УДК 519.21

Е.Н. ДЕРИЕВА, А.П. КНОПОВ

О РАСЧЕТЕ СТОИМОСТИ ВАЛЮТООБМЕННЫХ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛЯХ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Предложен метод расчета справедливой цены валютообменных опционов в модели рынка, описывающей кросс-курс валют суммой чисто разрывного случайного процесса и модифицированного процесса Орштейна – Уленбека.

© Е.Е. Дериева, А.П. Кнопов, 2015

Введение. Валютообменные опционы являются широко распространенным деривативом для эффективного управления рисками валютообменных операций. Первые оценки опционов такого типа были сделаны для модели Блэка – Шоулса [1, 2], в которой предполагается, что волатильность рынка описывается броуновским движением. Значительно лучше финансовые процессы описывает модель финансового рынка под управлением дробного броуновского движения [3, 4], поскольку обладает свойством долговременной памяти, и модель с использованием процессов Орштейна – Уленбека [5]. Все эти модели предполагают непрерывное изменение цен акций, хотя на самом деле, например, под действием неэкономических факторов, они могут меняться скачкообразно.

В данной работе исследуется модель рынка, в которой динамика стоимости активов описывается с помощью суммы чисто разрывного процесса и процессов Орштейна – Уленбека, характеризующихся возвратом к среднему. Аналогичная задача расчета валютообменного опциона в модели дробной диффузии с дополнительными скачками была предложена Л. Ченом [6].

Задача расчета стоимости валютообменного опциона. Пусть $(\Omega, \Im, \Im_t, P)$ – вероятностное пространство с потоком σ-алгебр. Обозначим $V = \{V_t^d, t \geq 0\}$ случайный процесс, описывающий стоимость внутреннего бонда и $V = \{V_t^f, t \geq 0\}$ – внешнего бонда.

Данные процессы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$dV_t^d = r_t^d V_t^d dt,\ V_T^d = 1, \tag{1}$$

$$dV_t^f = r_t^f V_t^f dt,,\ V_T^f = 1, \tag{2}$$

где r_t^d, r_t^f – процентные ставки соответственно для внутренней и иностранной валют. Легко видеть, что

$$V_t^d = \exp\left\{-\int_t^T r_t^d dt\right\},\quad V_t^f = \exp\left\{-\int_t^T r_t^f dt\right\}.$$

Предположим, $S = \{S_t, t \in [0,T]\}$ процесс, описывающий динамику курса обмена валют на интервале времени $t \in [0, T]$, тогда ожидаемый возврат инвестиций равен $\ln\frac{E[S_T]}{S_0}$. В общем случае стоимость европейского валютообменного опциона колл с ценой исполнения K и временем исполнения T дается формулой

$$C(K,T) = E\left[S_T V_0^f - K V_0^d\right]_+,$$

а стоимость соответствующего опциона пут – формулой

$$P(K,T) = E\left[K V_0^d - S_T V_0^f\right]_+.$$

Используем подход к оцениванию опционов, предложенный в 1998 г. М. Бладтом и Т. Ридберг [7]. В отличие от традиционных инструментов, основанных на теории мартингалов [2, 5, 8], он не требует каких-либо ограничений на модель финансового рынка (полнота, безарбитражность).

Расчет стоимости валютообменного опциона для модели рынка с модифицированным процессом Орштейна – Уленбека. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \Im_t, P)$ задан винеровский процесс $W = \{W_t, \Im_t, t \ge 0\}$. Процесс Орштейна – Уленбека определяется как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = -aX_t dt + \gamma dW_t,\ X_0 = x_0,$$

где $a > 0$ и $\gamma > 0$. Это уравнение имеет решение

$$X_t = x_0 e^{-at} + \gamma e^{-at}\int_0^t e^{as} dW_s,$$

являющееся марковским гауссовским процессом. В дальнейшем будем считать $x_0 = 1$.

Процесс Орштейна – Уленбека имеет следующие важные характеристики:

$$E[X_t] = e^{-at} \to 0,\ t \to \infty \text{ и } Var[X_t] = \gamma^2 \frac{1-e^{-2at}}{2a} \to \frac{\gamma^2}{2a},\ t \to \infty.$$

Поскольку среднее и вариация асимптотически стабильны, процесс можно использовать для моделирования финансовых активов, а чтобы избежать отрицательных значений, удобнее использовать геометрический процесс Орштейна – Уленбека e^{X_t}.

