УДК 519.21

К.Г. ДЗЮБЕНКО

РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Для стохастического дифференциального уравнения управляемого процесса найден явный вид решения и доказана его единственность. Для интегрального функционала по процессу с ортогональными приращениями доказаны формула перемены порядка интегрирования и формула дифференциала.

Нахождение решения дифференциального уравнения для управляемого случайного процесса, установление его единственности повсеместно велись интуитивно, без доказательств. В статье предложены точные ответы на такие вопросы. Это создает возможности приложений для задач вывода целевой функции на множество и связанных с ними проблем оптимизации.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ – вероятностное пространство, на котором заданы рассматриваемые случайные объекты. N и R – множества всех натуральных и действительных чисел. Всюду далее рассматриваются детерминированные и случайные функции с действительными значениями. Пусть $t_1, t_2 \in R$, $t_1 < t_2$. Случайный процесс $X(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, – процесс с ортогональными приращениями, если $M(X(t_2) - X(t_1))^2 < +\infty$ и

$$M(X(s_2) - X(s_1))(X(s_4) - X(s_3)) = 0,$$

$t_1 \le s_1 \le s_2 \le s_3 \le s_4 \le t_2$. Структурной функцией данного процесса назовем $G_X(t) = M(X(t) - X(t_1))^2$, $t \in [t_1, t_2]$. Она является неубывающей. Случайные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, стохастически эквивалентны, если $X_1(t) = X_2(t)$, п.н., $t \in [t_1, t_2]$. В таком случае говорят, что $X_2(t)$ – модификация $X_1(t)$, – и наоборот. Процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ неотличимы п.н., если $\sup_{t \in [t_1, t_2]} | X_1(t) - X_2(t) | = 0$ п.н.

Пусть $X(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – случайный процесс с ортогональными приращениями, $a(\cdot,\cdot)$ и $b(\cdot,\cdot)$ – функции $[t_1,t_2]\times R\to R.$ Стохастическим дифференциальным уравнением (уравнением Ито) называется уравнение

$$dY(t)=a(t,Y(t))\,dt+b(t,Y(t))\,dX(t),\ t\in[t_1,t_2], \tag{1}$$

для неизвестного случайного процесса $Y(t),\ t\in[t_1,t_2],$ понимаемое в смысле

$$Y(t)-Y(t_1)=\int_{t_1}^{t}a(s,Y(s))\,ds+\int_{t_1}^{t}b(s,Y(s))\,dX(s)\ \text{п.н.},\ t\in[t_1,t_2].$$

Предполагается, что для каждого $t\in[t_1,t_2]$ интеграл Лебега $\int_{t_1}^{t}a(s,Y(s))\,ds$ и стохастический интеграл $\int_{t_1}^{t}b(s,Y(s))\,dX(s)$ существуют п.н. В случае, когда $X(t)$ – процесс броуновского движения, широко известно достаточное условие существовании решения уравнения (1), единственного с точностью до неотличимости п.н. в классе непрерывных функций ([1], с. 469 – 470). Рассмотрим более конкретное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY(t)=a(t)Y(t)\,dt+u(t)\,dt+b(t)\,dX(t),\ t\in[t_1,t_2], \tag{2}$$

где $Y(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – целевой случайный процесс, $u(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – случайный процесс управления, $a(t)$ и $b(t)$ – ограниченные измеримые функции $[t_1,t_2]\to R.$ Для любого $n\in N$

