УДК 519.8

Г.А.. ДОНЕЦ, В.И. БИЛЕЦКИЙ, Э.И. НЕНАХОВ

ГРАФОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПОИСКА РАДИОАКТИВНЫХ ШАРОВ

Рассматривается одна задача поиска двух радиоактивных шаров на множестве всех заданных. Предлагается графовый под-ход к ее решению. На примере для 22 шаров приводится способ по-шагового нахождения двух радиоактивных шаров.

В работе решается одна общая задача поиска радиоактивных шаров, которая сводится к следующему. Пусть задано n биллиардных шаров, среди которых два шара радиоактивны. Необходимо их обнаружить за минимальное число проверок.

О любом наборе шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный (далее активный), но невозможно узнать их количество.

Такую задачу можно решить логическим путем, используя логические рассуждения на основе принципов и утверждений, описанных в [1], и суть которых сводится к следующему.

1. Если из 2^s шаров активный один, то его можно найти за s проверок (испытаний): на первом шаге достаточно проверить половину шаров, затем методом дихотомии нужно проверить то количество шаров, где находится активный шар.

2. Если шаров больше чем 2^s, то за s шагов нельзя обеспечить отыскание одного активного шара. Если из n шаров активных 2, то имеется $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ вариантов различных активных пар. Поэтому, если $\frac{n(n-1)}{2} > 2^s$, то за s испытаний не удастся найти активную пару.

3. Если из n шаров сначала проверить k шаров, то исход испытания « – » (нет активных шаров) соответствует C_{n-k}^2 вариантам.

Это значит, что оба активные шары находятся среди $n-k$ оставшихся и исход испытания «+» (присутствие активных шаров) соответствует остальным $C_n^2 - C_{n-k}^2 = k(n-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ вариантам.

4. Если для достижения результата осталось i испытаний, то обязательно должно быть $C_{n-k}^2 \le 2^i$ и $C_n^2 - C_{n-k}^2 \le 2^i$.

Из принципа 2 вытекает очевидное равенство $f_1(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Можно показать, что из этого равенства следует неравенство $g(n_1, n_2) \le f_1(n_1) + f_1(n_2)$, причем возможно и строгое неравенство, где

$f_1(n)$ – минимальное число проверок для поиска одного активного шара из n заданных;

$f_2(n)$ – минимальное число проверок для поиска двух активных шаров из n заданных;

$g(n_1, n_2)$ – минимальное число проверок для обнаружения двух активных шаров, которые находятся по одному в двух подмножествах из n_1 и n_2 шаров. Справедлива также

Теорема. $f_2(2^s) = 2s$ $(s \ge 3)$.

Относительно последнего утверждения известно только $f_2(15) = 7$, $f_2(31) = 9$ и $f_2(63) = 11$. Для $f_2(127)$ утверждение еще не доказано. Остальные значения показаны в таблице.

ТАБЛИЦА

n	3	4	5	6–7	8–10	11–15	16–22	23–31	32–44	45–63
$f_2(n)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Существует гипотеза: $f_2(2^s - 1) = 2s - 1(s \ge 3)$.

Наряду с логическим решением этой задачи здесь предлагается подход, основанный на понятиях теории графов [2].

Исходя из общих принципов, любая активная пара может быть представлена ребром полного n-вершинного графа (рис. 1). Путем проверок можно добиться уменьшения количества этих допустимых ребер.

При отборе количества шаров для проверки (проверяемое количество) будем пользоваться принципами, изложенными далее в п. А, Б, В.

А. Если получен положительный ответ, то все допустимые ребра начинаются в проверяемом количестве, а остальные ребра пропадают и никогда не восстанавливаются.

Б. Если получен отрицательный ответ, то все ребра, начинающиеся в проверяемом количестве, пропадают, а остальные сохраняются.

В. Число остающихся и пропадающих допустимых ребер должно оставаться в пределах степени двойки, на единицу меньше, чем в предыдущей проверке.

