УДК 519.8

В.В. БОЙКО, Б.И. ГОЛЬДЕНГОРИН, В.Н. КУЗЬМЕНКО

ОБ ОЦЕНКАХ В ЗАДАЧЕ О *P*-МЕДИАНАХ

Для построения нижних оценок в задаче о p-медианах используется функция Хаммера – Береснева. Она строится на основании матрицы целевой функции с учетом p. Свойства функции Хаммера –Береснева позволяют использовать положительность коэффициентов и псевдобулевость для агрегирования данных и уменьшения размерности. Приводятся сравнительные результаты вычислительных экспериментов.

Введение. В настоящей работе излагается идея улучшения алгоритмов решения задачи о p-медианах за счет построения "хороших" оценок и демонстрируется применение этих оценок на ряде тестовых задач.

Задача о p-медианах является объектом исследования в [1, 2]. Разрабатываются новые подходы к решению, новые эвристики, сравниваются методы и их производительность.

Предлагаемый в настоящей работе подход основан на использовании функции Хаммера – Береснева [3, 4] для агрегирования данных в задаче, уменьшения ее размерности и применения идей псевдобулевского программирования. В результате получен алгоритм решения рассматриваемой задачи, использующий предложенные оценки и обладающий хорошей производительностью.

Вычислительные эксперименты на примерах, взятых из тестовых библиотек [5, 6], используемых для сравнения работы методов, показывают, что на определенных классах задач предложенные оценки позволяют быстро находить оптимальное решение в задаче о p-медианах.

Задача о p-медианах (ЗPM) в матричной постановке может быть сформулирована следующим образом. Задана матрица с неотрицательными коэффициентами. Столбцы будем ассоциировать с потребителями, коэффициенты в столбце будем понимать как стоимости прикрепления потребителя к производителям (строкам). Каждый потребитель должен быть прикреплен к одному производителю. Из всех производителей нужно выбрать p производителей так, чтобы стоимость прикрепления к ним потребителей была минимальна.

Формально ЗРМ записывается следующим образом

$$F^* = \min_{x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n, \qquad \sum_{i=1,...,m} y_i = p, \tag{2}$$

$$0 \le x_{ij} \le y_i,\ i = 1,...m,\ j = 1,...n, \qquad y_i \in \{0, 1\},\ i = 1,...,m. \tag{3}$$

Объем входной информации в задаче определяется количеством коэффициентов в целевой функции c_{ij}, в ограничениях, правыми частями ограничений, границами переменных и равен $5*n*m+2*n+2*m+1$. Количество ограничений $m*n+n+1$. Количество переменных $n*m+m$.

Функция Хаммера для ЗРМ. При фиксированных значениях переменных $y_i \in \{0, 1\}$ задача декомпозируется по j и легко решается по переменных x_{ij}, а именно, для каждого j только одна переменная $x_{i_j^* j}$ полагается равной 1, та, для которой $c_{i_j^* j} = \min_{i \in I_1}\{c_{ij}\}$, где $I_1 \in \{1,...,m\}$ – подмножество переменных y_i, зафиксированных на значении 1.

Операцию поиска минимальных значений $c_{i_j^* j}$ для различных подмножеств I_1 можно заменить операцией вычисления сумм, имеющих теже значения, если перейти от переменных y_i к их дополнениям $z_i = 1 - y_i$ и от матрицы с коэффициентами c_{ij} к матрице разностей $\Delta c_{kj} = c_{i_k^j j} - c_{i_{k-1}^j j}$ коэффициентов c_{ij}, упорядоченных по невозрастанию, для каждого j, где $k = 1,...,m$, i_k^j – k-й индекс i в упорядочивании строк для столбца j, $c_{i_k^j j}$ – соответствующий коэффициент, $i_0^j = 0,\ c_{0j} = 0$. Тогда $c_{i_k^j j} = \Delta c_{1j} + \Delta c_{2j} + ... + \Delta c_{kj}$.