$$T_n=\{t_1=t_{n0}<t_{n1}<...<t_{nn}=t_2\} \tag{3}$$

– разбиение отрезка $[t_1,t_2]$ *на* n частей, $d(T_n)=\max_{k=\overline{0,n-1}}(t_{n,k+1}-t_{nk})$ – диаметр разбиения T_n. Для случайной функции $v(\cdot,\cdot):[t_1,t_2]\times\Omega\to R$ $\int_{t_1}^{t_2}v(t,\omega)\,dt$ понимается как интеграл Лебега от $v(\cdot,\omega)$, существующий п.н. Также $\Delta v(t_{nk})=v(t_{n,k+1})-v(t_{nk}),\quad k=\overline{0,n-1},\quad n\in N.$ Будут применяться неравенства $|MX|\le M|X|\le\sqrt{M(X^2)},\quad M(X+Y)^2\le 2(M(X^2)+M(Y^2))$ для случайных величин $X,\ Y$ и неравенство $\left(\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt\right)^2\le(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}(f(t))^2\,dt$ для измеримой функции $f(\cdot):[t_1,t_2]\to R$. Для произвольного множества S $I_S(x)=1,$ $x\in S$, и $I_S(x)=0,\ x\notin S$. Вероятностная мера $P(\cdot)$ предполагается пополненной до *полной* меры, т. е. такой, что для любого $A\in\mathscr{F}$ с $P(A)=0$ из $B\subset A$ следуют $B\in\mathscr{F}$ и $P(B)=0$. Аналогично предполагается пополненной мера dG_X, заданная на σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств $S\subset[t_1,t_2]$ как $\int_S dG_X=\int_{t_1}^{t_2}I_S(t)\,dG_X(t)$ (в правой части – интеграл Лебега – Стилтьеса по структурной функции). Полнота мер требуется для обеспечения условий теоремы Фубини ([2], с. 317). Чтобы найти решение уравнения (2) (теорема 3), докажем три важных утверждения.

Лемма. Пусть $t_1 < t_2$ и $X(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – случайный процесс с ортогональными приращениями. Тогда существует п.н. $\int_{t_1}^{t_2} X(t)\,dt$ и

$$\int_{t_1}^{t_2} t\,dX(t) = t_2\,X(t_2) - t_1\,X(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} X(t)\,dt \text{ п.н.}$$

Доказательство. Верны соотношения

$$M\int_{t_1}^{t_2} |\,X(t)\,|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} M\,|\,X(t)\,|\,dt \le \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{M(X(t))^2}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{M((X(t_1) + (X(t) - X(t_1))^2}\,dt \le \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2\,(M(X(t))^2 + M(X(t) - X(t_1))^2)}\,dt \le$$

$$\le \sqrt{2M(X(t_1))^2 + 2G_X(t_2)}\,(t_2 - t_1) < +\infty$$

(применена теорема Фубини для модуля функции, [2], с. 318). Поэтому существуют п.н. интегралы Лебега $\int_{t_1}^{t_2} |\,X(t)\,|\,dt$ и $\int_{t_1}^{t_2} X(t)\,dt$ (существование интеграла Лебега от функции и от ее модуля равносильно). Для любых $n \in N$ и любых разбиений вида (3) верны равенства

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} t_{nk}\,\Delta X(t_{nk}) = t_{nn} X(t_{nn}) - t_{n0} X(t_{n0}) - \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} X(t_{n,k+1})\Delta t_{nk} =$$

$$= t_2 X(t_2) - t_1 X(t_1) - \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} X(t_{nk})\Delta t_{nk} - \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \Delta X(t_{nk})\,\Delta t_{nk}. \qquad (4)$$

Пусть $d(T_n) \to 0$, $n \to \infty$. Обозначим $f_n(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} t_{nk} I_{[t_{nk}, t_{n,k+1})}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $n \in N$. $\int_{t_1}^{t_2} f_n(t)\,dX(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} t_{nk}\,\Delta X(t_{nk})$, $n \in N$, сходится в среднеквадратическом (с.к.) к $\int_{t_1}^{t_2} t\,dX(t)$ ввиду $\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} (t - f_n(t))^2\,dG_X(t) = 0$ ([3], с. 31):

$$\int_{t_1}^{t_2} (t - f_n(t))^2\,dG_X(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} (t - t_{nk})^2\,dG_X(t) \le$$

$$\le (d(T_n))^2 \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \Delta G_X(t_{nk}) = (d(T_n))^2\,G_X(t_2) \to 0,\ n \to \infty.$$

Верны соотношения $M\left(\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \Delta X(t_{nk})\,\Delta t_{nk}\right)^2 = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} M(\Delta X(t_{nk}))^2\,(\Delta t_{nk})^2 \le$ $\le G_X(t_2)\,(d(T_n))^2 \to 0$, $n \to \infty$ (применены равенства $M(\Delta X(t_{nk_1})\Delta X(t_{nk_2})) = 0$, $k_1 \ne k_2$). Поэтому из (4) следует, что $\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} X(t_{nk})\,\Delta t_{nk}$ сходится в с.к. Этот предел равен $\int_{t_1}^{t_2} X(t)\,dt$ п.н., поскольку

$$M\left|\int_{t_1}^{t_2} X(t)\,dt - \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} X(t_{nk})\,\Delta t_{nk}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\,dt \to 0,\ n \to \infty.$$

