УДК 519.8

Л.А. СОБОЛЕНКО, С.Г. НЕНАХОВА, И.А. ШУБЕНКОВА

КОМБИНИРОВАННАЯ ШТРАФНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Для численного решения гладких задач условной оптимизации с нелинейными ограничениями в форме неравенств разработана общая схема аппроксимирующих методов последовательного квадратичного программирования на основе релаксации штрафной функции, содержащей гладкие и негладкие штрафы. С помощью этой схемы описаны методы негладких штрафов.

Введение. В 1970 г. в работе [1] академик Б.Н. Пшеничный предложил итерационный метод решения общей задачи математического программирования, состоящий в минимизации некоторой нелинейной целевой функции $f(x)$ с нелинейными ограничениями типа неравенств $g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m_1$ и нелинейными ограничениями равенств $h_i(x) = 0,\ i = m_1 + 1, ..., m$.

Метод оказался очень эффективным, при весьма слабых предположениях относительно функций задачи. Он нелокально сходится, а в случае, когда экстремальная точка x_* лежит в вершине криволинейного многогранника, описываемого ограничениями задачи, он сходится квадратично. В работе [2] получены оценки скорости сходимости, полностью соответствующие оценкам классического градиентного спуска в безусловной оптимизации. Предложенный метод [1] получил название метода линеаризации. Он относится к известным аппроксимирующим методам последовательного квадратичного программирования (к. п.). Суть этих методов состоит в том, что на каждой итерации целевая функция аппроксимируется некоторой квадратичной функцией, а ограничения аппроксимируются линейными функциями.

Решения возникшей задачи к. п. в итерационном процессе $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $k = 0,1,...$ определяет направление спуска p_k, а величина сдвига в этом направлении α_k определяется из релаксации (убывания) некоторой штрафной функции $\Phi_N(x_k) = f(x_k) + NF(x_k)$, где N – коэффициент штрафа, а $F(x_k) = \max\left(0, g_1(x_k),..., g_m(x_k), \left|h_{m_1+1}(x_k)\right|,...,\left|h_m(x_k)\right|\right)$. При сделанных в [1] предположениях при $k \to \infty$ $\min \Phi_N(x) = \min f(x) = f(x_*)$.

В методе линеаризации [1] при аппроксимации $f(x)$ квадратичной функцией $\left\langle f'(x), x - x_k \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle A_k(x - x_k), x - x_k \right\rangle$, где $f'(x)$ означает градиент $f(x)$, $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение векторов x и y, рассматриваемых как вектор-столбцы, полагается $A_k = A_k^T = E$, где E – единичная матрица, T – знак транспонирования. Однако, когда $A_k = A_k^T \to L(x_*, \lambda_*)$, где $L(x_*, \lambda_*)$ – функция Лагранжа исходной задачи математического программирования, λ – вектор множителей Лагранжа исходной задачи, получаем методы типа Ньютона.

Эти методы являются локальными, т. е. сходятся сверхлинейно (квадратично) лишь в некоторой локальной окрестности точки x_* с $\alpha_k = 1$. Но при $\alpha_k = 1$ релаксация $\Phi_N(x_k)$ не гарантируется (эффект Маратоса) [3] и тем самым сверхлинейная скорость не достигается. В работе [4] этот момент обходится путем переключения алгоритма первого порядка вдали от x_* на метод Ньютона вблизи решения. В локальном алгоритме полагают $\alpha_k = 1$, а вектор p_k определяется из решения системы уравнений, составляющей необходимые и достаточные условия экстремума, возникающей на каждой итерации задачи к. п. На практике метод хорошо себя зарекомендовал, однако бывают случаи, когда условия переключения не всегда точно обеспечивают попадание в локальную область сходимости метода Ньютона. Возможен возврат на метод первого порядка и повторное переключение на локальный алгоритм.

В данной работе предлагается для выбора α_k использовать комбинированную штрафную функцию. Эта штрафная функция обладает достоинствами функции $\Phi_N(x)$ при использовании ее в нелокальных методах и гарантирует $\alpha_k = 1$ в локальных методах типа Ньютона.

Постановка задачи: найти

$$f_* = \min_{x \in \Omega} f(x); \Omega = \left\{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i = 1,...,l\right\}, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1,...,l$ – произвольные нелинейные дифференцируемые функции. Задача рассматривается при следующих предположениях.