Будем предполагать, что процесс, описывающий динамику курса обмена валют, имеет вид

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \tag{3}$$

а Y_t – сумма модифицированного процесса Орштейна – Уленбека и чисто разрывного процесса:

$$Y_t = e^{-\mu t} + \gamma e^{-\mu t} \int_0^t e^{as} dW_s + \sum_{k=1}^{Q_t} J_k, \tag{4}$$

где Q_t – случайное число скачков курса валют за период времени $[0, t]$, процесс Пуассона с параметром λ, а случайные величины J_k – одинаково распределены с $N\left(-\frac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right)$. Будем считать, что W_t, Q_t, J_k – независимы.

Теорема 1. Пусть стоимость бондов внутренней и внешней валюты описывается уравнениями (1) и (2), а кросс-курс – уравнениями (3) и (4). Тогда справедливая цена европейского валютообменного опциона на покупку (option call) с ценой исполнения K и временем исполнения T равна:

$$C(K,T) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!} \left(V_0^f S_0 \exp\left\{ e^{-3\mu T} \frac{1}{4a} \gamma^2 (e^{2aT} - 1) \right\} \Phi(d_2^n) - K V_0^d \Phi(d_1^n) \right), \tag{5}$$

а справедливая цена европейского валютообменного опциона на продажу (option put) с ценой исполнения K и временем исполнения T равна:

$$P(K,T) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!} \left(K V_0^d \Phi(-d_1^n) - V_0^f S_0 \exp\left\{ e^{-3\mu T} \frac{1}{4a} \gamma^2 (e^{2aT} - 1) \right\} \Phi(-d_2^n) \right), \tag{6}$$

где

$$d_1^n = \frac{\ln\left(\frac{S_0 V_0^f}{K V_0^d}\right) + e^{-\mu T}}{\sqrt{\frac{1}{2a} \gamma^2 e^{-2\mu T} \left(e^{2aT} - 1\right) + n\sigma_J^2}},$$

$$d_2^n = \frac{d_1^n - e^{-\mu T} - \frac{n\sigma_J^2}{2} - \sqrt{\frac{1}{2a}\gamma^2 e^{-2\mu T}\left(e^{2aT}-1\right)+n\sigma_J^2}}{\sqrt{\frac{1}{2a}\gamma^2 e^{-2\mu T}\left(e^{2aT}-1\right)+n\sigma_J^2}}$$

и имеет место равенство:

$$C(K,T) + KV_0^d = P(K,T) + S_0 V_0^f \,. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала рассчитаем стоимость опциона колл.

$$C(K,T) = E\left[\left(S_0 e^{Y_T} V_0^f - KV_0^d\right)_+\right] =$$

$$= E\left[\left(S_0 e^{Y_T} V_0^f - KV_0^d\right) I_A\right] = E\left[S_0 e^{Y_T} V_0^f I_A\right] - E\left[KV_0^d I_A\right],$$

где

$$A = \left\{S_0 e^{Y_T} V_0^f > KV_0^d\right\} = \left\{Y_T > \ln\left(\frac{KV_0^d}{S_0 V_0^f}\right)\right\},\ \ I_A(\omega) = \begin{cases}1, \omega \in A,\\ 0, \omega \notin A.\end{cases}$$

Поскольку процессы W_t, Q_t, J_k – независимы, случайная величина

$$\xi_n = e^{-\mu T} + \gamma e^{-\mu T}\int_0^T e^{as} dW_s + \sum_{k=1}^n J_k$$

является гауссовской со средним и дисперсией соответственно:

$$m_n = E\left[\xi_n\right] = e^{-\mu T} - \frac{n\sigma_J^2}{2},\quad \sigma_n^2 = Var\left[\xi_n\right] = \frac{1}{2a}\gamma^2 e^{-2\mu T}\left(e^{2aT}-1\right) + n\sigma_J^2.$$

Очевидно, $\left\{\xi_n > \ln\left(\frac{KV_0^d}{S_0 V_0^f}\right)\right\} = \left\{\ \eta_n > -d_1^n\right\}$, где $\eta_n = \frac{\xi_n - m_n}{\sigma_n}$.

