

# ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РИШЕНЬ

*Рассматриваются задачи нахождения оптимальных нагрузок энергетических объектов с нелинейными функциями стоимости. Представлены математические модели задач, метод решения с использованием г-алгоритма и результаты тестирования.*

© А.П. Лиховид, А.В. Фесюк,  
2014

УДК 519.8

А.П. ЛИХОВИД, А.В. ФЕСЮК

## **ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ НАГРУЗОК ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СТОИМОСТИ**

**Введение.** Задачи выбора оптимальных нагрузок энергетических объектов в энергосистеме имеют важное прикладное значение [1, 2]. Они связаны с нахождением минимальных по стоимости производства электроэнергии значений нагрузок энергоблоков в планируемом периоде, удовлетворяющих запросы потребителей и не нарушающие определенные эксплуатационные ограничения. В работе рассматриваются некоторые семейства математических моделей для определения электрических нагрузок энергоблоков в энергосистеме с нелинейными функциями стоимости, в том числе с невыпуклыми и негладкими целевыми функциями, и предлагается использовать для их решения метод негладких штрафов и алгоритмы недифференцируемой оптимизации.

**Математическая модель задачи.** Будем рассматривать задачу нахождения нагрузок энергетических объектов с фиксированными включенными энергоблоками (Economic Load Dispatch Problem). Пусть энергосистема состоит из  $n$  параллельно работающих энергоблоков. Для каждого энергоблока  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) заданы  $P_i^{low}$  и  $P_i^{up}$  – соответственно нижняя и верхняя границы его электрической нагрузки,  $f_i(x_{i,t})$  – затраты условного топлива на выработку единицы электрической нагрузки. Обозначим  $T$  – длительность суточного планового периода в часах.

Для каждого интервала  $t$  ( $t=1, \dots, T$ ) задана плановая электрическая нагрузка энергосистемы  $E_t$  (в тех же единицах, что и электрические нагрузки энергоблоков). Заданы параметры  $DR_i$  ( $UR_i$ ) – допустимые значение на последовательное уменьшение (увеличение) нагрузки для  $i$ -го энергоблока.

Пусть  $x_{it}$  – неизвестная электрическая нагрузка  $i$ -го энергоблока в интервале. Рассмотрим следующую задачу математического программирования: найти

$$f_C^* = \min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N f_i(x_{i,t}) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N x_{i,t} = E_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

$$P_i^{low} \leq x_{i,t} \leq P_i^{up}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

$$x_{i,t} - x_{i,t-1} \leq UR_i, \quad t = 2, \dots, T, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$x_{i,t-1} - x_{i,t} \leq DR_i, \quad t = 2, \dots, T, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Здесь  $f_i(x_{i,t})$  – функция затрат условного топлива для  $i$ -го энергоблока. Традиционно, функция затрат условного топлива аппроксимируется квадратичной функцией вида

$$f_i(x_{i,t}) = a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i, \quad (6)$$

где  $a_i, b_i, c_i$  – заданные параметры. Для получения более точных результатов иногда используется функция третьего порядка вида

$$f_i(x_{i,t}) = a_i x_{i,t}^3 + b_i x_{i,t}^2 + c_i x_{i,t} + d_i,$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – заданные параметры. Для построения более реалистичной модели, которая учитывает эффект «пульсации», используется следующая функция стоимости:

$$f_i(x_{i,t}) = a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i + \left| e_i \times \sin(f_i \times (P_i^{low} - x_{i,t})) \right|, \quad (7)$$

где  $e_i, f_i$  – заданные параметры. Такая функция будет негладкой и имеет множество локальных минимумов в области поиска.

На рис. 1 и 2 показаны примеры графиков функций (6), (7) соответственно.