1. Градиенты $f'(x)$, $g_i'(x)$, $i = 1,...,l$ удовлетворяют условию Липшица.

2. В любой точке генерируемой последовательности $\{x_k\}$, которая предполагается ограниченной, разрешима вспомогательная задача к. п.

$$\min\left[\left\langle f'(x), x-x_k\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle A_k\left(x-x_k\right), x-x_k\right\rangle\right],$$

$$g_i\left(x_k\right)+\left\langle g_i'\left(x_k\right), x-x_k\right\rangle \leq 0,\ i=1,\ldots,l, \tag{2}$$

где A_k – симметричная, сильно положительно определенная матрица

$$\underline{a}\|x\|^2 \leq \left\langle A_k x, x\right\rangle \leq \bar{a}\|x\|^2,\ \underline{a}>0,\ \forall x \in R^n. \tag{3}$$

Существуют такая константа N и множители Лагранжа $\bar{\lambda}_k$, что

$$\left\|\bar{\lambda}_k\right\|_1=\sum_{k=1}^{l}\left|\bar{\lambda}_k\right|<N. \tag{4}$$

При выполнении этих условий гарантирована нелокальная сходимость $x_k \to X_*$ метода линеаризации, X_* – множество точек x_*.

Предполагается, что необходимые условия для задачи (1) выполнены в регулярной форме

$$f'\left(x_*\right)+\sum_{i=1}^{l} \lambda_*' g_i'\left(x_*\right)=0,$$

$$\lambda_*^i g_i\left(x_*\right)=0,\quad \lambda_*^i \geq 0,\quad i=1,\ldots,l. \tag{5}$$

Под решением задачи(1) подразумевается отыскание стационарных точек, удовлетворяющих (5).

Условия экстремума (необходимые и достаточные) задачи к. п. (2) в ее решении $\bar{x}_k$ имеют вид.

$$f'\left(x_k\right)+A_k p_k+\sum_{i=1}^{l} \bar{\lambda}_k^i g_i'\left(x_k\right)=0,\quad p_k=\bar{x}_k-x_k,$$

$$\bar{\lambda}_k^i\left[g_i\left(x_k\right)+\left\langle g_i'\left(x_k\right), p_k\right\rangle\right]=0,\ \bar{\lambda}_k^i \geq 0,\ i=1,\ldots,l. \tag{6}$$

Из сравнения (5) и (6) вытекает ряд утверждений, хорошо известных в оптимизации [1 – 5].

Утверждение 1. Равенство $p_k=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $x_k=x_*$, $\bar{\lambda}_k=\lambda_*$.

Утверждение 2. Если выполнены предположения 1, 2 задачи (1), то $\{x_k\}$ и $\{p_k\}$ ограниченные последовательности.

Утверждение 3. Если выполнены условия (2) задачи (1), то $p_k \to 0$ тогда и только тогда, когда $x_k \to X_*$.

Из $p_k \to 0$, ($x_k \to X_*$) вытекает $\bar{\lambda}_k \to \Lambda_*$. . ($\Lambda_*$ – множество множителей λ_*^i, $i=1,\ldots,l$).

Смешанная штрафная функция имеет вид:

$$F_{\mu\gamma}(z) = f(x) + \sum_{i=1}^{l}(\mu + \lambda^i) g_i^+(x) + \frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(g_i^+(x)\right)^2, \ \lambda \in \Lambda^+,$$

или, что то же самое,

$$F_{\mu\gamma}(z) = f(x) + \langle \lambda, g^+(x) \rangle + \mu \|g^+(x)\|_1 + \gamma \frac{\|g^+(x)\|^2}{2}, \qquad (7)$$

где z – вектор с компонентами x, λ, $\|\cdot\|$ – эвклидова норма вектора, знак «+» означает неотрицательность, а $g^+(x)$ и $g^-(x)$ – векторы с компонентами соответсвенно $g^+(x) = \max\{0; g_i(x)\}$, $g^-(x) = \min\{0; g_i(x)\}$,, $i = 1,...,l$, $\mu \ge 0$, $\gamma \ge 0$ – коэффициенты штрафа. Будем называть μ – недифференцируемым коэффициентом штрафа, γ – дифференцируемым. В точках $z \in \Omega \times \Lambda^+$, $F_{\mu\gamma}(z) = f(x)$, тогда

$$\min_{z \in \Omega \times \Lambda^+} F_{\mu\gamma}(z) = \min_{x \in \Omega} f(x) = f_*.$$

Из условия (7) следует, что функция $F_{\mu\gamma}(z)$ линейна по λ, непрерывна по z, но по z недифференцируема. При этом она дифференцируема по любому направлению в R^{n+l}.