Здесь к $g_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1} M\,|\,X(t)-X(t_{nk})\,|\,I_{[t_{nk},t_{n,k+1})}(t),\ \ t\in[t_1,t_2],$ применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости ([2], с. 302). Ибо $M|\,X(t)-X(t_{nk})\,|\le$ $\le\sqrt{M(X(t)-X(t_{nk}))^2}=\sqrt{G_X(t)-G_X(t_{nk})}\le\sqrt{G_X(t_2)}$, $t\in[t_1,t_2]$, $k=\overline{0,n-1}$, $n\in N.$ А $G_X(t)-G_X(t+o(1))\to 0,\ \ n\to\infty$ для всех $t\in[t_1,t_2]$ кроме не более чем счетного множества точек (меры Лебега нуль), где неубывающая ограниченная функция $G_X(\cdot)$ имеет разрывы ([2], с. 322).

Теорема 1. Пусть $t_1<t_2,$ и выполнены условия:

1) $X(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – случайный процесс с ортогональными приращениями;

2) $h(t,s),\ s\in[t_1,t],\ t\in[t_1,t_2]$ – ограниченная измеримая по (t,s) функция.

Тогда верны утверждения:

1. $\int_s^{t_2} h(t,\,s)\,dt$ существуют и измеримы по $s\in[t_1,t_2]$ dG_X-п.в.

2. $\int_{t_1}^{t} h(t,\,s)\,dX(s)$ существуют п.н. для всех $t\in[t_1,t_2]$.

3. $$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_s^{t_2} h(t,s)\,dt\right)dX(s)=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t} h(t,s)\,dX(s)\right)dt \text{ п.н.} \qquad (5)$$

Доказательство. Положим $\mathrm{K}=\{(t,s):s\in[t_1,t],t\in[t_1,t_2]\}.$ Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_s^{t_2}|\,h(t,\,s)\,|\,dG_X(s)\,dt\le H(t_2-t_1)\,G_X(t_2)<+\infty,$$

где $H=\sup_{(t,s)\in\mathrm{K}}|\,h(t,s)\,|<+\infty$. Теорема Фубини для модуля функции влечет утверждение 1. $\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_s^{t_2} h(t,\,s)\,dt\right)dX(s)$ существует п.н. ([3], с. 30 – 31) ввиду

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_s^{t_2} h(t,\,s)\,dt\right)^2 dG_X(s)\le H^2(t_2-t_1)^2\,G_X(t_2)<+\infty.$$

$\int_{t_1}^{t_2}(h(t,\,s))^2\,dG_X(s)\le H^2\,G_X(t_2)<+\infty$ влечет утверждение 2. Также

$$\int_{t_1}^{t_2} M\left|\int_{t_1}^{t} h(t,\,s)\,dX(s)\right|dt\le\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{M\left|\int_{t_1}^{t} h(t,\,s)\,dX(s)\right|^2}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\int_{t_1}^{t}(h(t,\,s))^2\,dG_X(s)}\,dt\le H\,(t_2-t_1)\sqrt{G_X(t_2)}<+\infty$$

(применена лемма из [3], с. 31). Тогда конечен двойной интеграл от функции $\left|\int_{t_1}^{t} h(t,\,s)\,dX(s)\right|$ по мере $dt\otimes P(d\omega),$ он равен обоим повторным ([2], с. 313 – 314, 318). Повторный интеграл в правой части (5) существует п.н. ввиду

$$M\int_{t_1}^{t_2}\left|\int_{t_1}^{t} h(t,s)\,dX(s)\right|dt=\int_{t_1}^{t_2} M\left|\int_{t_1}^{t} h(t,s)\,dX(s)\right|dt<+\infty\ .$$

Рассмотрим произвольную последовательность разбиений T_n вида (3) с $d(T_n)\to 0$, $n\to\infty$. При любых $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ и $l\in\{0,\ldots,k\}$ равенство (5) выполнено для функции $I_{[t_{nk},t_{n,k+1})}(t)\,I_{[t_{nl},t_{n,l+1})}(s)$, $s\in[t_1,t]$, $t\in[t_1,t_2]$, ввиду

