УДК 519.83

С.И. ДОЦЕНКО

# ИГРА ВО ВСТРЕЧУ НА ОТРЕЗКЕ

*Рассмотрена игровая задача, для которой допустимые стратегии игроков задаются на множестве точек единичного отрезка. В задаче, называемой игра во встречу на отрезке, игроки имеют взаимное желание встретиться в некоторой точке, однако каждый из игроков стремится минимизировать свое расстояние до места встречи. Для данной задачи найдено равновесие по Нэшу в чистых стратегиях и показано, что более информированный игрок оказывается в более выгодном положении, а ожидаемое рассто-яние, которое он должен пройти к месту встречи меньше, чем у менее информированного игрока.*



**Введение**. Класс игр во встречу подробно рассмотрен в [1]. Суть такого рода игр состоит в следующем. Пусть несколько (чаще два) игроков в нулевой момент времени случайным образом попадают в точки некоторого множества $D$. Игроки могут свободно перемещаться внутри $D$ со скоростью не более, чем заданная величина $v$. Игроки имеют взаимное желание найти друг друга и встретиться, однако они ничего не знают о положении других игроков (а в ряде постановок задач и о собственном положении) и «не видят» друг друга до тех пор, пока расстояние между ними станет не большим, чем заданная величина $r$, где $r$ значительно меньше диаметра области $D$. Как правило, критерием в таких задачах является минимум среднего времени до момента встречи.

**Постановка задачи.** Рассмотрим игру, в которой участвует два игрока, и которая ведется на отрезке единичной длины. В самом начале игры каждый из игроков случайным образом помещается в точку, координата которой имеет равномерное на [0; 1] распределение. Каждый из игроков узнает координату точки, в которую помещен. После этого они ведут переговоры о месте встречи (заметим, что в классической постановке задачи игроки не имеют такой возможности). Переговоры заключаются в том, что вначале первый игрок сообщает второму свою координату $x$, после чего второй игрок сообщает свою координату $y$, и они договариваются встретиться в точке $z = (x + y)/2$, чтобы поровну разделить неудобства (или расходы), связанные с перемещением. Заметим, что в таком случае второму игроку может быть выгодно вести себя стратегически и врать первому игроку о своей истиной координате, уменьшая тем самым свой путь до места встречи и увеличивая путь первого игрока. Например, пусть первый и второй игроки находятся в точках 0.1 и 0.5 соответственно и пусть первый игрок сообщил второму свою координату. Тогда второму игроку выгоднее всего соврать и сказать, что он находится в точке 0.9 и тем самым он добьется того, что ему не будет нужно никуда перемещаться, а первый игрок подойдет в точку $(0.1+0.9)/2=0.5$, т. е. непосредственно к нему. Понимая, что второй игрок ведет себя стратегически и врет ему для минимизации своего пути до места встречи, первый игрок осознает, что и ему в свою очередь нужно вести себя стратегически и не всегда говорить правду.

Найдем оптимальные стратегии игроков в рамках концепции сложного рационального поведения. Это означает, что каждый из игроков стремится к максимуму собственной выгоды и безразличен к выгоде другого игрока. При этом он осознает, что другой игрок придерживается той же самой концепции.

Пусть первый игрок делает заявку (не обязательно правдивую) о том, что он находится в точке $x$. Не нарушая общности рассуждений, можно ввести на отрезке систему координат так, чтобы концами отрезка были точки 0 и 1 и при этом выполнялось неравенство $0 \le x \le 1/2$. Тогда, если координата второго игрока $y$ лежит в пределах от 0 до $x/2$, то он сделает заявку $y_0 = 0$ для того, чтобы выманить первого игрока в точку $x/2$, поскольку заставить первого игрока подойти к себе еще ближе он, согласно правил игры, не имеет возможности. Вероятность такого исхода будет равна $x/2$. Аналогично, если координата второго игрока $y$ лежит в пределах от $(x+1)/2$ до 1, то он делает заявку $y_0 = 1$ и выманивает первого игрока в точку $(x+1)/2$. Если же координата второго игрока $y$ лежит в пределах от $x/2$ до $(x+1)/2$, то его заявка $y_0 = 2y - x$ выманивает первого игрока непосредственно в точку $y$.

Пусть реальная координата первого игрока равна $z$, $0 \le z \le 1/2$. Делая заявку $x$, первый игрок в результате действий второго игрока в зависимости от его координаты $y$ получает рекомендацию переместиться в некоторую случайную точку, координата которой $y_0$ случайна, а вид распределения зависит от параметра $x$. Данное распределение имеет два атома в точках $x/2$ и $(x+1)/2$ с весами $x/2$ и $(1-x)/2$ соответственно, а также равномерное распределение на отрезке $[x/2;(x+1)/2]$ с единичной плотностью.

