УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ТОЧНОСТИ ДВОЙСТВЕННЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается общая задача минимизации квадратичной функции на квадратичных ограничениях. Приведено достаточное условие точности двойственной лагранжевой оценки, предложенной Н.З. Шором, для данной задачи.

Рассмотрим общую постановку квадратичной задачи оптимизации:

$$f^* = \min f_0(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \le 0\,,\ i \in I^{LE}\,,\ f_i(x) = 0\,,\ i \in I^{EQ}\,, \tag{2}$$

где $f_i(x) = x^T K_i x + b_i^T x + c_i, i \in \{0\} \cup I^{LE} \cup I^{EQ}$ – произвольные квадратичные функции в пространстве $\Re^n$. С учетом того, что в общем случае задача (1)–(2) многоэкстремальна и относится к классу *NP*-трудных задач, становится актуальным нахождение оценок для данной задачи за "приемлемое" (полиномиальное) время и исследование их точности. В частности, для получения нижних оценок ψ^* оптимального значения целевой функции f^* задачи (1)–(2) ($\psi^* \le f^*$) академиком Н.З. Шором был предложен двойственный подход [1, 2], основанный на использовании функции Лагранжа:

$$\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \le f^*,$$

где

$$\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x,u)\,; \tag{3}$$

$L(x,u) = x^T K(u)x + b^T(u)x + c(u)$ – функция Лагранжа для задачи (1)–(2), в которой

$$K(u) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i\,, \qquad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\,,$$

$$c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\,,\ m = |\,I^{LE}\,| + |\,I^{EQ}\,|;$$

U^+ – область определения вектора множителей Лагранжа $u \in \Re^m$, учитывающая наличие ограничений в виде неравенств: $U^+ = \{u : u_i \geq 0, i \in I^{LE}\}$;

D – множество переменных $u \in \Re^m$, при которых матрица $K(u)$ положительно определена.

При $u \in D$ задача (3) строго выпукла (матрица $K(u)$ положительно определена, и, соответственно, невырождена), т.е. решив систему $L_x^{'}(x,u) = 0$, откуда $x(u) = -K^{-1}(u)b(u)/2$ (единственное решение не вырожденной системы), можно записать

$$\psi(u) = \frac{1}{4} b^T(u) K^{-1}(u) b(u) + c(u) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i\right)^T \left(K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i\right)^{-1} \left(b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i\right) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i\right). \quad (4)$$

Функция $\psi(u)$ вогнутая и непрерывно дифференцируемая в области D, а значит и в области определения $D \bigcap U^+$ (ее градиент вычисляется по формулам $\psi_{u_i}^{'} = f_i(x(u)), i = \overline{1,m}$).

Исследуем маргинальную функцию $\psi(u)$, предварительно переписав ее в следующем виде:

$$\psi(u) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left(\xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i)\right)^2 / \lambda_j(u) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i\right), \quad (5)$$

где $K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j(u) \xi_j(u) \xi_j^T(u)$ – представление квадратичной матрицы функции Лагранжа с помощью собственных чисел $\lambda_j(u)$ и собственных векторов $\xi_j(u)$ ($j = \overline{1,n}$).

Понятно, что оценка $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$ может достигаться либо внутри множества D, либо когда u стремится к границе положительной определенности $\bar{D} \cap D$. Определим для каждого $u \in \bar{D} \cap U^+$ ($\bar{D} \cap U^+$ – замыкание области определения двойственных переменных) множество $J(u) = \{ j \in \{1,...,n\} : \lambda_j(u) = \min\limits_{j=1,n} \lambda_j(u) = 0\}$ – множество индексов прямых переменных задачи, которые соответствуют граничным точкам множества $\bar{D}$ (т.е. индексы дробных членов в выражении (5), знаменатели которых при данном $u \in \bar{D} \cap U^+$ обращаются в ноль). Причем это множество может быть как пусто (если $u \in D$), так и состоять из одного или более членов (при $u \in \bar{D} \setminus D$ и в зависимости от числа кратности $\lambda_{\min}(u) = \min\limits_{j=1,n} \lambda_j(u) = 0$).

Рассмотрим возможные случаи, которые могут возникать в зависимости от свойств области определения двойственных переменных.

Случай 1. $\forall u \in \bar{D} \cap U^+ \ \exists j \in J(u)$ такое, что $\xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) \neq 0$.

В этом случае при стремлении к нулю знаменателей дробных членов в выражении (5) хотя бы один соответствующий числитель не стремится к нулю. Тогда $\psi(u) \to -\infty$ при $u \to \tilde{u}$ для всех $\tilde{u} \in \bar{D} \setminus D \cap U^+$ (для тех $\tilde{u}$, у которых $J(\tilde{u}) \neq \{\varnothing\}$), либо $\psi(u)$ принимает конечные значения при $u \in D$ (для u, у которых $J(u) = \{\varnothing\}$). То есть для вогнутой задачи $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$ достигается во внутренней точке области положительной определенности (так как в граничных точках области положительной определенности функция $\psi(u)$ стремится к $-\infty$). Но для данного случая справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [1]. Если $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$ достигается на множестве D, то $\psi^* = f^*$.

Таким образом, в случае 1 оценка является точной ($\psi^* = f^*$).

Случай 2. $\exists u \in \bar{D} \cap U^+ \ \forall j \in J(u) \ \ \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) = 0$.

В данном случае для всех дробных членов в выражении (5) при стремлении к нулю знаменателей соответствующие числители также стремятся к нулю.