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s}^{t_2} I_{[t_{nk},t_{n,k+1})}(t)\,I_{[t_{nl},t_{n,l+1})}(s)\,dt\right)dX(s)=\int_{t_{nl}}^{t_{n,l+1}}(t_{n,k+1}-\max(s,t_{nk}))\,dX(s)=$$

$$=\begin{cases}(t_{n,k+1}-t_{nk})(X(t_{n,l+1})-X(t_{nl})),\ l\le k-1;\\ t_{n,k+1}(X(t_{n,k+1})-X(t_{nk}))-\int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} s\,dX(s),\ l=k;\end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t} I_{[t_{nk},t_{n,k+1})}(t)\,I_{[t_{nl},t_{n,l+1})}(s)\,dX(s)\right)dt=\int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}}(X(\min(t,t_{n,l+1}))-X(t_{nl}))\,dt=$$

$$=\begin{cases}(t_{n,k+1}-t_{nk})(X(t_{n,l+1})-X(t_{nl})),\ l\le k-1;\\ \int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} X(t)\,dt-X(t_{nk})(t_{n,k+1}-t_{nk}),\ l=k.\end{cases}$$

При $l\le k-1$ равенство верно. Оно верно и при $l=k$:

$$t_{n,k+1}(X(t_{n,k+1})-X(t_{nk}))-\int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} s\,dX(s)=t_{n,k+1}X(t_{n,k+1})-t_{n,k+1}X(t_{nk})-$$

$$-(t_{n,k+1}X(t_{n,k+1})-t_{nk}X(t_{nk})-\int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} X(s)\,ds)=\int_{t_{nk}}^{t_{n,k+1}} X(s)\,ds-X(t_{nk})(t_{n,k+1}-t_{nk})$$

(применена лемма). Множество ступенчатых функций вида

$$h_n(t,s)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k} c_{nkl}\,I_{[t_{nk},t_{n,k+1})}(t)\,I_{[t_{nl},t_{n,l+1})}(s),\ (t,s)\in\mathrm{K},\tag{6}$$

где $c_{nkl}\in R$, $l\in\{0,\ldots,k\}$, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, $n\in N$, плотно в $L_2(\mathrm{K},dt\otimes dG_X)$ (ср. [2], с. 378 – 379). Найдется последовательность $\{h_n\}\subset L_2(\mathrm{K},dt\otimes dG_X)$ вида (6) такая, что h_n сходится к h по норме $L_2(\mathrm{K},dt\otimes dG_X)$. Верны соотношения

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s}^{t_2} h_n(t,s)\,dt\right)dX(s)=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t} h_n(t,s)\,dX(s)\right)dt\ \text{п.н.},\ n\in N,\tag{7}$$

$$M\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s}^{t_2}(h(t,s)-h_n(t,s))\,dt\right)dX(s)\right|^2=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s}^{t_2}(h(t,s)-h_n(t,s))\,dt\right)^2 dG_X(s)\le$$

$$\le\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)\left(\int_{s}^{t_2}(h(t,s)-h_n(t,s))^2\,dt\right)dG_X(s)\le$$

$$\le(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s}^{t_2}(h(t,s)-h_n(t,s))^2\,dt\right)dG_X(s)\to 0,\ n\to\infty$$

(применена лемма из [3], с. 31). Итак, случайные величины в левой части (7) сходятся в с.к. к величине в левой части (5). Величины из правой части (7) сходятся к случайной величине в правой части (5) в среднем порядка 1:

$$M\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t} h(t,s)\,dX(s)\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t} h_n(t,s)\,dX(s)\right)dt\right|\le$$

$$\le\int_{t_1}^{t_2} M\left|\int_{t_1}^{t}(h(t,\ s)-h_n(t,\ s))\,dX(s)\right|dt\le\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{M\left|\int_{t_1}^{t}(h(t,\ s)-h_n(t,\ s))\,dX(s)\right|^2}\,dt\le$$

$$\le\sqrt{(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}(h(t,\ s)-h_n(t,\ s))^2\,dG_X(s)\right)dt}\to 0,\ n\to\infty\,.$$

Левая и правая части (7) сходятся к соответствующим частям (5) в среднем порядка 1, и эти предельные величины равны п.н.

Теорема 2. Пусть $t_1<t_2$, и выполнены условия:

1) $X(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – случайный процесс с ортогональными приращениями;

2) $g(t,s),\ s\in[t_1,t],\ t\in[t_1,t_2]$ – ограниченная измеримая по (t,s) функция;

3) $g_t'(t,s),\ s\in[t_1,t],\ t\in[t_1,t_2]$ – ограниченная измеримая по (t,s) функция, непрерывная по $t\in[s,t_2]$ при каждом $s\in[t_1,t_2)$.

