УДК 517.977

Ал.А. ЧИКРИЙ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СБЛИЖЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Рассматривается нестационарная задача с переменным терминальным множеством. В случае, когда условие Понтрягина не имеет места, предлагается прием, позволяющий получить достаточные условия сближения за конечное время.

Пусть движение объекта в R^n задается нестационарной системой уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t,u,v),\ z(t_0) = z_0,$$
$$t \ge t_0 \ge 0, \qquad (1)$$

где $A(t)$ – матричная функция порядка n с локально суммируемыми элементами. Управления игроков выбираются из компактозначных измеримых отображений $U(t)$ и $V(t)$ и являются измеримыми функциями времени. Блок управления $\varphi(t,u,v)$ удовлетворяет условию Каратеодори, функция $\varphi(t,u,v)$ измерима по t и непрерывна по совокупности (u,v). Предполагается также, что

$$\|\varphi(t,u,v)\| \le a(t)\ \forall u \in U(t),\ v \in V(t),$$
$$t \in [t_0, \infty), \qquad (2)$$

где $a(t)$ – числовая локально суммируемая функция.

Задано терминальное множество цилиндрического вида

$$M^*(t) = M_0 + M(t),\ t \in [t_0, +\infty), \qquad (3)$$

здесь M_0 – линейное подпространство в R^n, а $M(t)$ – измеримое компактозначное отображение со значениями в L – ортогональном дополнении к M_0 в R^n.

Рассматривается задача о сближении территории (1) с множеством (3) за конечное время. При этом предполагается, что первый игрок располагает информацией о начальном состоянии процесса (t_0, z_0) и предыстории управления убегающего

$$v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s),\ s \in [t_0, t]\},$$

т. е. использует квазистратегию [1, 2]. В дальнейшем будем считать, что блок управления имеет вид

$$\varphi(t,u,v) = f(t,u) + g(t,v).$$

Сформулируем аналог условия Понтрягина [3].

Условие 1. Существует такая дифференцируемая монотонно возрастающая функция $I(t)$, $I(t) \geq t$, $t \geq t_0$, причем $I(t_0) = t_0$, что многозначное отображение

$$W_I(t,\tau) = \pi\Phi(I(t), q(t,\tau))\, f(q(t,\tau), U(q(t,\tau)))\ \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-}\ \pi\Phi(I(t), \psi(t,\tau))\, g(\psi(t,\tau), V(\psi(t,\tau)))\, \dot{I}(t-\tau+t_0) \neq \varnothing$$

при $t \geq \tau \geq t_0$, где $q(t,\tau) = I(t) - t + \tau$, $\psi(t,\tau) = I(t) - I(t-\tau+t_0) + t_0$. Легко видеть, что $q(t,\tau) \geq \psi(t,\tau)$, $t \geq \tau \geq t_0$, в силу неравенства $I(t) \geq t \geq t_0$. Здесь $\Phi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородной системы (1).

Поскольку при условии 1 отображение $W_I(t,\tau)$ измеримо по τ, $\tau \in [t_0, t]$, и замкнутозначно, то в силу теоремы измеримого выбора в нем существует измеримый по τ селектор $\gamma_I(t,\tau)$, который мы фиксируем для дальнейшего.

Введем многозначное отображение

$$N(t) = \pi\Phi(I(t), t_0) z_0 + \int_{t_0}^{q(t,t_0)} \pi\Phi(I(t),\tau)\, f(\tau, U(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \gamma_I(t,\tau)\, d\tau.$$

Реализуя идеологию разрешающих функций [4], рассмотрим отображение

$$\mathcal{A}_I(t,\tau,v) = \{\alpha \geq 0 : [W_I(t,\tau,v) - \gamma_I(t,\tau)] \cap \alpha[M(I(t)) - N(t)] \neq \varnothing\},$$

$$v \in V(\psi(t,\tau)),\ t \geq \tau \geq t_0, \tag{4}$$

где

$$W_I(t,\tau,v) = \pi\Phi(I(t), q(t,\tau))\, f(q(t,\tau), U(q(t,\tau))) -$$

$$-\pi\Phi(I(t), \psi(t,\tau))\, g(\psi(t,\tau), v)\, \dot{I}(t-\tau+t_0).$$

Его опорная функция в направлении $+1$

$$\alpha_I(t,\tau,v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_I(t,\tau,v)\}.$$

Как следует из метода [2, 4], отображение $\mathcal{A}_I(t,\tau,v)$ и разрешающая функция $\alpha_I(t,\tau,v)$ являются $L \times B$-измеримыми по совокупности (τ, v) в областях своего определения.