Пусть существуют такие вектор $p \in \Re^n$ и положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \bar{D} \cap U^+ \ \ \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \neq 0. \tag{6}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которая соответствует исходной с возмущенной целевой функцией

$$f_\varepsilon^* = \min(f_0(x) + \varepsilon(p, x)) \tag{7}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0,\ i \in I^{LE},\ \ f_i(x) = 0,\ i \in I^{EQ}, \tag{8}$$

Для этой задачи маргинальная функция будет иметь вид

$$\psi_\varepsilon(u) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^T(u)(b_0 + \varepsilon p + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) \right)^2 / \lambda_j(u) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i \right).$$

Тогда в силу условия (6) имеем случай 1, т.е. $\psi_\varepsilon^* = f_\varepsilon^*$. Но $f^* \geq \psi^* \geq \psi_\varepsilon^* = f_\varepsilon^*$, поскольку при $u \in D$

$$\psi_\varepsilon(u) = \psi(u) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon \xi_j^T(u) p \right)^2 / \lambda_j(u) \leq \psi(u).$$

Поскольку $f_\varepsilon^* = f_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = f(x_\varepsilon^*) + \varepsilon(p, x_\varepsilon^*) \geq f^* + \varepsilon(p, x_\varepsilon^*)$, где x_ε^* – решение возмущенной задачи, то $\left|\varepsilon(p, x_\varepsilon^*)\right| \geq f^* - f_\varepsilon^* \geq f^* - \psi^*$, т.е. при $\varepsilon \to 0$ получаем $\psi^* = f^*$.

Таким образом доказано, что при $D \neq \{\varnothing\}$ условие (6) является достаточным для того, чтобы $\psi^* = f^*$ (в случае 1 вектор p равен, например, нулевому вектору).

Лемма 2. Если существуют такие вектор p и положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \bar{D} \cap U^+ \quad \exists j \in J(u) \quad \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i + \varepsilon p) \neq 0,$$

то $\psi^* = f^*$.

Приведем пример возможного практического применения леммы 2 на следующей задаче:

$$f^* = \max x^T x = -\min(-x^T x) \tag{9}$$

при ограничениях

$$x^T x + b_i^T x + c_i \leq 0, \; i = \overline{1, m}. \tag{10}$$

В данном случае

1) известны все собственные векторы матрицы функции Лагранжа – направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных;

2) собственные числа равны между собой: $\lambda_j = -1 + \sum_{i=1}^m u_i$, $j = \overline{1, n}$.

Для рассматриваемой задачи условие леммы 2 примет следующий вид:

$$\xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i + \varepsilon p) = (\sum_{i=1}^m u_i b_i + \varepsilon p)_j \neq 0, \; j = \overline{1, n},$$

т.е. все координаты вектора $\sum_{i=1}^m u_i b_i + \varepsilon p$ не могут одновременно обращаться в ноль при $u \in \bar{D} \setminus D \cap U^+ = \{u : -1 + \sum_{i=1}^m u_i = 0, u \geq 0\}$.

Очевидно, что когда

$$0 \notin \operatorname{int}(co\{b_i, i = 1, ..., m\}), \tag{11}$$

то при p, направленном внутрь области $co\{b_i, i = 1, ..., m\}$, $\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ условие леммы 2 выполняется и, следовательно, оценка точная. Отметим, что когда $0 \notin co\{b_i, i = 1, ..., m\}$, то условие справедливо даже при $p = 0$.

В противном случае, когда $0 \in \operatorname{int}(co\{b_i, i = 1, ..., m\})$, это не всегда так.

Например, в задаче

$$f^* = \min(-x^2)$$

при ограничениях

$$(x+2)^2 \le 25,$$
$$(x-5)^2 \le 9,$$

оценка $\psi^* = -10.42$ (достигается при $u^* = (0.7143, 0.2857)$, $x^* = 2.8289$) и $\psi^* \ne f^* = -9$.

Заметим, что полученный результат для задачи (9)–(10) перекликается с теоремой из работы [3], где данная задача сводилась к задаче

$$x^* = \arg\max\left\{\min_i\{-b_i^T x - c_i, i=1,...,m\} \mid x^T x + b_i^T x + c_i \le 0, i=1,...,m\right\}. \quad (12)$$

Теорема [3]. Для того, чтобы вектор x^* (решение задачи (12)) был решением задачи (9)–(10), необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin co\{b_i, i=1,...,m\}$.

Подобным образом лемму 2 можно применить и для исследования других случаев.

О.А. Березовський

ДОСТАТНЯ УМОВА ТОЧНОСТІ ДВОЇСТИХ ЛАГРАНЖЕВИХ ОЦІНОК
ДЛЯ КВАДРАТИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Розглядається загальна задача мінімізації квадратичної функції на квадратичних обмеженнях. Наведено достатню умову точності двоїстої лагранжевої оцінки, запропонованої Н.З. Шором, для даної задачі.

O.A. Berezovskyi

THE SUFFICIENT CONDITION FOR THE ACCURACY OF DUAL LAGRANGE BOUNDS IN QUADRATIC EXTREMAL PROBLEMS

The general problem of minimizing a quadratic function with quadratic constraints is considered. One proved the sufficient condition for the accuracy of dual Lagrange bound, which proposed by N.Z Shor, for this problem.

1. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
2. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Dordrecht, Kluwer, 1998. – 394 p.
3. *Ненахов Э.И.* Решение некоторых оптимизационных задач с квадратичными ограничениями // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2008. – №7. – С.80–87.

Получено 28.03.2011