t_0\le t_i^*\le t_*\le T-1$, что $h_i(T,t_i^*-1,z_i^0,v(\cdot))\le 0$.

Тогда для k, $t_0\le k<t_i^*$ управления $u_i(k)$, $u_i(k)\in U_i(k)$, и функции $m_i(k)\in M_i$, $i\in\tilde{D}_j$ будем выбирать из системы уравнений

$$\pi_i \Phi_i(T,k+1)\varphi_i(k,u_i(k),v(k))) - f_i(T,k) =$$
$$= \rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k))(m_i(k) - \xi_i(T,t_0,z_i^0)). \quad (6)$$

Этот выбор возможен в силу условия 1.

Для t_i^* разрешающие функции $\rho_i(T,t_0,t_i^*,z_i^0,v(t_i^*))$ находим из условия

$$1 - \sum_{k=t_0}^{t_i^*} \rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)) = 0. \quad (7)$$

Это можем сделать в силу условия 2. Управления $u_i(t_i^*)$, $u_i(t_i^*) \in U_i(t_i^*)$ и $m_i(t_i^*) \in M_i$ для $i \in \tilde{D}_j$ выбираем из системы (6) с учетом (7). Для всех остальных $k = t_i^* + 1,...,T-1$ положим $\rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)) = 0$ и управления $u_i(k) = U_i(k)$ находим из полученной системы (6) с нулевой правой частью, которая разрешима в силу условия 1.

Если для некоторого $i \in \tilde{D}_j$ $\xi_i(T,t_0,z_i^0) \in M_i$, то управления $u_i(k) = U_i(k)$ найдем из соотношения (6), в котором положим $m_i(k) = \xi_i(T,t_0,z_i^0)$, а разрешающие функции $\rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)) = = 1/(T-t_0)$, $k = t_0,..., T-1$.

Прибавив и вычтя $\sum_{k=t_0}^{T-1} f_i(T,k)$, $i \in \tilde{D}_j$ из выражения $\pi_i z_i(T) = = \pi_i \Phi_i(T,t_0) z_i^0 + \sum_{k=t_0}^{\tau-1} \pi_i \Phi_i(T,k+1)\varphi_i(k,u_i(k),v(k))$, в силу (6) и (7) получаем

$$\pi_i z_i(T) = \xi_i(T,t_0,z_i^0) + (1 - \sum_{k=t_0}^{T-1} \rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k))) +$$
$$+ \sum_{k=t_0}^{T-1} \rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)) m_i(k).$$

Так как для всех $i \in \tilde{D}_j$ $h_i(T,T,z_i^0,v(\cdot)) = 0$, согласно способу выбора управлений, то

$$\pi_i z_i(T) = \sum_{k=t_0}^{T-1} \rho_i(T,t_0,k,z_i^0,v(k)) m_i(k), \ i \in \tilde{D}_j,$$

откуда из выпуклости множеств M_i получаем $\pi_i z_i(T) \in M_i$, для всех $i \in \tilde{D}_j$. Из принадлежности $\tilde{D}_j$ множеству $D(Q)$ следует $\sum_{i \in \tilde{D}} q_i \ge Q$.

Теорема доказана.

Г.В. Чикрій

ПРО БАГАТОКРАТНУ ПОЇМКУ ВТІКАЧА

Розглядаються конфліктно керовані процеси з групою переслідувачів і одним втікачем. Отримані достатні умови багатократної поїмки за скінченний гарантований час.

A.V. Chikrii

ON MULTIPLE CAPTURE OF THE EVADER

Conflict-controlled processes with group of pursuers and single evader are studied. Sufficient conditions for multiple capture in a finite quaranteed time are obtained.

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 198 с.
3. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.

Получено 31.03.2009