УДК 519.85

В.В. БОЙКО, В.В. ГОРИН, Г.В. КУЗЬМЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК»

Рассматривается соотношение между таблицами «затраты-выпуск» и матрицами прямых затрат в модели Леонтьева. Предлагается оптимизационная задача нахождения базовой матрицы прямых затрат, общей для некоторого периода. Рассчитывается динамика характеристик таблиц «затраты-выпуск» на примере данных Великобритании.

Введение. Таблицы «затраты-выпуск» – это основа для проведения анализа и исследований в макроэкономической области с использованием межотраслевого баланса [1]. Для проведения анализа используются статистические экономические даные, собранные в виде таких таблиц [2 – 4]. Те же таблицы используются для решения различных задач прогнозирования в экономике, например [5], для определения факторов влияния при проведении структурно-технологических преобразований в экономике [6].

Для построения прогнозов важно установить тенденции изменения показателей и характеристик, связанных с таблицами. Это можно сделать, анализируя серию последовательных таблиц и учитывая тот факт, что статистические данные, представленные в виде таблиц балансов, могут содержать значительные ошибки и корректирующие добавки, вводящиеся для достижения теоретически необходимых балансовых соотношений [4].

На основе таблиц «затраты-выпуск» вычисляются матрицы коэффициентов прямых затрат A и характеристики данных матриц, которые представляют как математический, так и экономический интерес. Также рассмотрим сингулярные числа матриц A, собственные числа Фробениуса и их оценки [7 – 9], а также динамику изменения данных характеристик.

Приведем теоретические основы, используемые далее для вычисления и анализа характеристик анализа серии последовательных таблиц «затраты-выпуск».

Таблицы «затраты-выпуск» дают основу для вычисления матрицы A коэффициентов прямых затрат модели Леонтьева. Предполагается, что матрица A удовлетворяет свойствам неотрицательности, неразложимости, продуктивности [7].

Теорема Перрона – Фробениуса утверждает, что для неотрицательной неразложимой матрицы A существует положительное собственное число (число Фробениуса) $\lambda_A > 0,$ которое не меньше, чем модуль любого другого собственного числа. Этому числу соответствует единственный положительный единичный собственный вектор $\bar{x}_A > 0$ (вектор Фробениуса).

Оценки числа Фробениуса λ_A. Пусть $r = \min\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij};$ $R = \max\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij};$ $s = \min\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij};$ $S = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$ Тогда $r \le \lambda_A \le R,$ $s \le \lambda_A \le S.$ Для неразложимой матрицы A неравенства выполняются как строгие, кроме случая $r = R,$ $s = S.$

Для того, чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\lambda_A < 1.$

Достаточное условие продуктивности матрицы A – существование решения системы $(I - A)x = c$ хотя бы для одного положительного вектора $c > 0$.

Другое достаточное условие продуктивности для неотрицательной и неразложимой матрицы $A,$ связано с оценками s, S числа Фробениуса. А именно, если $s < 1$ и $S \le 1$ или $r < 1$ и $R \le 1,$ то матрица A продуктивна.

Матрица A может быть задана в различные единицах измерения как по столбцам, так и по строкам.

Однако, в статистических отчетах [2 – 4] матрицы прямых затрат непосредственно не приводятся. Приводятся таблицы Z «затраты-выпуск».

Рассмотрим матрицу коэффициентов прямых затрат A_0 в натуральных единицах. Коэффициенты матрицы A_0 будут иметь размерность выраженную удельными единицами измерения, например, в первой строке матрицы 4 х 4 элементы могут иметь размерности $(м/м,\ \ м/т,\ \ м/кг,\ \ м/л).$ Чтобы получить матрицу Z_0 прямых затрат нужно умножить A_0 на матрицу выпусков в натуральных единицах $X_0.$ Матрица X_0 – это диагональная матрица с размерностями строк $(м, т, кг, л).$ Матрица $Z_0 = A_0 X_0$ будет иметь различные размерности строк $(м, т, кг, л).$

Чтобы получить матрицу прямых затрат в денежном выражении нужно домножить Z_0 справа на диагональную матрицу цен P_0, у которой будут различны размерности столбцов, например, $(грн/м,\quad грн/т,\quad грн/кг,\quad грн/л)$. В результате матрица $Z = P_0 A_0 X_0$ будет содержать затраты с размерностью *грн.* Вектор выпуска с той же размерностью является диагональю матрицы $X = P_0 X_0$. Матрицы Z, X представлены в статистических отчетах.

Вектор потребления d можно вычислить как $d = (X - Z)e,$ где e – вектор состоящий из единиц.