Таким образом, первому игроку, зная свою координату $z$, нужно сделать такую заявку $x$, чтобы минимизировать математическое ожидание расстояния от точки $z$ до точки $y_0(x)$. Ограничимся случаем $0 \le x \le 2z$, поскольку при $x > 2z$ оба атома распределения будут лежать правее точки $z$ и выбор такого распределения заведомо не будет оптимальным. Искомое среднее расстояние, согласно формулы полной вероятности, равно

$$r(x,z)=\frac{x}{2}\left(z-\frac{x}{2}\right)+\frac{1-x}{2}\left(\frac{x+1}{2}-z\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}-z\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(-x^2+x\right)+z^2-z+\frac{3}{8}.$$

Данное выражение при любом фиксированном $z$ достигает минимума по $x$ в двух точках – $x=0$ и $x=1$.

Если $z=1/2$ (означает, что первый игрок находится в середине отрезка), то оптимальной стратегией будет сделать одну из заявок $x=0$ либо $x=1$.

Если $z<1/2$, поскольку $0\le x\le 2z$, то максимально допустимое значение $x$ меньше 1, следовательно, оптимальной стратегией будет сделать заявку $x=0$. В реальной игре это означает, что первому игроку следует заявить, что он находится в ближайшем к себе конце отрезка.

Если первый игрок заявляет, что находится в ближайшем к себе конце отрезка, то не нарушая общности рассуждений можно положить, что координата ближайшего к нему конца отрезка равна 0, а противоположная 1, тогда получается, что координата первого игрока равномерно распределена на отрезке $[0;\ 1/2]$ с плотностью 2.

При этом координата $y_0$, в которую нужно будет переместиться первому игроку, имеет такое распределение: атом 1/2 в точке $y_0=1/2$ и равномерное распределение на отрезке $[0;\ 1/2]$ с плотностью 1.

Найдем средние расстояния, которые игроки должны будут пройти к месту встречи.

Среднее расстояние, проходимое первым игроком, составляет

$$\int_0^{1/2} 2r\,(z,0)dz=\int_0^{1/2}\left(2z^2+2z-\frac{3}{4}\right)dz=\frac{5}{24}.$$

Если в системе координат, связанной с первым игроком, координата второго игрока $y$ находится в пределах от 0 до 1/2, то он, делая заявку $y_0=2y$ заставляет первого игрока подойти непосредственно к себе (тогда перемещение второго игрока равно 0), а если в пределах от 1/2 до 1, то делая заявку $y_0=1$, он заставляет первого игрока подойти в точку 1/2, и таким образом его перемещение составляет $y-1/2$, тогда среднее расстояние, проходимое вторым игроком, составляет $\frac{1}{2}\cdot 0+\int_{1/2}^{1}\left(y-\frac{1}{2}\right)dy=\frac{1}{8}.$

Заметим, что если бы игроки сообщали друг другу свои истинные координаты, то расстояние между случайно выбранными точками на отрезке имело бы такое же распределение, как и расстояние от конца отрезка до ближайшей из выбранных точек, т. е. распределение с функцией $F(x) = 1-(1-x)^2$ и плотностью $f(x) = 2(1-x)$, тогда среднее расстояние равно $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{3}$ и, следовательно, каждый из игроков проходит к месту встречи половину этого расстояния, т. е. 1/6. В рассмотренной игровой ситуации первый игрок оказывается в более проигрышной ситуации и вынужден проходить на 1/24 больше, а второй на 1/24 меньше по сравнению с ситуацией честного обмена информацией.

*С.І. Доценко*

ГРА У ЗУСТРІЧ НА ВІДРІЗКУ

Розглянуто ігрову задачу, для якої множиною допустимих стратегій гравців є точки одиничного відрізку. В задачі, що носить назву гри у зустріч на відрізку, гравці мають взаємне бажання зустрітись у деякій точці, однак кожен з гравців прагне мінімізувати свою відстань до місця зустрічі. Для даної задачі знайдено рівновагу за Нешем у чистих стратегіях та показано, що більш інформований гравець опиняється у більш вигідному становищі, та середня відстань, яку він має пройти до місця зустрічі є меншою, ніж для менш інформованого гравця.

*S.I. Dotsenko*

ON RENDEZVOUZ GAMES ON THE SEGMENT

The considered game problem is about rendezvous at unit segment where both players are wish to meet at some point but each one wish to minimize his shifting to meeting point. For this problem the Nash equilibrium was found and it was also shown, that more informed player is in more advantage, than the other one in the meaning, that he has opportunity to move to meeting point less distance, than his partner.

1. *Alpen S., Gal S.* The theory of search games and rendezvouz // Kluwer's international series.– 2003. – 319 p.
2. *Мазалов В.В.* Математическая теория игр. – Спб.: изд-во «Лань», 2010. – 446 с.
3. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. – Спб.: изд-во «БХВ-Петербург», 2012. – 432 с.

Получено 16.02.2015