Тогда

$$d\left(\int_{t_1}^{t} g(t,s)\,dX(s)\right)=\left(\int_{t_1}^{t} g_t'(t,\ s)\,dX(s)\right)dt+g(t,t)\,dX(t)\,,\ t\in[t_1,t_2]\,.$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\int_{t_1}^{t} g(t,s)\,dX(s)=\int_{t_1}^{t}\left(\int_{t_1}^{u} g_u'(u,\ s)\,dX(s)\right)du+\int_{t_1}^{t} g(s,s)\,dX(s)\ \text{п.н.},\ t\in[t_1,t_2]\,.\quad(8)$$

$\int_{t_1}^{t} g(t,s)\,dX(s)$ и $\int_{t_1}^{t} g(s,s)\,dX(s)$ заданы п.н. ввиду условия 2) ([3], с. 30 – 31). Верно $g(t,\ s)-g(s,s)=\int_{s}^{t} g_u'(u,\ s)\,du$, $t_1\le s\le t\le t_2$. Поэтому (8) равносильно $\int_{t_1}^{t}\left(\int_{s}^{t} g_u'(u,\ s)\,du\right)dX(s)=\int_{t_1}^{t}\left(\int_{t_1}^{u} g_u'(u,\ s)\,dX(s)\right)du$ п.н., $t\in[t_1,t_2]$. Остается применить утверждения теоремы 1 с заменой t на u, t_2 на t, $h(t,\ s)$ на $g_u'(u,\ s)$.

Теорема 3. Пусть $t_1<t_2$ и выполнены условия:

1) $X(t),\ t\in[t_1,t_2]$, – случайный процесс с ортогональными приращениями;

2) $u(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – случайный процесс, для которого $\int_{t_1}^{t_2}|u(s)|\,ds<+\infty$ п.н.;

3) $a(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – непрерывная функция;

4) $b(t),\ t\in[t_1,t_2]$ – ограниченная измеримая функция;

5) $y_1(\omega)$ – случайная величина.

Тогда уравнение (2) с начальным условием $Y(t_1)=y_1$ п.н. имеет единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение

$$Y(t)=y_1 e^{\int_{t_1}^{t}a(\tau)d\tau}+\int_{t_1}^{t}e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}u(s)\,ds+\int_{t_1}^{t}e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}b(s)\,dX(s) \text{ п.н., } t\in[t_1,t_2]. \quad (9)$$

Доказательство. Теорема 2 применима к $g(t,\,s)=e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}b(s)$, $s\in[t_1,t]$, $t\in[t_1,t_2]$. Верны $g_t'(t,\,s)=e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}a(t)b(s)$, $g(t,\,t)=b(t)$, $s\in[t_1,t]$, $t\in[t_1,t_2]$. Пусть $A=\max_{s\in[t_1,t_2]}|\,a(s)\,|$. Процесс (9) удовлетворяет уравнению (2) ввиду

$$d\left(y_1 e^{\int_{t_1}^{t}a(\tau)d\tau}\right)=a(t)\,y_1 e^{\int_{t_1}^{t}a(\tau)d\tau}dt;$$

$$d\left(\int_{t_1}^{t}e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}b(s)\,dX(s)\right)=\left(a(t)\int_{t_1}^{t}e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}b(s)\,dX(s)\right)dt+b(t)\,dX(t);$$

$$\int_{t_1}^{t}e^{\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau}u(s)\,ds=\int_{t_1}^{t}\left(\int_{s}^{t}e^{\int_{s}^{v}a(\tau)d\tau}a(v)\,dv\right)u(s)\,ds+\int_{t_1}^{t}u(s)\,ds=$$

$$=\int_{t_1}^{t}a(v)\left(\int_{t_1}^{v}e^{\int_{s}^{v}a(\tau)d\tau}u(s)\,ds\right)dv+\int_{t_1}^{t}u(s)\,ds \text{ п.н., } t\in[t_1,t_2]$$

(применена теорема Фубини для модуля функции ввиду $\int_{t_1}^{t}\int_{s}^{t}\left|e^{\int_{s}^{v}a(\tau)d\tau}a(v)u(s)\right|ds\,dv\le Ae^{A(t_2-t_1)}(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}|\,u(s)\,|ds<+\infty$ п.н., $t\in[t_1,t_2]$).