Обозначим Δz_k – вектор-столбец с компонентами p_k и $\Delta \lambda = \bar{\lambda}_k - \lambda_k$. Всюду предполагается $\lambda_k \in \Lambda^+$.

Применяя правило дифференцирования функции максимума [6] и используя условия дополняющей нежесткости из (7), можно показать, что в любой точке $z \in R^n \times \Lambda^+$ функция $F_{\mu\gamma}(z)$ имеет производную по направлению Δz_k, определяемую выражением

$$\frac{\partial F_{\mu\gamma}(z_k)}{\partial \Delta z_k} = -\langle A_k p_k, p_k \rangle + \sum_{-(k)} \bar{\lambda}_k^i g_i(x_k) + \sum_{+(k)} \tau_k^i,$$

$$\tau_k^i = \left(\mu + \gamma g_i(x_k) - \Delta\lambda_k^i\right)\langle g_i'(x_k), p_k \rangle + \Delta\lambda_k^i g_i(x_k), \qquad (8)$$

где $+(k) = \{i \in 1,...,l \,|\, g_i(x_k) \ge 0\}$, а $-(k) = \{i \in 1,...,l \,|\, g_i(x_k) < 0\}$.

Формула (8) позволяет сформулировать требования к коэффициентам μ и γ, при которых $\partial F_{\mu\gamma}(z_k) / \partial \Delta z_k < 0$ и гарантируется релаксация по $\alpha > 0$ функции $F_{\mu\gamma}(z_k + \alpha \Delta z_k)$ вблизи точки z_k. Критерием релаксации является, например, неравенство

$$\frac{\partial F_{\mu\gamma}(z_k)}{\partial \Delta z_k} = -\varepsilon_1 \langle A_k p_k, p_k \rangle, \ 0 < \varepsilon_1 < 1. \qquad (9)$$

Согласно ограничениям задачи (2) имеем

$$\left(\mu+\gamma g_i\left(x_k\right)\right)\left\langle g_i'\left(x_k\right), p_k\right\rangle \le -\left(\mu+\gamma g_i\left(x_k\right)\right) g_i\left(x_k\right),\ \ i\in +\left(k\right).$$

Поскольку $\lambda_k \in \Lambda^+$, то из условий дополняющей нежесткости в (6) следует $-\Delta\lambda_k^i\left\langle g_i'\left(x_k\right), p_k\right\rangle \le \Delta\lambda_k^i g_i\left(x_k\right)$, $i=1,\dots,l$, из (8) для τ_k^i

$$\tau_k^i \le b_k^i,\ \ b_k^i=\left(-\mu-\gamma g_i\left(x_k\right)+2\Delta\lambda_k^i\right) g_i\left(x_k\right),\ \ i\in +\left(k\right) \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial F_{\mu\gamma}\left(z_k\right)}{\partial \Delta z_k} \le -\left\langle A_k p_k, p_k\right\rangle+\left\langle \bar{\lambda}_k, g^-\left(x_k\right)\right\rangle+b_k,\ \ b_k=\sum_{+(k)} b_k^i.$$

Можно ввести более сильные критерии релаксации функции $F_{\mu\gamma}\left(z\right)$ в виде лемм.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 2 задачи (1), $\left\{\lambda_k\right\}\in\Lambda^+$ – ограниченная последовательность, ε_1 и ε_2 – произвольные константы из (0; 1), $\gamma>0$ произвольно. Тогда найдется «пороговое» $\mu_->0$ такое, что при любом $\mu\ge\mu_-$ для всех точек z_k имеет место

$$b_k \le \left(1-\varepsilon_1\right)\left\langle A_k p_k, p_k\right\rangle-\varepsilon_2\mu\left\|g^+\left(x_k\right)\right\|_1. \tag{11}$$

И выполняется неравенство

$$\frac{\partial F_{\mu\gamma}\left(z_k\right)}{\partial \Delta z_k} \le -\varepsilon_1\left\langle A_k p_k, p_k\right\rangle-\varepsilon_2\mu\left\|g^+\left(x_k\right)\right\|_1+\left\langle \bar{\lambda}_k, g^-\left(x_k\right)\right\rangle.$$

В отличие от метода линеаризации [1], в котором условие (4) гарантирует спуск по вектору p_k прямых переменных, условие (11) обеспечивает релаксацию функции $F_{\mu\gamma}\left(z\right)$ по вектору $\Delta z_k \in R^{n+l}$ прямых и двойственных переменных.