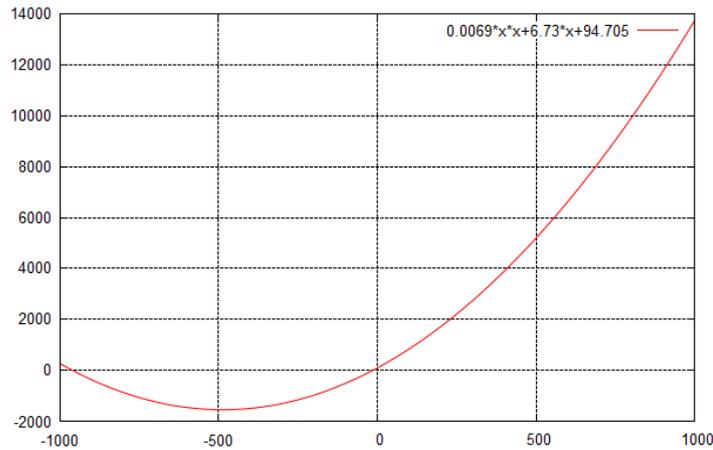


РИС. 1. Пример графика функции (6)

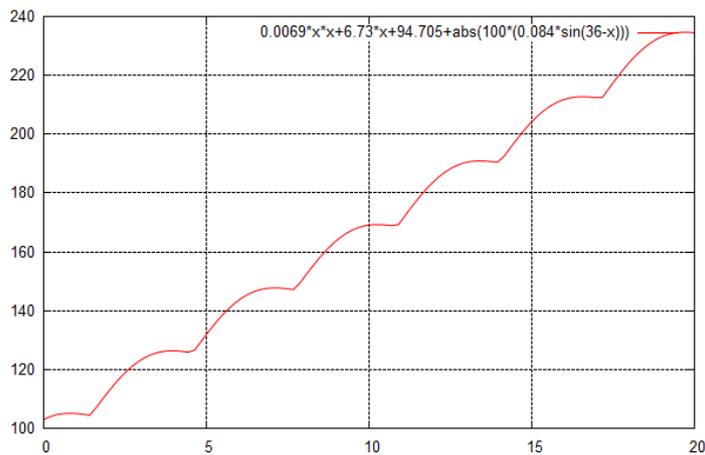


РИС. 2. Пример графика функции (7)

Задача (1) – (5) – это базовая модель задачи нахождения нагрузок энергетических объектов с фиксированными включенными блоками. Добавлением различных ограничений на режимы работы энергоблоков можно получить модели, которые более точно соответствуют практике. Например, можно учесть экологические факторы добавлением в модель соответствующих ограничений [3].

**О методах решения.** Для решения задач нахождения нагрузок энергетических объектов с фиксированными включенными энергоблоками можно использовать различные подходы: методы нелинейного программирования,

динамического программирования, двойственный подход (Лагранжева релаксация). Задача (1) – (5) в общем случае может быть многоэкстремальной и тогда для нахождения оптимальных решений можно использовать, например, параллельную реализацию метода мултистарта [4].

Для нахождения локальных экстремумов будем использовать метод негладких штрафных функций [5]. Преобразуем задачу (1)–(3) к задаче безусловной минимизации следующей негладкой функции:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T f_i(x_{i,t}) + Q_1 \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^N x_{i,t} - E_t \right| + Q_2 \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \max\{0, x_{i,t} - P_i^{up}, P_i^{low} - x_{i,t}\} + Q_3 \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \max\{0, x_{i,t} - x_{i,t-1} - UR_i, x_{i,t-1} - x_{i,t} - DR_i\}. \quad (8)$$

Здесь  $Q_1, Q_2, Q_3$  – штрафные множители, соответствующие учету с помощью негладких штрафов ограничений (2) в форме равенств и ограничений (3), (4), (5) в форме неравенств. Для минимизации функции (8) можно использовать алгоритмы недифференцируемой оптимизации, например  $r$ -алгоритм [5].

**Вычислительные эксперименты.** Вышеописанный метод решения задач нахождения нагрузок энергетических объектов с фиксированными включенными энергоблоками реализован на языке программирования C++. Для нахождения локальных решений использовался  $r$ -алгоритм. Проведены расчеты как для квадратичной модели, так и для модели, учитывающей эффект «пульсации».

Тестовый пример [6] имел следующие параметры: количество энергоблоков равно 40. Число интервалов в плановом периоде – 24. Общее количество переменных – 960, ограничений – 1335. Значения потребностей в электрической энергии выбирались в соответствии с графиком на рис. 3, который соответствует реальной суточной загрузке. Мощности энергоблоков и параметры функции стоимости выбирались соответственно табл. 1, которые соответствуют реальным данным. Параметры  $r$ -алгоритма были следующими: коэффициент растяжения – 2; начальный шаг – 1.0;  $q_1 = 0.95$ ;  $q_2 = 1.2$ ; точность остановки по аргументу –  $1.e - 6$ ; значение штрафных коэффициентов – 10000.

