УДК 519.8
УДК 519.8

Г.А. ШУЛИНОК, И.Э. ШУЛИНОК

ПОИСК ПУТЕЙ В ЧИСЛОВЫХ ГРАФАХ

Рассматриваются натуральные модульные графы. Исследуется проблема нахождения путей между вершинами произвольного натурального модульного графа. Показывается взаимосвязь с решением линейных диофантовых уравнений и предлагается метод решения произвольного линейного диофантова уравнения или обоснование его отсутствия.

Введение. В работе [1] была предпринята попытка провести исследование взаимосвязи между числовыми графами и диофантовыми уравнениями, и было показано, как решение уравнения с двумя переменными может быть сведено к задаче поиска пути в натуральном модульном графе (НМ-графе). Данная работа продолжает начатое исследование.

Рассмотрим связный натуральный модульный граф $G = NM_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, в котором n вершин и образующие которого $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Рассмотрим путь из вершины 1 в вершину $x \le n$. Этот путь состоит из последовательности вершин x_i графа G. По определению НМ-графа, каждая пара смежных вершин x_i, x_j соответствует условию $|x_i - x_j| = a_k \in U$. Поэтому имеет место такое равенство:

$$1 + (-1)^{b_1} a_{k_1} + (-1)^{b_2} a_{k_2} + \cdots + (-1)^{b_l} a_{k_l} = x.$$

Поскольку среди образующих $a_{k_i} \in U$, $i = 1, 2, \ldots, l$ есть повторения, то это равенство можно переписать в виде

$$1 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = x,$$

где $a_i \in U$, $x_i \in \mathrm{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в пути P_k из вершины 1 в вершину $x \le n$ назовем путем образующих.

Одним из способов найти путь из вершины 1 в любую другую вершину будет обход остового дерева связного НМ-графа. Такое дерево можно получить с помощью поиска в ширину.

Рассмотрим равенство $1+x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=x$. Преобразуем его таким образом $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=x-1.$ Поскольку $a_i\in U, x_i\in \mathrm{Z}, \quad i=1,2,\ldots,m$, то такое равенство будет диофантовым уравнением. Таким образом, имеет место следующее свойство.

Лемма 1. Связному натуральному модульному графу $G=NM_n\left(a_1,a_2,\ldots,a_m\right)$ можно поставить в соответствие семейство диофантовых уравнений $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=d$, где $0\le d<n.$

Доказательство. В самом деле, в связном натуральном модульном графе существует путь из любой вершины в любую другую. Таким образом, существует и путь из вершины 1 в любую другую вершину. Запишем путь из вершины 1 в вершину $1<y\le n.$ Имеем $1+y_1a_1+y_2a_2+\cdots+y_ma_m=y.$ Здесь числа y_i – количество использований образующей $a_i\in U, \quad i=1,2,\ldots,m$. Это число целое, а значит уравнение $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_my_m=y-1$ – диофантово, а набор чисел $(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ – решение данного уравнения. Получается, что каждому пути из вершины 1 в другую вершину графа соответствует решение соответствующего диофантового уравнения. При этом все пути, соединяющие вершины 1 и $1<y\le n$ будут решениями уравнения $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_my_m=y-1.$ Поскольку $0\le y-1<n,$ лемма доказана.

Существование пути в графе определяет необходимые и достаточные условия существования решения линейного диофантова уравнения. В самом деле, если в графе $G=NM_n\left(a_1,a_2,\ldots,a_m\right)$ нет пути, соединяющего вершины 1 и $y,$ то уравнение $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_my_m=y-1$ не будет иметь решения. В противном случае, решение привело бы к пути образующих, соединяющих эти вершины, что противоречит предположению об отсутствии пути.

Таким образом, представляет интерес построение метода решения линейных диофантовых уравнений как поиск пути в соответствующем натуральном модульном графе.

Определение 1. Линейным диофантовым уравнением

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=d \tag{1}$$

называется такое уравнение, что коэффициенты $a_1,a_2,\ldots,a_m\in \mathrm{Z}$, $x_1,x_2,\ldots,x_m\in \mathrm{Z}$, $d\in \mathrm{Z}.$

В работе [2] показано, как можно от уравнения (1) перейти к уравнению в целых неотрицательных коэффициентах. Там же указано как можно от уравнения (1) у которого есть несколько равных коэффициентов $a_i, 0<i\le m,$ перейти к эквивалентному ему уравнению с разными коэффициентами. Тем самым произвольное диофантово уравнение следует нормализовать, т. е. привести к виду, когда коэффициенты уравнения и свободный член будут целыми неотрицательными числами.

Определение 2. Нормальным линейным диофантовым уравнением назовем уравнение, полученное из (1), в котором $a_i' \geq 0, d' \geq 0, 0 < i \leq m'$. В этом уравнении $a_i < a_j, i < j, 0 < i, j \leq m'$. Такое уравнение будет иметь вид

$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + \cdots + a_{m'}' x_{m'} = d'. \tag{2}$$

Процесс получения уравнения (2) из уравнения (1) назовем нормализацией.