Чтобы вычислить разность $I - A,$ используемую в модели Леонтьева, где I – единичная матрица, можно умножить разность $X - Z$ на X^{-1} как слева, так и справа. Получаем

$$X^{-1}(X - Z) = (P_0 X_0)^{-1}(P_0 X_0 - P_0 A_0 X_0) = I - X_0^{-1} A_0 X_0 = I - A_1,$$

$$(X - Z)X^{-1} = (P_0 X_0 - P_0 A_0 X_0)(P_0 X_0)^{-1} = I - P_0 A_0 P_0^{-1} = I - A_2. \qquad (1)$$

В первом случае строки Z делятся на диагональне элементы X и строки матрицы $A_1 = X^{-1}Z$ содержат доли выпуска конечного продукта, используемые в отраслях. Во втором случае столбцы Z делятся на диагональне элементы X и столбцы матрицы $A_2 = ZX^{-1}$ содержат доли стоимости продуктов отраслей в стоимости отдельного продукта.

Рассмотрим также третий вариант вычисления матрицы A

$$\sqrt{X^{-1}}\,(X - Z)\sqrt{X^{-1}} = I - \sqrt{X^{-1}}Z\sqrt{X^{-1}} = I - A_3.$$

Если матрица A_0 имеет собственное число λ и собственный вектор x_0, то матрицы A_1, A_2, A_3 имеют такое же собственное число и собственный вектор, соответственно $x_1 = X_0^{-1}x_0,\ x_2 = P_0 x_0,\ x_3 = \sqrt{X_0^{-1}P_0}\,x_0.$

Матрицы $Z,\ X,$ которые приводятся в статистических отчетах, – результат агрегирования по большому числу подотраслей, производящих продукцию, измеряемую различными натуральными единицами. Поэтому восстановление некоторой гипотетической матрицы A_0, детально описывающей коэффициенты прямых затрат, по матрицам Z, X является невозможным. При этом, учитывая то, что объемы производства X_0 и цены P_0 более изменчивы, чем технологическая матрица A_0, то представляет интерес вычисление некой агрегированной матрицы A_0^a по матрицам Z_t, X_t за несколько последовательных лет, условно считая, что A_0^a не изменяется.

Поставим задачу следующим образом. Есть данные таблиц «затраты-выпуск» Z_t, X_t за T лет, $t=1,\ldots,T$. Найти матрицу A_0^a общую для периодов $t=1,\ldots,T$.

Пусть Y_t – диагональная матрица, оценивающая агрегированный вектор X_0 в году t. Тогда из (1) получаем $X_t^{-1}Z_t = Y_t^{-1}A_0^t Y_t$ или $Y_t X_t^{-1} Z_t Y_t^{-1} = A_0^t$, где A_0^t – оценка матрицы A_0^a по данным года t. Обозначим $\Delta_{ij}^t = a_{ij}^t - a_{ij}^a$, $i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,n$ – разность между элементами матриц A_0^t и A_0^a. Тогда задача по критерию минимума суммарных абсолютных отклонений записывается так

$$\min_{A_0^a, Y_t, t=1,\ldots,T} \sum_{i,j,t} \left|\Delta_{ij}^t\right|, \tag{2}$$

$$\Delta_{ij}^t = \left(z_{ij}^t / x_i^t\right) y_{ii}^t / y_{jj}^t - a_{ij}^a,\ i=1,\ldots,n,\ \ j=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots,T, \tag{3}$$

$$y_{ii}^t > 0,\ i=1,\ldots,n,\ \ t=1,\ldots,T, \tag{4}$$

$$a_{ij}^a \ge 0,\ \ i=1,\ldots,n,\ \ j=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Задача (2) – (5) является невыпуклой и может быть приближенно решена, например, PNK-методом [10].

Для того чтобы оценить период $[1,\ldots,T]$, для которого матрицу A_0^a можно считать постоянной, вычислим для примера характеристики матриц A_1 в (1) по данным Великобритании за 1992 – 2004 года [3]. Заметим, что собственные числа Фробениуса для оценочных матриц A_0^t не зависят от оценок Y_t и совпадают с числами Фробениуса λ_t матриц $A_{1t} = X_t^{-1}Z_t$. Рассчитаем также границы r, R, s, S и сингулярные числа σ_t матриц A_{1t}. Сингулярное число рассчитывается как корень из числа Фробениуса матрицы $A_{1t}A_{1t}^*$ [9], где * – знак транспонирования.

Отметим, что приведенные в таблице характеристики матриц A_{1t}, рассчитанные по серии последовательных таблиц «затраты-выпуск», оказываются достаточно стабильными. Границы s, S имеют некоторую тенденцию к уменьшению, граница r – к возрастанию. Собственное число Фробениуса сохраняет относительное постоянство, а сингулярное число σ_t уменьшается.