Введем обозначение $\Delta\tilde{\lambda}_k : \Delta\tilde{\lambda}_k=\bar{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_k$, в котором $\tilde{\lambda}_k\in\Lambda^+$ может быть задано разным способом. Рассмотрим $\tilde{\lambda}_k=\left\{\tilde{\lambda}_k^i\right\},$, $\tilde{\lambda}_k^i=\min\left\{\lambda_k^i,\bar{\lambda}_k^i\right\}$, $i=1,\dots,l$, где $\tilde{\lambda}_k\in\Lambda^+$ – текущая точка итерационного процесса. Очевидно, что $\tilde{\lambda}_k\in\Lambda^+$ и $\Delta\tilde{\lambda}_k=\left(\tilde{\lambda}_k-\lambda_k\right)^+\in\Lambda^+$.

Другим способом задания $\tilde{\lambda}_k$ является $\tilde{\lambda}_k=\bar{\lambda}_k$. Ясно, что в этом случае $\Delta\tilde{\lambda}_k=0$.

Сформулируем аналог леммы 1.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 2 задачи (1). Последовательность $\left\{\lambda_k\right\}\in\Lambda^+$ произвольна и $\gamma\ge0$ постоянно. Тогда найдется пороговое $\mu_->0$ такое, что при любом $\mu\ge\mu_-$ для всех точек $\tilde{z}_k$ имеет место

$$\tilde{b}_k \le \left(1-\varepsilon_1\right)\left\langle A_k p_k, p_k\right\rangle-\varepsilon_1\mu\left\|g^+\left(x_k\right)\right\|_1,$$

$$\frac{\partial F_{\mu\gamma}(\tilde z_k)}{\partial \Delta \tilde z_k} \le -\varepsilon_1 \left[\langle A_k p_k, p_k \rangle + \mu \left\| g^+(x_k) \right\|_1 \right] + \langle \bar\lambda_k, g^-(x_k) \rangle, \qquad (12)$$

где b_k имеет вид (10).

Ограниченность $\{\tilde\lambda_k\}$ и $\{\Delta\tilde\lambda_k\}$ следует из определения $\tilde\lambda_k$ и условия (4).

Неравенство (12) можно назвать правилом выбора коэффициентов μ и γ, которые обеспечивают релаксацию $F_{\mu\gamma}(z)$ в точке z_k по направлению $\Delta\,\tilde z_k$.

Методы негладкого штрафа

Рассмотрим методы со вспомогательной задачей к.п. (2), (3) и штрафной функцией $F_{\mu\gamma}(z)$, основанные на изменении только коэффициента штрафа μ при произвольном постоянном $\gamma \ge 0$. Далее γ не указываем в обозначениях $F_\mu(z)$ и других. Опишем k-ю итерацию алгоритма в точке z_k ($x_k \ne x_*$, $p_k \ne 0$), $k = 0,1,\ldots$.

Примем ε и ε_1 любыми константами из (0; 1), $\mu_0 > 0$, $x_0 \in R^n$ – произвольны, $\gamma > 0$ – любое фиксированное число.

Шаг 1 (определение p_k и $\bar\lambda_k$). Задать матрицу $A_k = \bar A_k$, удовлетворяющую (3), найти $\bar x_k$, $\bar\lambda_k$ из решения задачи (2), $p_k = \bar x_k - x_k$.

Шаг 2 (спуск по λ и сохранение штрафа $\mu_k = \mu_{k-1}$).