Поскольку уравнение (2) тоже будет диофантовым, то для упрощения записи будем пользоваться уравнением (1) как нормализованным. Сам процесс нормализации и процесс интерпретации решения будет приведен далее.

Очевидно, что когда граф G связен, то и соответствующее ему уравнение будет иметь решение. Условия связности произвольных натуральных модульных графов изложены в [3].

Рассмотрим нормализованное уравнение (1) и соответствующий ему НМ-граф $G = NM_n(a_1, a_2, ..., a_m)$. Исходя из леммы 1 $n > d$. Однако, исходя из необходимых и достаточных условий связности НМ-графа, вытекают следующие условия:

1. $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \leq (m-1)n + 1.$

2. Существует подмножество $U' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset U$ образующих графа, что $\text{НОД}(u_1, u_2, ..., u_k) = 1.$

3. $u_k \leq n - \text{НОД}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}) + 1.$

Рассмотрим пример.

На рис. 1 показан граф $G = NM_{11}(3,5,9)$. Данный граф связен, поскольку $U' = \{3, 5\}$, $k = 2$, $11 \times 2 + 1 = 23 > 17,$, 5 < 11. Так из вершины 1 в вершину 2 можно попасть несколькими способами. Например, по пути 1→6→11→2 или 1→4→7→2. Эти пути в виде последовательностей образующих имеют следующий вид: $1 + 2\text{Ч}5 - 9$ и $1 + 2\text{Ч}3 - 5$. Эти же пути можно записать так: $1 + 0 \times 3 + 2\text{Ч}5 - 1 \times 9 = 2$ и $1 + 2\text{Ч}3 - 1 \times 5 + 0 \times 9 = 2$. Получаются пути образующих $(0, 2, -1)$ и $(2, -1, 0)$. Данные пути будут решениями диофантова уравнения $3x + 5y + 9z = 1.$

В случае пути из вершины 1 в 5 получаем (0, – 1,1), (– 2, 2,0) и уравнение $3x + 5y + 9z = 4$. Всего же уравнений, для которых данный граф подходит, 11. Это $3x + 5y + 9z = 0$, $3x + 5y + 9z = 1$, $3x + 5y + 9z = 2$, $3x + 5y + 9z = 3$,, $3x + 5y + 9z = 4$, …, $3x + 5y + 9z = 10$. Если величина свободного члена превышает 10, то нужен другой граф с большим числом вершин.

Зафиксируем этот результат.

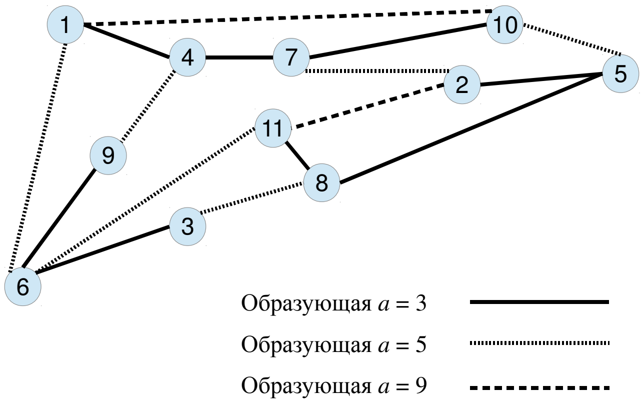

РИС. 1. Граф $G = NM_{11}(3,5,9)$

Лемма 2. Путь образующих из вершины 1 в вершину x на НМ-графе $G = NM_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ представляет собой решение диофантова уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = x - 1$. .

Доказательство. Пусть $(y_1, y_2, ..., y_m)$ – путь образующих из вершины 1 в вершину x. Тогда выполняется равенство $1 + a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m = x$. Отсюда имеем $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m = x - 1$.

Следствие. Путь образующих из вершины x в вершину y $(0 < x \le y \le n)$ совпадает с путем образующих из вершины 1 в вершину $y - x$.

В самом деле, путь из вершины x в вершину y соответствует набору образующих, обеспечивающих условие $x + a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m = y$. Отсюда $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m = y - x$. Исходя из леммы 2, получаем результат.

Теорема 1. Для заданного НМ-графа $G = NM_n(a_1, a_2, ..., a_m)$, $n > d$, решением диофантова уравнения (1) будет путь из вершины 1 в вершину $d + 1$, записанный в виде пути образующих.

Рассмотрим нормализованное линейное диофантово уравнение. Определим при каких условиях это уравнение будет иметь решения.

Исходя из теоремы 1, можно заключить, что уравнение имеет решение, если из вершины 1 в вершину $d + 1$ существует путь. В случае связного графа результат очевиден. То есть уравнение будет иметь решение, если соответствующий граф связен. Однако более интересным будет случай несвязных НМ-графов.

Для примера рассмотрим граф $G = NM_{10}(3,6,9)$. Как известно [4], данный граф распадается на три компоненты связности (рис. 2).