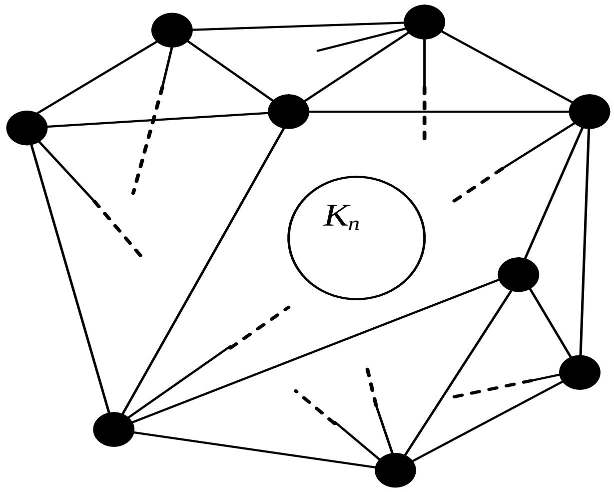

РИС. 1. Полный n-вершинный граф

Если на первом шаге проверяется r вершин, то согласно этим принципам допустимых ребер останется $C_r^2 + r(n-r)$, как показано на рис. 2.

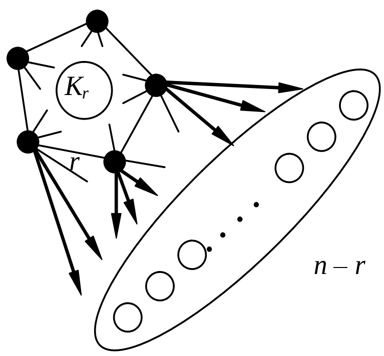

РИС. 2. Допустимые ребра после проверки r вершин

Объясним на примере для n = 22 процедуру пошагового поиска радиоактивных шаров.

Шаг 1. (+) или (–).

Вначале число допустимых ребер равно $C_n^2 = \dfrac{22(22-1)}{2} = 231 < 2^8$, т. е. 8 проверок должно быть достаточно, чтобы найти оба активные шары. Возьмем для проверки r шаров столько, чтобы при отрицательном исходе проверки среди оставшихся $n - r$ шаров активные удалось найти за меньшее число проверок. Ближайшее число шаров, как видно из таблицы, это 15 (требуется 7 проверок). Таким образом, $r = 22 - 15 = 7$. Ему соответствует 126 допустимых ребер. Это меньше числа 2^7, как и требуется.

Казалось бы, что для 8 проверок можно взять и число шаров n = 23, так как $C_n^2 = \dfrac{23(23-1)}{2} = 253$ также меньше 2^8. Однако для первой проверки необходимо взять 23 – 15 = 8 шаров, а это дает число допустимых ребер $m = \dfrac{8(8-1)}{2} + 8 \cdot 15 = 148$, что больше, чем 2^7.

На рис. 3 для n = 22 показаны допустимые ребра в количестве 126 и пропадающие ребра в количестве $C_n^2 = \dfrac{15(15-1)}{2} = 105$, оба меньше 2^7.

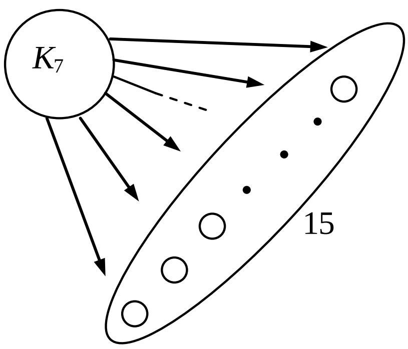

РИС. 3. $m = \dfrac{7(7-1)}{2} + 7 \cdot 15 = 126$

Шаг 2. (+).