Рассмотрим функцию $f_j(z) = \sum_{t=1}^{m} \Delta c_{tj} z_{i_0^j} z_{i_1^j} ... z_{i_{t-1}^j}$, где $z_{i_0^j} = z_0 \equiv 1$. Пусть для некоторого I_1 $c_{i_j^* j} = c_{i_s^j j}$. Это значит, что $y_{i_t} = 0,\ z_{i_t} = 1$ для $1 \le t < s$, а $y_{i_s} = 1,\ z_{i_s} = 0$. Тогда $f_j(z) = \sum_{t=1}^{m} \Delta c_{tj} z_0 z_{i_1^j} ... z_{i_{t-1}^j} = \sum_{t=1}^{s} \Delta c_{tj} z_0 z_{i_1^j} ... z_{i_{t-1}^j} = \sum_{t=1}^{s} \Delta c_{tj} = c_{i_s^j j}$, т. е. $f_j(z) = c_{i_j^* j}$, где между множеством I_1 и вектором z есть взаимнооднозначное соответствие.

Функция Хаммера определяется так $F(z) = \sum_{j=1,...,n} f_j(z)$.

Теперь ЗРМ может быть записана как

$$F^* = \min_{z_i} \left\{ F(z) \,\middle|\, \sum_{i=1,...,m} z_i = m - p,\ z_i \in \{0,\ 1\},\ i = 1,...,m,\ z_0 \equiv 1 \right\}. \qquad (4)$$

При $1 \le p \le m$ постановки задач (4) и (1)–(3) эквивалентны.

Объем входной информации в задаче (4) может быть значительно ниже, чем в задаче (1)–(3). В худшем случае, когда $p = 1$, все $\Delta c_{tj} > 0$ и все произведения переменных различны, объем оценивается так. Количество коэффициентов в целевой функции $n*(m-1)+1$, в ограничениях m, в правых частях и границах переменных $2*m+2$, что в сумме дает $n*m-n+3*m+3$. Количество ограничений 1. Количество переменных m.

При $p > 1$ все произведения переменных $z_0 z_{i_1^j} ... z_{i_t^j}$ для $t > m - p$ равны 0 в силу условий в (4), значит количество коэффициентов в целевой функции не более $n*(m-p)+1$. В реальных задачах оказывается, что много $\Delta c_{tj} = 0$, и есть совпадающие произведения, что приводит к сворачиванию нескольких коэффициентов в один. После сворачивания коэффициентов произведения вида $\Delta c_{tj} z_0 z_{i_1^j} ... z_{i_{t-1}^j}$ с $\Delta c_{tj} > 0$ будем называть термами.

Отрицательным моментом в представлении задачи в виде (4) есть нелинейность целевой функции, являющейся псевдобулевым полиномом.

Построение нижних оценок. Задача (4) является задачей псевдобулевого программирования. Для такого рода задач разрабатывались различные подходы [7], зависящие от особенностей функции.

В нашем случае функция имеет общий вид. Пусть в функции k термов и $k << n*m$. Построим для нее линейную оценку.

Обозначим I_r подмножество переменных z_i (без z_0), входящих в терм r. Для каждого терма введем переменную $x_r \ge 0$, которую ограничим снизу следующим образом: $\sum_{i \in I_r} z_i - |I_r| + 1 \le x_r$. Тогда $x_r \ge 1$, если все $z_i = 1,\ i \in I_r$, и $x_r \ge 0$, если хотя бы одна переменная $z_i = 0,\ i \in I_r$.

Задача ЗРМ через переменные x_r записывается так

$$F^* = \min_{z_i,\ x_r} \sum_{r=0,...,k} \Delta c_r x_r \qquad (5)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_r} z_i - |I_r| + 1 \le x_r, \ r = 1,...,k, \qquad \sum_{i=1,...,m} z_i = m - p, \tag{6}$$

$$x_r \ge 0, \ r = 1,...,k, \ x_0 \equiv 1, \qquad z_i \in \{0, 1\}, \ i = 1,...,m, \tag{7}$$

где терм $\Delta c_0 x_0$ – это свободный член равный сумме по j произведений $\Delta c_{1j} z_0$.