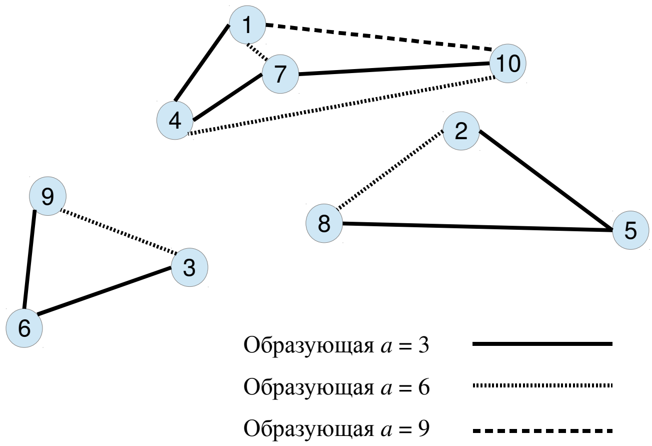

РИС. 2. Граф $G = NM_{10}(3,6,9)$

Для данного графа рассмотрим семейство нормализованных диофантовых уравнений $3x + 6y + 9z = d, 0 \le d < 10$. Очевидно, что из вершины 1 существуют пути в вершины 4, 7 и 10, что соответствует решениям (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1) для $d = 3$, $d = 6$ и $d = 9$ соответственно. Также можно построить пути (1, 1, 0) и $(-1,2,0)$ для $d = 9$, $(2,0,0)$ и $(-1,0,1)$ для $d = 6$, а также $(-2,0,1)$ и $(-1,1,0)$ для $d = 3$. При этом нет пути из вершины 1 в вершины 2, 3, 5, 6, 8 и 9. А есть ли решения для уравнений $3x + 6y + 9z = 1$, $3x + 6y + 9z = 2$, $3x + 6y + 9z = 4$, $3x + 6y + 9z = 5$, $3x + 6y + 9z = 7$ и $3x + 6y + 9z = 8$?

Легко показать, что эти уравнения не имеют решений. Тем самым подтверждается известное свойство для диофантовых уравнений с двумя неизвестными.

Лемма 3. Чтобы диофантово уравнение (1) имело решение, необходимо, чтобы НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \mid d$.

Таким образом, мы можем доказать следующее свойство.

Теорема 2. Нормализованное диофантово уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда существует путь из вершины 1 в вершину $d+1$ в графе $G = NM_n(a_1, a_2, ..., a_m)$, в котором $n > d$.

Определим процедуру поиска решения заданного диофантова уравнения.

Шаг 1. Нормализация. На этом этапе в диофантовом уравнении сводятся члены с одинаковыми коэффициентами. Исходя из [2], если в уравнении (1) есть пара одинаковых коэффициентов, например $a_i = a_j$, то в уравнении (1) производится замена переменных $x = x_i + x_j$. Подобным образом можно сделать и остальные изменения в уравнении.

Шаг 2. Построение соответствующего НМ-графа. На этом этапе строится натуральный модульный граф $G = NM_n(a_1, a_2, ..., a_m)$, где $n = \begin{cases} u_m + 1, d < u_m; \\ d + 1, d \ge u_m. \end{cases}$

Шаг 3. Определение существования решения. Решение будет существовать, если есть путь из вершины 1 в вершину $d+1$. Если позволяют образующие, выбирается такое n из условия $\sum_{i=1}^{m} a_i \le (m-1)n+1$.

Шаг 4. Нахождение подходящего решения с помощью поиска в ширину.

Заключение. Взаимосвязь между числовыми графами и диофантовыми уравнениями установлена достаточно давно. Однако до недавнего времени использование обратного анализа – т. е. числовых графов для решения диофантовых уравнений не производилось. И данная работа завершила исследование по диофантовым уравнениям и натуральным модульным графам.

Г.О. Шулінок, І.Е. Шулінок

ПОШУК ШЛЯХІВ У ЧИСЛОВИХ ГРАФАХ

Розглядаються натуральні модульні графи. Досліджується проблема знаходження шляхів між вершинами довільного натурального модульного графа. Показано взаємозв'язок між розв'язком лінійних діофантових рівнянь та пропонується метод розв'язку довільного лінійного діофантового рівняння чи обґрунтування нерозв'язності.

G.A. Shulinok, I.E. Shulinok

PATH SEARCHING IN NUMERICAL GRAPHS

Natural Modular Graphs are considered. A problem to find paths in such graphs is investigated. Interaction between natural modular graphs and linear Diophantine equations is shown. An approach to solve such equation or insolubility justification is proposed.

1. *Шулинок Г.А.* О поиске кратчайших путей в числовых графах // Теорія оптимальних рішень. – 2012. – С. 42–46.
2. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. – М.: Физматлит, 1961. – 88 с.
3. *Шулинок И.Э.* О связности и цикломатическом числе натуральных модульных графов // Теорія оптимальних рішень. – 1999. – С. 51–57.
4. *Шулінок Г.О.* Про ізоморфізм натуральних модульних графів // Теорія оптимальних рішень. – 2004. – С. 69 – 73.

Получено 19.03.2012