Пусть процесс $Y_1(t)$, $t\in[t_1,t_2]$ – еще одно решение уравнения (2) с начальным условием $Y_1(t_1)=y_1$ п.н. Тогда $Z(t)=Y(t)-Y_1(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, удовлетворяет уравнению $Z(t)=\int_{t_1}^{t}a(s)\,Z(s)\,ds$ п.н., $t\in[t_1,t_2]$. Интегралы Лебега от $|\,a(s)\,Z(s)\,|$ также конечны п.н. Введем процесс $\tilde{Z}(t)=\int_{t_1}^{t}|\,a(s)\,||\,Z(s)\,|ds$ п.н., $t\in[t_1,t_2]$. Зафиксируем любые $t\in[t_1,t_2]$, $k\in N$ и $n\in N$. Верны неравенства $0\le|\,Z(t)\,|\le\int_{t_1}^{t}|\,a(s)\,||\,Z(s)\,|ds=\tilde{Z}(t)\le\tilde{Z}(t_2)$ п.н., $t\in[t_1,t_2]$. Для $m_k(t)=$ $=M\left(\tilde{Z}(t)\,I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)$ верны $m_k(t)\le k<+\infty$. Также

$$M\left(\tilde{Z}(t)\,I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)\le\int_{t_1}^{t}|\,a(s)\,|\,M\left(\tilde{Z}(s)\,I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)ds\le$$

$$\le\int_{t_1}^{t}|\,a(s_1)\,|\int_{t_1}^{s_1}|\,a(s_2)\,|..\int_{t_1}^{s_{n-1}}|\,a(s_n)\,|\,M\left(\tilde{Z}(s_n)\,I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)ds_1...ds_n$$

(применена теорема Фубини). $M\left(\tilde{Z}(s_n)\, I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)\le M\left(\tilde{Z}(t)\, I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)$ ввиду $s_n \le t,$ откуда $m_k(t)\le A^n(t_2-t_1)^n(n!)^{-1}m_k(t).$ $\lim_{n\to\infty} A^n(t_2-t_1)^n(n!)^{-1}=0$ и $m_k(t)\le k<+\infty$ влекут $m_k(t)=0.$ Из $\lim_{k\to\infty}\left(\tilde{Z}(t)\, I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)=\tilde{Z}(t)$ п.н. и $M\left(\tilde{Z}(t)\, I_{\{\tilde{Z}(t_2)\le k\}}\right)=0$ по теореме Фату следует $M\,\tilde{Z}(t)=0$ ([2], с. 305). Тогда и $M\,|\,Z(t)\,|=0.$ Следовательно, $Y_1(t)=Y(t)$ п.н. для произвольного $t\in[t_1,t_2].$

Комментарий. Пусть случайная величина $\tau:\Omega\to[t_1,t_2]$ распределена равномерно. Для любого решения $Y_1(t)$ уравнения (2) с начальным условием $Y_1(t_1)=y_1$ п.н. (задача Коши) процесс $Y_2(t,\omega)=Y_1(t,\omega)+I_{\{\tau(\omega)\}}(t),\quad t\in[t_1,t_2],$ $\omega\in\Omega$ – также решение этой задачи. При этом $Y_2(t)$ – модификация $Y_1(t),$ но они не неотличимы п.н. Для обеспечения неотличимости п.н. можно сузить класс рассматриваемых решений требованием непрерывности траекторий справа или слева п.н. Но тогда необходимы условия на $a(t),$ $b(t)$, $u(t)$ и особенно на $X(t),$ гарантирующие и для решения (9) наличие такого свойства.

К.Г. Дзюбенко

РОЗВ'ЯЗОК СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ
ДЛЯ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

Для стохастичного диференційного рівняння керованого процесу знайдено явний вигляд розв'язку, доведено його єдність. Для інтегрального функціонала по процесу з ортогональними приростами доведені формула зміни порядку інтегрування та формула диференціала.

K.G. Dziubenko

SOLUTION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION FOR CONTROL PROBLEM

Explicit solution shape and its uniqueness are proved for controlled process stochastic differential equation. Integration order change formula and differential formula are proved for integral functional over process with orthogonal increments.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
3. *Дзюбенко К.Г.* Непрерывность линейного функционала и стохастический интеграл // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 28 – 35.

Получено 26.03.2015