Для модели с целевой функцией (6) найдено оптимальное значение равно  $3.021210e+006$ . Для модели с целевой невыпуклой функцией (7) проведено 10 запусков поиска локального решения с различных начальных точек. Эти точки генерировались случайным образом с помощью функции равномерного распределения в интервале  $[P_i^{low}, P_i^{up}]$ . Результаты вычислительных экспериментов для тестовой задачи приведены в табл. 2. Здесь  $irun$  – номер запуска поиска локального решения,  $F_{opt}$  – наилучшее найденное значение функции,  $iter$  – количество итераций  $r$ -алгоритма. Из табл. 2 видно, что

наилучшее значение функции было найдено после запуска поиска локального решения под номером 9.

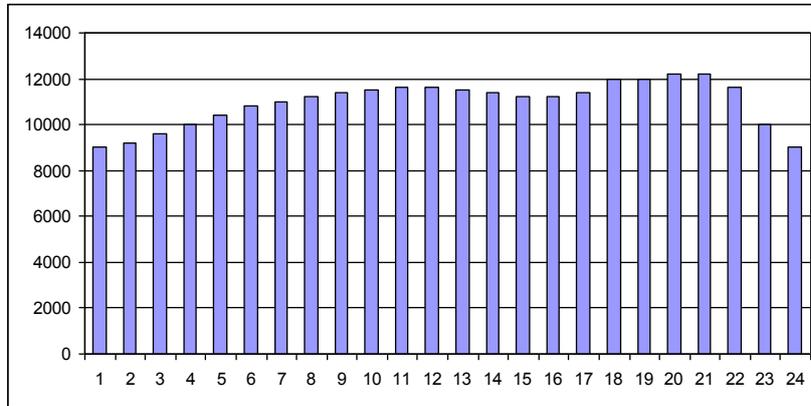


РИС. 3. Потребность в электроэнергии для тестового примера

ТАБЛИЦА 1. Мощности энергоблоков и параметры функции стоимости для тестового примера

#	P <sub>low</sub>	P <sub>up</sub>	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	e <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	D <sub>Ri</sub>	U <sub>Ri</sub>
1	36	114	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	120	80
2	36	114	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	120	80
3	60	120	0.02028	7.07	309.54	100	0.084	130	130
4	80	190	0.00942	8.18	369.54	150	0.063	130	130
5	47	97	0.0114	5.35	369.03	120	0.077	120	80
6	68	140	0.01142	8.05	148.89	100	0.084	120	80
7	110	300	0.01142	8.03	222.33	200	0.042	120	80
8	135	300	0.00357	6.99	287.71	200	0.042	100	65
9	135	300	0.00492	6.6	391.88	200	0.042	100	60
10	130	300	0.00573	12.9	455.76	200	0.042	100	60
11	94	375	0.00605	12.9	722.82	200	0.042	80	80
12	94	375	0.00515	12.8	635.2	200	0.042	80	80
13	125	500	0.00569	12.5	654.69	300	0.035	80	80
14	125	500	0.00421	8.84	913.4	300	0.035	55	55
15	125	500	0.00752	9.15	1760.4	300	0.035	55	55
16	125	500	0.00708	9.15	1728.3	300	0.035	120	80
17	220	500	0.00708	7.97	1728.3	300	0.035	120	80
18	220	500	0.00313	7.95	647.83	300	0.035	130	130
19	242	550	0.00313	7.97	647.81	300	0.035	130	130
20	242	550	0.00313	7.97	647.85	300	0.035	120	80
21	254	550	0.00313	6.63	785.96	300	0.035	120	80
22	254	550	0.00218	6.63	785.96	300	0.035	120	80
23	254	550	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	100	65

#	P <sub>low</sub>	P <sub>up</sub>	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	e <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	DR <sub>i</sub>	UR <sub>i</sub>
24	254	550	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	100	60
25	254	550	0.00277	7.1	801.32	300	0.035	100	60