На данном шаге необходимо отобрать допустимые ребра в количестве, не превышающем 2^6. Такая возможность показана на рис. 4. Для этого из множества K_7 выбираем 3 вершины a, b и c (в четырех оставшихся вершинах множества A ребра исчезают) и одну вершину d из 15 вершин. Подсчитаем число допустимых ребер. Три вершины соединены со всеми остальными, это дает
$3 \cdot 19 = 57$ ребер, одна вершина соединена с четырьмя – это еще 4 ребра, и еще 3 ребра из K_3 – всего 64, что не превышает 2^6, как и требуется.

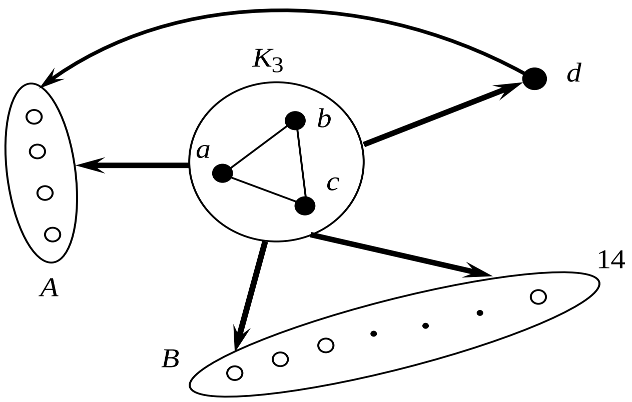

РИС. 4. $m = 3 \cdot 19 + 3 + 4 = 64$

Шаг 2. (–).

А число пропавших ребер (исход испытания « – »), как видно из рис. 5, можно найти среди множества A – это $C_4^2 = 6$ ребер и между множествами A и B – это $4 \cdot 14 = 56$ ребер, всего 62 ребра, что тоже меньше 2^6. В сумме с допустимыми число ребер равно 126, что и требовалось показать.

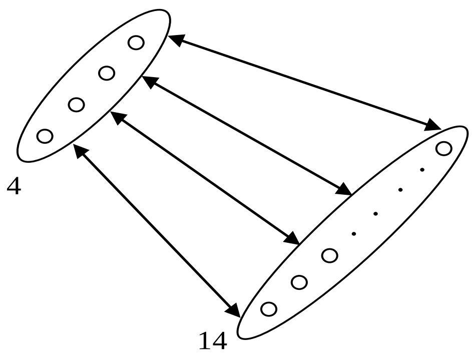

РИС. 5. $m = 4{\cdot}14 + 6 = 62$

Шаг 3. (+).

Отбираем 8 вершин из множества B и 2 вершины из множества A, при этом ребра треугольника пропадают. Получим допустимые ребра в количестве $8{\cdot}3 + 2{\cdot}(3 + 1) = 32$, что не больше 2^5 (рис. 6).

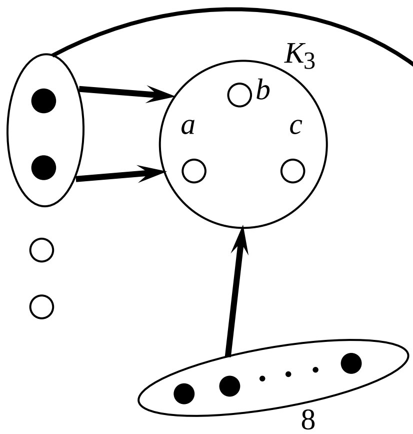

РИС. 6. $m = 8{\cdot}3 + 2{\cdot}3 + 2 = 32$

Шаг 3. (–).

Для третьего шага (–) остаются треугольник abc, две вершины из множества A и оставшиеся 6 вершин (рис. 7).

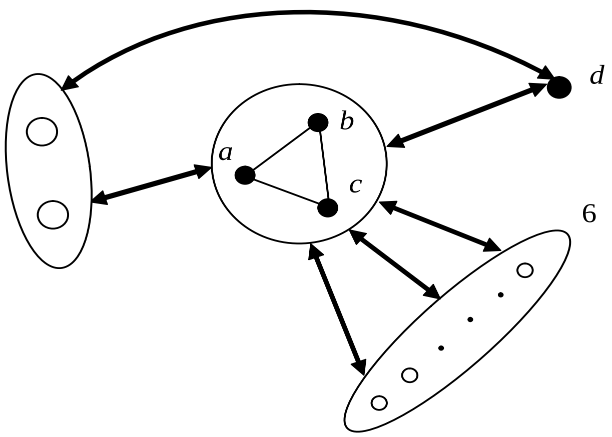

РИС. 7. $m = 3{\cdot}9 + 3 + 2 = 32$

Шаг 4. (+) или (–).