Вычислить $\tilde\lambda_k^i = \min\{\lambda_k^i, \bar\lambda_k^i\}$, $i = 1,\ldots,l$, и найти $\tilde z_k = \{x_k, \tilde\lambda_k\}$, $\Delta\tilde\lambda_k = \left(\tilde\lambda_k - \lambda_k\right)^+$, полагая $\tilde\lambda_0 = \bar\lambda_0$ при $k = 0$. В случае $\Delta\tilde\lambda_k = 0$ принять $\mu_k = \mu_{k-1}$ и перейти к шагу 4. В случае $\Delta\tilde\lambda_k \ne 0$ проверить неравенство (12) для $\mu = \mu_{k-1}$ или, что то же самое, неравенство

$$2\left\langle \Delta\tilde\lambda_k, g^+(x_k) \right\rangle \le (1-\varepsilon_1)\left[\langle A_k p_k, p_k \rangle + \mu_{k-1} \left\| g^+(x_k) \right\|_1 \right] + \gamma \left\| g^+(x_k) \right\|^2. \qquad (13)$$

Если оно имеет место, то принять $\mu_k = \mu_{k-1}$ и перейти к шагу 4, при нарушении (13) к шагу 3.

Шаг 3 (вычисление нового μ_k, переопределение z_k, Δz_k). Найти μ_k как наименьшее из значений $\mu = \mu_{k-1} \cdot 2^s$, $s = 1,\ldots$, для которого впервые выполняется (12). В качестве $\tilde\lambda_k$ принять $\bar\lambda_k$ и соответственно принять новые $\tilde z_k = \{x_k, \bar\lambda_k\}$, $\Delta\lambda_k = 0$.

Шаг 4 (определение α_k). Найти α_k как наименьшее из значений $\alpha = 2^{-s}$, $s = 0,1,\ldots$, для которого впервые выполняется неравенство $F_\mu(\tilde z_k + \alpha\Delta\tilde z_k) \le \le F(\tilde z_k) + \varepsilon\alpha\tilde\varphi_k$, $0 < \varepsilon < 1$, (правило Армийо), где μ означает μ_k и $\tilde\varphi_k \le -\frac{\varepsilon_1}{2}\left[\langle A_k p_k, p_k \rangle + \mu_k \left\| g^+(x_k) \right\|_1 \right] + \left\langle \tilde\lambda_k, g^-(x_k) \right\rangle$, $0 < \varepsilon_1 < 1$.

Вычислить $z_{k+1} = \tilde z_k + \alpha_k \Delta\tilde z_k$; $k = k+1$. Конец итерации.

Замечание 1. Шаг 3 возможен только при $\bar{\lambda}_k \neq \lambda_k$ и после его выполнения осуществляется переход в точку $\{x_k, \bar{\lambda}_k\}$ по прежнему, обозначаемую $\hat{z}_k$. Это, однако, не должно вызывать недоразумений, поскольку, во-первых, после завершения шага 3 вычисленные на шаге 2 значения $\tilde{\lambda}_k$, $\Delta\tilde{\lambda}_k = \left(\bar{\lambda}_k - \lambda_k\right)^+$ больше не используются на итерации, во-вторых, точек x_k с растущим μ_k конечное число.

Замечание 2. Если $\tilde{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k$ (в частности, при $k=0$ или в точках $\hat{z}_k$ после завершения шага 3), то $\Delta\tilde{\lambda}_k = 0$ и неравенство (12) выполняется для любых $\mu > 0.$ Поэтому релаксация $F_\mu(z)$ в точке $\{x_k, \bar{\lambda}_k\}$ гарантирована, спуск в этом случае осуществляется только вдоль вектора p_k, а из $z_{k+1} = \tilde{z}_k + \alpha_k \Delta\tilde{z}_k$ вытекает $\lambda_{k+1} = \bar{\lambda}_k$.

Нелокальную сходимость алгоритма устанавливает теорема 1.

Теорема 1. Если выполнены условия 1, 2 задачи (1), то при $k \geq k_0$ коэффициент штрафа $\mu_k = \mu > 0$ является постоянным, $\alpha_k \geq \underline{\alpha} > 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots,$ ($\underline{\alpha} > 0$ – константа) и $p_k \to 0,$ $g^+(x_k) \to 0,$, $x_k \to x_*,$ $\bar{\lambda}_k \to \Lambda_*.$

Локальные оценки скорости сходимости дает теорема 2. Они устанавливаются в зависимости от выполнения следующих условий, являющихся вместе с 2 [6] достаточными условиями минимума задачи (1).