Получаем задачу, в которой количество коэффициентов в целевой функции равно $k+1$, в ограничениях $m + k + \sum_{r=1,...,k} |I_r|$, в правых частях и границах переменных $2*k+2*m+2$. Количество ограничений $k+1$. Количество переменных $m+k$.

Наиболее весомый вклад в объем информации дают коэффициенты в ограничениях. Их количество можно существенно уменьшить, если установить на множестве термов частичный порядок по включению $|I_{r_1}| \sqsubset |I_{r_2}|$. Тогда если для двух термов r_1, r_2 выполняется включение, то ограничение (6) для x_{r_2}, может быть выражено через x_{r_1}, а именно: $x_{r_1} + \sum_{i \in I_{r_2}/I_{r_1}} z_i - |I_{r_2}/I_{r_1}| \le x_{r_2}$. Такой вид ограничения совпадает с разностью между ограничениями (6) для r_2, r_1, полученную с учетом того, что в оптимальном решении задачи (5)–(7) все x_r будут находиться на нижней границе, определяемой по (6) или (7). Для наибольшего упрощения ограничения для r_2 необходимо найти такое r_1, чтобы величина $|I_{r_2}/I_{r_1}|$ была минимальна. Как правило, в задачах почти для всех r_2 удается найти r_1, такое что $|I_{r_2}/I_{r_1}|$=1. Если такое свойство будет выполняться для всех термов, то количество коэффициентов в ограничениях задачи уменьшается до $m+k+2*k$.

В случае, если $|I_{r_2}/I_{r_1}|$>1, то можно попытаться минимизировать число коэффициентов в ограничении для терма r_2. А именно: ограничение (6) для x_{r_2} можно выразить через переменные разных термов предыдущих уровней, для которых выполняется условие $I_{r_2} = \bigcup_{t \in T} I_{r_t}$, где $T \subseteq \{1,...,k\}$ – подмножество термов. Если множество термов дополнить термами, состоящими из одной переменной, так, чтобы все переменные были представлены в виде термов, то ограничение для любого x_{r_2} можно представить в виде $\sum_{t \in T_{r_2}} x_{r_t} - |T_{r_2}| + 1 \le x_{r_2}$. Количество ненулевых коэффициентов в ограничении для x_{r_2} зависит от выбора множества термов T_{r_2}, удовлетворяющего указаному условию, и равно $|T_{r_2}|+1$.

Решение задачи (5)–(7) без требования целочисленности дает оценку снизу.

Пример. Пусть задана матрица C. Матрицу порядка элементов в столбцах обозначим П, матрицу разностей ΔC.

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 10 & 7 & 10 \\ 10 & 17 & 4 & 11 & 22 \\ 16 & 7 & 6 & 18 & 14 \\ 11 & 7 & 6 & 12 & 8 \end{vmatrix}, \quad \Pi = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta C = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Функция Хаммера $F(z) = [7+3z_1+1z_1z_2+5z_1z_2z_4] + [7+0z_3+8z_3z_4+2z_1z_3z_4] + [4+2z_2+0z_2z_3+4z_2z_3z_4] + [7+4z_1+1z_1z_2+6z_1z_2z_4] + [8+2z_4+4z_1z_4+8z_1z_3z_4] = 33 + 7z_1 + 2z_2 + 2z_4 + 2z_1z_2 + 8z_3z_4 + 4z_1z_4 + 11z_1z_2z_4 + 10z_1z_3z_4 + 4z_2z_3z_4$. (Переменная z_0 опущена).

Вводим переменные x, которые по смыслу задачи связаны с переменными z следующим образом: $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$, $x_4 = z_4$, $x_5 = z_1z_2$, $x_6 = z_3z_4$, $x_7 = z_1z_4$, $x_8 = z_1z_2z_4$, $x_9 = z_1z_3z_4$, $x_{10} = z_2z_3z_4$, но связь выражаем через линейные неравенства, сокращая x_0:

$$z_1 \le x_1,\ z_2 \le x_2,\ z_3 \le x_3,\ z_4 \le x_4,$$
$$x_1 + z_2 - 1 \le x_5,\ \ x_3 + z_4 - 1 \le x_6,\ \ x_1 + z_4 - 1 \le x_7,$$
$$x_5 + z_4 - 1 \le x_8,\ \ x_7 + z_3 - 1 \le x_9,\ \ x_6 + z_2 - 1 \le x_{10}.$$

Заметим, что существуют разные варианты такой системы, например, для x_8 можно использовать другое неравенство $x_7 + z_2 - 1 \le x_8$.