Из выражения (4) вытекает, что если для некоторого t, $t > t_0$, $M\left(I(t)\right) \cap N(t) \neq \varnothing$, то $A_I(t,\tau,v) = [0,+\infty)$, а $\alpha_I(t,\tau,v) = +\infty$ для $v \in V\left(q(t,\tau)\right)$, $t_0 \leq \tau \leq t$.

Рассмотрим множество

$$T_I\left(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)\right) = \left\{ t \geq t_0 : \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha_I\left(t,\tau,v(\tau)\right) d\tau \geq 1 \right\}.$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется при всех $t > t_0$, то положим $T_I\left(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)\right) = \varnothing$.

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) $\varphi(t,u,v) = f(t,u) + g(t,v)$, выполнено условие 1 с некоторой функцией $I(t)$ и отображение $M(t)$, $t \geq t_0$, выпуклозначно.

Тогда, если для заданного начального состояния (t_0, z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma_I(t,\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$, многозначного отображения $W_I(t,\tau)$, что $T_I\left(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)\right) \neq \varnothing$ и $T_* \in T_I\left(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)\right)$, то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент $I(T_*)$ в классе квазистратегий.

Доказательство. Рассмотрим процесс (1) – (3), который функционирует в условиях теоремы на интервале $\left[t_0, I(T_*)\right]$. Пусть $v(s)$, $v(s) \in V(s)$, $s \in \left[t_0, I(T_*)\right]$, – произвольная измеримая функция. Рассмотрим сначала случай $M\left(I(T_*)\right) \cap N(T_*) = \varnothing$. На интервале $\left[t_0, q(T_*, t_0)\right]$ управление преследователя выберем следующим образом. Положим его равным такому измеримому селектору $u_0(s)$ отображения $U(s)$, что

$$\left[W_I(T_*, s, v) - \gamma_I(T_*, s)\right] \cap \alpha_I(T_*, s, v)\left[M\left(I(T_*)\right) - N_{u_0(\cdot)}(T_*)\right] \neq \varnothing,$$

где $N_{u(\cdot)}(t) = \pi\Phi\left(I(t), t_0\right) z_0 + \int\limits_{t_0}^{q(t,t_0)} \pi\Phi\left(I(t), s\right) f\left(s, u_0(s)\right) ds + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_I(t,s) ds.$

Таким образом, управление преследователя на начальном интервале равно $u_0(s)$, $s \in \left[t_0, q(T_*, t_0)\right]$.

Введем контрольную функцию

$$h_I(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha_I(T_*, \tau, v(\tau)) d\tau.$$

Тогда существует такой момент t_*, что $h_I(t_*) = 0$. Заметим, что момент t_* соответствует реальному времени. Соответственно, для деформированного с помощью функции $I(t)$ времени преследователя и убегающего получаем моменты $q(T_*, t_*)$ и $\psi(T_*, t_*)$. Промежутки времени $(q(T_*, t_0), q(T_*, t_*)]$ и $(q(T_*, t_*), I(T_*)]$ назовем активным и пассивным. Они соответствуют промежуткам $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T_*]$ в реальном времени.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_I(\tau, v) = \{u \in U(q(T_*, \tau)) : \pi\Phi(I(T_*), q(T_*, \tau)) f(q(T_*, \tau), u) - \pi\Phi(I(T_*),$$
$$\psi(T_*, \tau)) g(\psi(T_*, \tau), v) I(T_* - \tau + t_0) \in \bar{\alpha}_I(T_*, \tau, v)[M(I(T_*)) - N(T_*)]\},$$

$$v \in V(\psi(T_*, \tau)), \ \tau \in [t_0, T_*],$$

где $\bar{\alpha}_I(T_*, \tau, v) = \begin{cases} \alpha_I(T_*, \tau, v), & \tau \in [t_0, t_*] \\ 0, & \tau \in (t_*, T_*] \end{cases}.$