Вычислим математические ожидания по отдельности.

$$E\left[KV_0^d I_A\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} E\left[KV_0^d I_A / Q_T = n\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} KV_0^d E\left[I_A / Q_T = n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} KV_0^d E\left[I_{\left\{\eta_n > -d_1^n\right\}}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} KV_0^d \Phi(d_1^n),$$

$$E\left[S_0 e^{Y_T} V_0^f I_A\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} E\left[S_0 e^{Y_T} V_0^f I_A / Q_T = n\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} V_0^f E\left[S_0 e^{Y_T} I_A / Q_T = n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} V_0^f S_0 E\left[e^{Y_T} I_{\left\{\eta_n > -d_1^n\right\}}\right] =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}V_0^f S_0\int_{-d_1^n}^{\infty}e^x\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}V_0^f S_0\exp\left\{m_n+\frac{\sigma_n^2}{2}\right\}\left(1-\Phi\left(\frac{d_1^n-m_n-\sigma_n^2}{\sigma_n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}V_0^f S_0\exp\left\{e^{-\mu T}\frac{1}{4a}\gamma^2e^{-2\mu T}\left(e^{2aT}-1\right)\right\}\Phi\left(d_2^n\right).$$

Аналогично

$$P(K,T)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}\left(KV_0^d\Phi(-d_1^n)-V_0^fS_0\right)xp\left\{e^{-\mu T}\frac{1}{4a}\gamma^2e^{-2\mu T}\left(e^{2aT}-1\right)\right\}\Phi\left(-d_2^n\right).$$

Таким образом,

$$C(K,T)-P(K,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}\left(V_0^fS_0-KV_0^d\right)=V_0^fS_0-KV_0^d.\ \blacksquare$$

Расчет стоимости валютообменного опциона для модели рынка с модифицированным дробным процессом Орштейна – Уленбека. Переходим к более общему случаю, заменив в вышеописанной модели винеровский процесс на дробное броуновское движение.

Дробное броуновское движение $B^H=\left\{B_t^H,\Im_t,t\geq 0\right\}$ с параметром Херста $H\in(0,1)$ – это заданный на вероятностном пространстве $\left(\Omega,\Im,P\right)$ гауссовский случайный процесс с $E\left[B_t^H\right]=0$, $t\geq 0,$ и $E\left[B_t^HB_s^H\right]=$ $=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-\left|t-s\right|^{2H}\right),\ t,s\geq 0$. Далее будем считать $H>1/2$.

Дробный процесс Орштейна – Уленбека определяется как:

$$X_t^H=x_0e^{-\mu t}+\gamma e^{-\mu t}\int_0^t e^{as}dB_s^H,$$

а сходимость интеграла следует из [2, 8]. Случайный процесс X_t^H – решение стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t^H=-\mu X_t^Hdt+\gamma e^{(a-\mu)t}dB_t^H,$$

и в момент времени T имеет среднее и дисперсию соответственно

$$m=E\left[X_T^H\right]=e^{-\mu T},$$

$$\sigma^2=Var\left[X_T^H\right]=H(2H-1)e^{-2\mu T}\int_0^T\int_0^T e^{a(s+u)}\left|s-u\right|^{2H-2}dsdu. \qquad (8)$$

Пусть Q_t, J_k такие же как в предыдущей задаче, B_t^H, Q_t, J_k – независимы, а процесс, описывающий кросс-курс валют, имеет вид

$$S_t = S_0 e^{Z_t}, \tag{9}$$

$$Z_t = e^{-\mu t} + \gamma e^{-\mu t} \int_0^t e^{as} dB_s^H + \sum_{k=1}^{Q_t} J_k. \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть стоимость бондов внутренней и внешней валюты описывается уравнениями (1) и (2), а кросс-курс – уравнениями (9) и (10). Тогда стоимость европейского валютообменного опциона колл с ценой исполнения K и временем исполнения T равна