Результаты вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты проводились на тестовых задачах из библиотек [5, 6, 7].

В таблице приведено количество термов для разных p, а также оптимальное значение целевой функции и время решения с использованием предложенной оценки для задачи pmed40 из OR-Library [5]. Размерность задачи 900x900. Для решения целочисленной задачи использовалась программа Cplex 8.

ТАБЛИЦА

P	kTerm	Objective	Time, s	P	kTerm	Objective	Time, s
10	29905	10491	85.5	70	24883	5711	41.3
20	28143	8717	150.9	80	24503	5398	6.8
30	27109	7731	193.9	90	24164	5128	7.0
40	26372	7037	162.2	100	23851	4878	6.7
50	25813	6518	740.6	400	18725	1398	2.1
60	25304	6083	228.5	800	11781	100	0.7

Аналогичные результаты получены и для других задач, в которых размерность не превосходила 1500x1500. Для задач большей размерности аналогичные результаты получены при больших p (больших $n/2$). Но в целом при количестве термов от 500000 до 1000000 не все задачи могли быть решены, из-за нехватки оперативной памяти для программы Cplex. Задачи с количеством термов более 1000000 не решались с использованием предложенного подхода.

Заключение. В результате выполненной работы предложен новый подход для вычисления оценок в задаче о p-медианах. Подход реализован в виде алгоритма и проверен на тестовых задачах. На некоторых классах задач работоспособность алгоритма не уступает лучшим алгоритмам решения задач данного типа. Развитие работы будет направлено на построение алгоритмов решения других классов задач о p-медианах.

В.В. Бойко, Б.І. Гольденгорін, В.М. Кузьменко

ПРО ОЦІНКИ У ЗАДАЧІ ПРО *P*-МЕДІАНИ

Для побудови нижніх оцінок у задачі про p-медіани використовується функція Хаммера – Береснєва. Вона будується на основі матриці цільової функції з урахуванням p. Властивості функції Хаммера – Береснєва дозволяють використовувати додатність коефіцієнтів та псевдобулевість для агрегування даних і зменшення розмірності. Наводяться порівняльні результати обчислювальних експериментів.

V.V. Boyko, B.I. Goldengorin, V.M. Kuzmenko

ABOUT ESTIMATION IN *P*-MEDIAN PROBLEM

The paper considers lower bounds building for solving p-median problem. Authors use Hammer-Beresnev function as an objective while investigate properties of p-median problems and bounds building. This way permits use particularities of the function such as positive coefficients and pseudo Boolean property for data aggregation and decreasing problem size. The results of computational experiments are given.

1. *Mladenovic N.*, *Brimberg J.*, *Hansen P.*, *Moreno-Perez J.A.* The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches // European J. of Operational Research, 2007. – **179.** – P. 927 – 939.
2. *Avella P.*, *Sassano A.*, *Vasil'ev I.* Computational Study of Large-Scale p-Median Problems // Mathematical Programming, Ser. A, 2007. –**109** – P. 89 – 114.
3. *Hammer P.L.* Plant location – a pseudo-Boolean approach // Israel J. Technol., **6**. – 1968. P. 330–332.
4. *Береснев В.Л.* Об одной задаче математической теории стандартизации // Управляющие системы. – 1973. – № 11. – С. 43 – 54.
5. *OR-Library*. На сайте: http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html.
6. *TSP–library*. На сайте: http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/ TSPLIB95/.
7. *Briant O.*, *Naddef D.* The optimal diversity management problem // Operations Research 52(4), 2004. – P. 515 – 526.
8. *Boros E.*, *Hammer P.L.* Pseudo-Boolean optimization // Discrete Applied Mathematics, 2002. – **123.** – P. 155 – 225.