Это отображение $L \times B$-измеримо в силу теоремы об обратном образе и является замкнутозначным [5], поэтому в нем согласно теореме об измеримом выборе [5] существует $L \times B$-измеримый селектор

$$u(q(T_*, \tau), v(\tau)) = u(q(T_*, \tau), v(\psi(T_*, \tau))), \ \tau \in [t_0, T_*],$$

который и будет управлением преследователя на активном и пассивном участках. Если же $M(I(T_*)) \cap N(T_*) \neq \varnothing$, то на интервале $[t_0, q(T_*, t_0)]$ управление преследователя выберем из условия $N_{u(\cdot)}(T_*) \in M(I(T_*))$, а на интервале $(q(T_*, t_0), I(T_*)]$ – как на пассивном участке в предыдущем случае, т. е. с нулевой разрешающей функцией.

Покажем, что при указанном выборе управлений первого игрока соответствующие траектории конфликтно-управляемого процесса попадут на множество $M_0 + M(t)$ в момент $I(T_*)$.

Для этого рассмотрим формулу Коши

$$\pi z(t) = \pi\Phi(t,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \pi\Phi(t,\tau)\, f\left(\tau, u(\tau)\right)d\tau + \int_{t_0}^{t} \pi\Phi(t,\tau)\, g\left(\tau, v(\tau)\right)d\tau.$$

Пусть время для преследователя $q(t,\tau)$ проходит быстрее в сравнении с реальным временем, а для убегающего определяется функцией $\psi(t,\tau)$, где t, $t \geq \tau \geq t_0$, некоторый фиксированный момент. Сделав соответствующую замену переменных, получаем

$$\pi z\left(I(t)\right) = \pi\Phi\left(I(t),t_0\right)z_0 + \int_{t_0}^{q(t,t_0)} \pi\Phi\left(I(t),s\right) f\left(s,u_0(s)\right)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \pi\Phi\left(I(t),q(t,\tau)\right) f\left(q(t,\tau),u\left(q(t,\tau)\right)\right)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \pi\Phi\left(I(t),\psi(t,\tau)\right) g\left(\psi(t,\tau),v\left(\psi(t,\tau)\right)\right)\dot{I}\left(t-\tau+t_0\right)d\tau\,. \qquad (5)$$

Положив $t = T_*$, и используя законы выбора управления преследователем, из формули (5) получаем нужное включение $\pi z\left(I\left(T_*\right)\right) \in M^*\left(T_*\right)$.

Замечание. Предложенная методика развивает идеи, связанные с запаздыванием информации [6] и растягиванием времени [7].

Ол.А. Чикрій

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБЛИЖЕННЯ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Розглядається нестаціонарна задача зближення зі змінною термінальною множиною. У випадку, коли умова Понтрягіна не виконана, запропоновано прийом, що дозволяє отримати достатні умови зближення за скінченний час.

Ol.A. Chikrii

SUFFICIENT CJNDITIONS OF APPROACH IN NONSTATIONARY DYNAMIC GAME PROBLEMS

The nonstationary problem of approach a variable terminal set is studied. A method is suggested which makes it feasible to obtain sufficient conditions of approach in case when Pontryagin's condition fails.

1. *Онопчук Ю.Н., Чикрий Ал.А.* Нестационарные процессы управления движением в условиях неопределенности // Теория оптимальных решений. – 2008. – № 7. – С. 17 – 24.
2. *Chikrii A.A.* Conflict–Controlled Processes. – Boston – London – Dordrecht: Springer. – 1997. – 424 p.
3. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
4. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Труды МИАН, 2010. – Т. 271. – С. 76 – 92.
5. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
6. *Чикрий Г.Ц.* Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 90 – 105.
7. *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**, № 3. – С. 520 – 523.

Получено 04.02.2015