$$C(K,T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!} \left(V_0^f S_0 \exp\left\{ e^{\mu T} + \frac{\sigma^2}{2} \right\} \Phi(\tilde{d}_2^n) - K V_0^d \Phi(\tilde{d}_1^n) \right),$$

$$P(K,T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!} \left(K V_0^d \Phi(-\tilde{d}_1^n) - V_0^f S_0 \exp\left\{ e^{\mu T} + \frac{\sigma^2}{2} \right\} \Phi(-\tilde{d}_2^n) \right),$$

$$\tilde{d}_1^n = \frac{\ln\left(\dfrac{S_0 V_0^f}{K V_0^d} \right) + e^{-\mu T}}{\sqrt{\sigma^2 + n\sigma_J^2}}, \quad \tilde{d}_2^n = \frac{\tilde{d}_1^n - e^{-\mu T} - \dfrac{n\sigma_J^2}{2} - \sqrt{\sigma^2 + n\sigma_J^2}}{\sqrt{\sigma^2 + n\sigma_J^2}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущего утверждения, достаточно только заметить, что математическое ожидание для $\tilde{\xi}_n = e^{-\mu T} + \gamma e^{-\mu T} \int_0^T e^{as} dB_s^H + \sum_{k=1}^{n} J_k$ равно $\tilde{m}_n = E\left[\tilde{\xi}_n\right] = e^{-\mu T} - \dfrac{n\sigma_J^2}{2}$, а дисперсия $\sigma_n^2 = Var\left[\tilde{\xi}_n\right] = \sigma^2 + n\sigma_J^2$, где σ^2 определена в соотношении (8). ■

Заключение. В работе выведены точные формулы для расчета валютообменных опционов европейского типа (с точной датой погашения) для обобщенной модели рынка, учитывающей скачкообразные изменения кросс-курса под воздействием неэкономических факторов, для полных и неполных рынков.

О.М. Дерієва, О.П. Кнопов

ПРО РОЗРАХУНОК ВАРТОСТІ ВАЛЮТООБМІННИХ ОПЦІОНІВ У МОДЕЛЯХ ІЗ СКАЧКООБРАЗНОЮ ДИФУЗІЄЮ

Запропоновано метод розрахунку справедливої ціни валютообмінних опціонів у моделі ринку, яка описує крос-курс валют за допомогою суми чисто розривного процесу та модифікованого процесу Орштейна – Уленбека.

O.M. Deriyeva, O.P. Knopov

PRICING FOREIGN EXCHANGE OPTION UNDER JUMP-DIFFUSION

We consider the model of financial market with asset price is governed by the sum of pure jamps process and modified Orstein-Uhlenbeck process and propose pricing scheme for foreign exchange option.

1. *Mamon R.* Three ways to solve for bond prices in the Vasicek model // Appl. Math. Decis. Sci. – 2004. – **8**(1). –– P. 1 – 14.
2. *Norros I., Valkeila A., Irtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – **5**(4) – P. 571 – 587.
3. *Cheredito P., Kawaguchi H., Maejima M.* Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes // Electronic Journal of Probability. – 2003. – **8**(3). – P. 1 – 14.
4. *Cheredito P.* Arbitrage in fractional Brownian motion models // Finance and Stochastics. – 2003. – **7**(4). – P. 533 – 553.
5. *Mishura Yu., Rizhniak G., Zubchenko V.* European call option issued on a bond governed by a geometric or a fractional geometric Ornstein-Uhlenbeck process // Modern Stochastics: Theory and Applications **1**. – 2014. – P. 95 – 108.
6. *Chen Li.* Pricing Foreign Exchange Option Under Fractional Jump-Diffusions // Progress in Applied Mathematics. – 2013. – **5**(2). – P. 48 – 54.
7. *Bladt M.T., Rydberg H.* An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumption // Insurance: Mathematics and Economics. – 1998. – **22**(1). – P. 65 – 73.
8. *Duncan T.E., Hu Y., & Duncan B.P.* Stochastic calculus for factional Brownian motion I // Theory. SIAM Journal on Control and Optimization. – 2000. – **38**(2).– P. 582 – 612.

Получено 02.12.2014