С точки зрения экономики величина числа Фробениуса говорит об эффективности функционирования производства. Так для Украины числа Фробениуса рассчитанные для 2003–2009 годов имеют значения 0,566 – 0.596 [9]. Значения 0,391 – 0,414, полученные выше, говорят о более эфективно функционирующей экономике.

ТАБЛИЦА

Год	s	S	r	R	λ_t	σ_t
1992	0.0972	1.3771	0.0355	0.6854	0.3957	0.6820
1993	0.0973	1.4177	0.0412	0.6485	0.3910	0.6888
1994	0.1110	1.4166	0.0423	0.6549	0.3994	0.6919
1995	0.1108	1.4048	0.0447	0.6608	0.4023	0.6893
1996	0.1016	1.3777	0.0419	0.6712	0.4006	0.6729
1997	0.0972	1.3607	0.0411	0.6775	0.4059	0.6675
1998	0.1064	1.2844	0.0401	0.6868	0.4070	0.6530
1999	0.1021	1.2437	0.0424	0.6805	0.4142	0.6387
2000	0.1011	1.2423	0.0420	0.6750	0.4138	0.6337
2001	0.0890	1.2199	0.0499	0.6687	0.4097	0.6274
2002	0.0820	1.2097	0.0549	0.6678	0.4012	0.6247
2003	0.0848	1.2037	0.0531	0.6643	0.4005	0.6270
2004	0.0832	1.2094	0.0569	0.6774	0.3912	0.6332

Заключение. Сделанные теоретические построения и проведенные вычисления показывают, что динамика характеристик серии последовательных таблиц «затраты-выпуск» может быть незначительной. Это позволяет использовать данные за некоторый период лет для поиска некоторой базовой матрицы коэффициентов прямых затрат общей для рассматриваемого периода. Такая матрица в отличие от ежегодных цен и выпусков продукции сохраняет большую неизменность и может быть приблизительно вычислена путем решения аппроксимирующей невыпуклой оптимизационной задачи. Дальнейшее развитие работы будет направлено на поиск наиболее практичной постановки задачи типа (2) – (5) и ее решения для различных данных, используя различные методы.

В.В. Бойко, В.В. Горін, Г.В. Кузьменко

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРІЇ ПОСЛІДОВНИХ ТАБЛИЦЬ «ВИТРАТИ-ВИПУСК»

Розглядається співвідношення між таблицями «витрати-випуск» та матрицями прямих витрат у моделі Леонтьєва. Запропонована оптимізаційна задача знаходження базової матриці прямих витрат, що є спільною для певного періоду. Розраховується динаміка характеристик таблиць «витрати-випуск» на прикладі даних Великобританії.

V.V. Boyko, V.V. Gorin, H.V. Kuzmenko

A STUDY OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SEQUENTIAL SERIES
OF «INPUT-OUTPUT» TABLES

A relationship between «input-output» tables and matrices of input coefficients in Leontiev model is considered. An optimization problem for finding a base matrix of input coefficients joint for some period is proposed. As example dynamic characteristics of «input-output» tables using Great Britain data is calculated.

1. *Леонтьев В.В.* Общеэкономические проблемы межотраслевого анализа // Собрание избранных трудов В.В. Леонтьева в трех томах / Научный редактор А.Г. Гранберг. –Том I. – М.: «Экономика», 1999.
2. *Таблиця* «витрати-випуск» України у цінах споживачів за 2003 – 2011 роки // Статистичний збірник. Державна служба статистики України, 2013. – Інтернет-доступ: http://ukrstat.gov.ua/
3. *United* Kingdom Input-Output Analyses, 2006 Edition. – London: Office for National Statistics, 2006. – 395 p.
4. *Eurostat* Manual of Supply, Use and Input-Output Tables. – Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2008. – 590 p.
5. *Карпец Э.П., Кикоть А.Ф., Панасенко С.В.* Проблемы прогнозирования сбалансированных экономических структур // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – С. 42 – 49.
6. *Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И. и др.* Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при произведении структурно-технологических преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 26 – 49.
7. *Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Сучасний економічний аналіз. Ч. 2: Макроекономіка. – К.: Вища школа, 2004. – 2008 с.
8. *Стецюк П.И., Бондаренко А.В.* О спектральных свойствах модели Леонтьева // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2010. – С. 84 – 90.
9. *Стецюк П.И., Эмменеггер Ж.-Ф.* Максимальное сингулярное число матрицы и его экономическая интерпретация // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 51 – 57.
10. *Бойко В.В., Горин В.В., Кузьменко В.Н.* Особенности применения *PNK*-метода в случае невыпуклых ограничений // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2014. – С. 10 – 15.

Получено 14.04.2015