Окончание табл. 1

#	P <sub>low</sub>	P <sub>up</sub>	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	e <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	DR <sub>i</sub>	UR <sub>i</sub>
26	254	550	0.00277	7.1	801.32	300	0.077	80	80
27	10	150	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	80	80
28	10	150	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	80	80
29	10	150	0.52124	6.43	1055.1	120	0.077	55	55
30	47	97	0.0114	6.43	148.89	120	0.063	55	55
31	60	190	0.0016	6.43	222.92	150	0.063	120	80
32	60	190	0.0016	8.95	222.92	150	0.063	120	80
33	60	190	0.0016	8.62	222.92	150	0.042	130	130
34	90	200	0.0001	8.62	107.87	200	0.042	130	130
35	90	200	0.0001	5.88	116.58	200	0.042	120	80
36	90	200	0.0001	5.88	116.58	200	0.098	120	80
37	25	110	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	120	80
38	25	110	0.0161	3.33	307.45	80	0.098	100	65
39	25	110	0.0161	3.33	307.45	80	0.098	100	60
40	242	550	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	100	60

ТАБЛИЦА 2. Результаты поиска локального решения с различных начальных точек для тестового примера

irun	F <sub>opt</sub>	iter
1	3.080628e + 006	15608
2	3.076831e + 006	5790
3	3.073907e + 006	6533
4	3.081829e + 006	10380
5	3.076194e + 006	9557
6	3.079864e + 006	9420
7	3.083098e + 006	5901
8	3.071822e + 006	16869
9	3.071364e + 006	12776
10	3.079242e + 006	8850

**Заключение.** Из результатов вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что для практического решения описанных задач оптимальной суточной загрузки энергосистемы с числом блоков порядка нескольких десятков можно использовать предложенный метод на основе *r*-алгоритма. Для больших задач можно использовать параллельные реализации на основе метода

мультистарта. В настоящее время разрабатывается программное обеспечение решения задач нахождения нагрузок энергетических объектов порядка нескольких сотен с невыпуклой функцией стоимости для расчетов на кластерном комплексе в среде параллельного программирования MPI.

*О.П. Лиховид, А.В. Фесюк*

#### ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАВАНТАЖЕНЬ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З НЕЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВАРТОСТІ

Розглядаються задачі знаходження оптимальних навантажень енергетичних об'єктів з нелінійними функціями вартості. Представлені математичні моделі задач, метод розв'язання з використанням  $r$ -алгоритму та результати тестування.

*О.П. Lykhovyd, A.V. Fesyuk*

#### PROBLEMS OF FINDING OPTIMAL LOAD OF POWER UNITS WITH NONLINEAR COST FUNCTIONS

Problems of finding optimal load of power units with nonlinear cost functions are considered. A mathematical models of the problems, method of solution using  $r$ -algorithm and test results are given.

1. *Математические и программные средства моделирования и оптимизации динамической загрузки мощностей энергосистемы / Стецюк П.И., Лиховид А.П., Чумаков Б.М., Видил А.Ю., Пилиповский А.В. // Отчет о научно-исследовательской работе № гос. регистрации 0107U004963. – К.: Ин-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – 136 с. (<http://www.icyb.kiev.ua/file/d120-energy/Ot2009-2mb.pdf>)*
2. *Стецюк П.І., Журбенко М.Г., Лиховид О.П. Математичні моделі та програмне забезпечення в задачах енергетики. – К.: Ательє «Поліграфічний комплекс», 2012. – 64 с.*
3. *Лиховид О.П., Фесюк О.В., Івлічев А.В. Оптимальне завантаження енергосистеми з відключенням енергоблоків // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2013. – С. 102 – 107.*
4. *Лиховид А.П. О реализации параллельного алгоритма для решения многоэкстремальных задач // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2010. – № 9. – С. 3 – 9.*
5. *Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 199 с.*
6. *S. Muthu Vijaya Pandian and K. Thanushkodi. Solving Economic Load Dispatch Problem Considering Transmission Losses by a Hybrid EP-EPSON Algorithm for Solving both Smooth and Non-Smooth Cost Function // International Journal of Computer and Electrical Engineering. – 2010. – Vol. 2, N 3. – P. 560 – 568.*

Получено 03.04.2014