Условия А.

А1. Функции $f(x)$, $g(x)$, $i \in I(x_*)$ выпуклы в окрестности множеств Ω, которое содержит внутреннюю точку $\bar{x}$: $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1,\ldots,l$, $I(x_*) =$ $= \{i = 1,\ldots,l \mid g_i(x) = 0\}.$

А2. Функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I(x_*)$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности x_*, градиенты $g_i'(x_*)$, $i \in I(x_*)$, линейно независимы для всех $y \neq 0$ таких, что $\langle g_i'(x_*), y\rangle = 0,$ $\forall i \in I^+(x_*) = \{i \in I(x_*) \mid \lambda > 0\}$ выполняется $\langle L_{xx}(z_*)x, x\rangle > 0.$

А3. Градиенты $g_i'(x_*)$, $I(x_*) = i \in I(x_*)$, линейно независимы и $\lambda_*^i > 0$ для всех $i \in I(x_*)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2 задачи (1). Тогда

1) если имеет место условие А1, то $\Delta_k = F(z_k) - f_* = \tilde{o}\left(k^{-1}\right),$ $k \to \infty;$

2) если $x_k \to x_*$ и в точке x_* выполнено условие А2, то $\lambda_k \to \lambda_*,$ $\tilde{\lambda}_k \to \lambda_*,$ $\Delta\tilde{\lambda}_k \to 0$ и при $k \geq k_0$ справедливы оценки $\Delta_{k+1} \leq q\Delta_k$, $\Delta_k \leq Cq^k$, $\|x_k \to x_*\| \leq C_1 q_1^k$, где $q \in (0,1)$ – константа $q_1 = q^{1/2} < 1;$

3) если $x_k \to x_*$ и в точке x_* выполнено условие А3, то $\lambda_k \to \lambda_*$, $\tilde{\lambda} \to \lambda_*$, $\Delta\tilde{\lambda}_k \to 0$ и имеет место $\alpha_k = 1$, $\|x_{k+1} \to x_*\| \le C\|x_k \to x_*\|^2$, $C > 0$.

Заключение. Дальнейшее развитие исследований будет направлено на построение алгоритмов для численного решения нелинейных задач условной оптимизации с использованием штрафной функций $F_{\mu\gamma}$ при постоянном μ и изменяемом γ (гладкий штраф), а так же при изменении обоих штрафов μ и γ. Кроме того будут сформулированы и обоснованы теоремы о нелокальной сходимости алгоритмов и локальных оценках их скорости сходимости.

Л.О. Соболенко, С.Г. Ненахова, І.А. Шубенкова

КОМБІНОВАНА ШТРАФНА ФУНКЦІЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ РІЗНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Для чисельного розв'язання гладких задач умовної оптимізації з нелінійними обмеженнями у формі нерівностей розроблено загальну схему апроксимуючих методів послідовного квадратичного програмування на основі релаксації штрафної функції, що містить гладкі та негладкі штрафи. За допомогою цієї схеми описано методи негладких штрафів.

L.A. Sobolenko, S.G. Nenakhova, I.A. Shubenkova

COMBINED PENALTY FUNCTION FOR CONSTRUCTION OF DIFFERENT METHODS FOR SOLVING OF NONLINEAR PROBLEMS OF THE CONSTRAINED OPTIMIZATION

For the numerical solution of smooth problems of the constrained optimization with nonlinear restrictions in inequalities form the general scheme of approximating methods of sequential square programming is worked out on the basis of relaxation of penalty function containing smooth and nonsmooth penalties. By means of this scheme the methods of nonsmooth penalties are described.

1. *Пшеничный Б.Н.* Алгоритм для общей задачи математического программирования // Кибернетика. – 1970. – № 5. – С. 120 – 125.
2. *Панин В.М.* Методы конечных штрафов с линейной аппроксимацией ограничений. I // Кибернетика. – 1984. – № 2. – С. 44 – 50. II // Кибернетика. – 1984. – № 4. – С. 73 – 81.
3. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 399 с.
4. *Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1980. – Т. 20, № 3. – С. 605 – 614.
5. *Панин В.М., Скопецкий В.В.* Нелокальный метод Ньютона для задач выпуклой оптимизации и монотонных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 5. – С. 43 – 64.
6. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

Получено 20.03.2013