Для четвертого шага выбираем 4 вершины из последних восьми и одну вершину из последних двух. В результате получим допустимые ребра в количестве $4{\cdot}3 + 3 + 1 = 16$, что не больше 2^4, как и требуется (рис. 8).

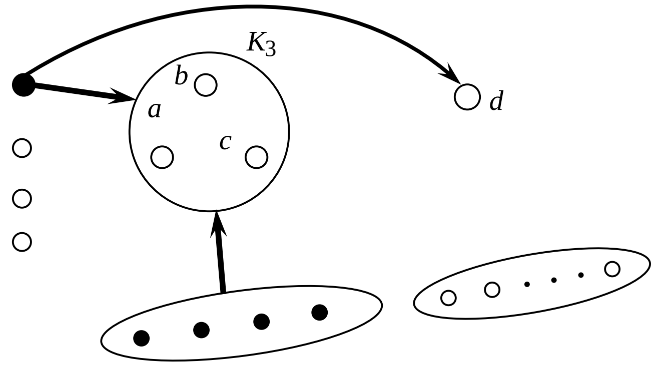

РИС. 8. $m = 4{\cdot}3 + 3 + 1 = 16$

Шаг 5.

На этом шаге выделяем 8 ребер, выбирая единственную заштрихованную вершину и одну незаштрихованную (рис. 9). Все остальные ребра пропадают.

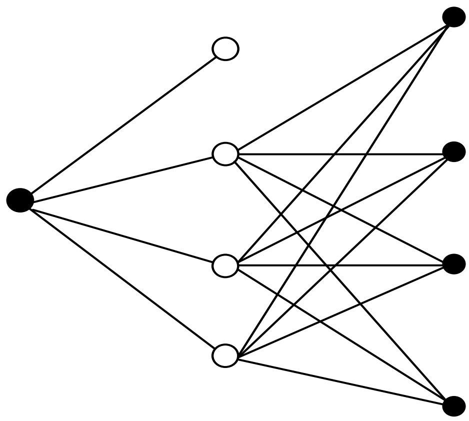

РИС. 9. $m = 4 + 4 = 8$

Шаг 6. Здесь выделим только одну левую заштрихованную вершину и в результате как положительного, так и отрицательного исхода получим 4 допустимых ребра. Разделяя их на две части, придем к нахождению единственного искомого ребра.

Г.П. Донець, В.І. Білецький, Е.І. Ненахов

ГРАФОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПОШУКУ РАДІОАКТИВНИХ КУЛЬОК

Розглядається одна задача пошуку двох радіоактивних кульок на множині всіх заданих. Пропонується графовий підхід до її розв'язання. На прикладі для 22 кульок приводиться спосіб покрокового знаходження двох радіоактивних кульок.

G.A. Donets, V.I. Biletsky, E.I. Nenakhov

GRAPH-THEORETICAL APPROACH TO SOLVING PROBLEM OF SEARCH FOR RADIOACTIVE BALLS

Paper concerns problem of search for 2 radioactive balls on a given set of balls. A graph-theoretical approach to solving this problem is suggested. A step-by-step procedure for detecting 2 balls is given by the way of example of a set of 22 balls.

1. *Донец Г.А., Кузнецов С.Т.* Об одной комбинаторной задаче логического типа // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 101 – 108.
2. *Донец Г.А.* Основы теории числових графов. – Кировоград: ЧП «Эксклюзив-Систем», 2013. – 280 с.

Получено 02.04.2014