ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 519.8

В.И. БИЛЕЦКИЙ, Э.И. НЕНАХОВ

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ДВУХ АКТИВНЫХ ШАРОВ НА ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Рассматриваются задачи поиска двух активных шаров на множестве заданных для n = 63, 89. Приводятся теоремы, определяющие минимальное количество проверок (испытаний) при поиске 2-х активных шаров из заданной совокупности и описываются соответствующие теоремам алгоритмы пошаговых действий.

Введение. Данная работа – это продолжение исследований оптимального поиска двух активних (нестандартных) шаров на множестве заданных [1] на основе графового подхода [2]. Описываются алгоритмы оптимального поиска двух активных шаров на множествах, состоящих из 63 и 89 шаров.

При описании алгоритмов используются обозначения четырех функций [1]: $f_1(n)$ – минимальное число проверок для поиска одного активного шара из n заданных; $f_2(n)$ – минимальное число проверок для поиска двух активных шаров из n заданных; $g(n_1, n_2)$ – минимальное число проверок для поиска двух активных шаров, которые находятся по одному в двух подмножествах из n_1 и n_2 шаров; $h(n_1^+, n_2)$ – минимальное число проверок для поиска двух активных шаров, если в первом подмножестве имеется хотя бы один активный шар.

Как и в [1], обозначим саму проверку в виде скобок из уголков. Обозначение $<n>$ означает, что проверяется группа из n шаров, $<n_1+m_2>$ означает, что проверяется суммарное количество шаров, состоящее из n шаров из 1-го подмножества и m шаров из 2-го. Обозначение $<\cdot>^+$ означает, что в группы взятых для проверки шаров обнаружен хотя бы один активный шар, $<\cdot>^{-}$ означает, что в группе нет ни одного активного шара.

Приведем некоторые вспомогательные результаты в виде лемм для функции $h(n_1^{+}, n_2)$. Доказательством леммы является описание алгоритма, подтверждающего ее справедливость.

В описании алгоритмов часто будет использоваться формула $f_1(2^n) = n$ для разных значений n, справедливость которой очевидна.

Лемма 1. Для $n_1 = 3^{+}$ и $n_2 = 4$ $h(3^{+}, 4) = 4$.

Шаг 1. $<1_1 + 1_2>$. Если $<1_1 + 1_2>^{+}$, тогда берем последние 2 шара из 1-й группы.

Шаг 2. $<2_1>$. Если $<2_1>^{+}$, то тогда 2 активные шары легко обнаружить за 2 проверки: $f_1(2_1) = 1$ и $f_1(1_1 + 1_2) = 1$. Всего – 4 проверки.

Если $<2_1>^{-}$, тогда остается из первой группы только один активный шар $<1_1>^{+}$, а второй находим из второй группы за $f_1(4_2) = 2$ проверки. В сумме получается 4 проверки.

Если $<1_1 + 1_2>^{-}$, берем для проверки следующие 2 шара из второй группы.

Шаг 3. $<2_2>$. Если $<2_2>^{+}$, тогда 2 активные шары легко обнаружить за 2 проверки: $f_1(2_1) = 1$ и $f_1(2_2) = 1$. В сумме получается 4 проверки.

Если $<2_2>^{-}$, то остаются 3 шара – 2 из первой группы и 1 из второй. Два активные шары можно определить за $f_2(3) = 2$ проверки. Всего – 4 проверки.

Лемма 2. Для $n_1 = 5^{+}$ и $n_2 = 4$ $h(5^{+}, 4) = 5$.

Шаг 1. $<1_1 + 2_2>$. Пусть $<1_1 + 2_2>^{+}$.

Шаг 2. $<1_1>$. Если $<1_1>^{+}$, это означает, что один шар уже определен.

Шаг 3. $<4_1>$. Если $<4_1>^{+}$, то второй активный шар определяется из группы этих шаров за $f_1(4_1) = 2$ проверки. В сумме получается 5 проверок.

Если $<4_1>^{-}$, тогда второй активный шар находится во второй группе и определяется за $f_1(4_2) = 2$ проверки. В сумме получается 5 проверок.

Если на 2-м шаге $<1_1>^{-}$, это означает, что $<2_2>^{+}$ и $<4_1>^{+}$. Два активные шары легко обнаружить за 3 проверки: $f_1(4_1) = 2$ и $f_1(2_2) = 1$. В сумме получается 5 проверок.

Если на 1-м шаге $<1_1 + 2_2>^{-}$, поступаем дальше следующим образом.

Шаг 4. Проверяем оставшиеся шары $<2_2>$. Если $<2_2>^{+}$, тогда 2 активные шары легко обнаружить за 3 проверки: $f_1(4_1) = 2$ и $f_1(2_2) = 1$. В сумме получается 5 проверок.

Если $<2_2>^-$, тогда два активные шары определяются из группы $<4_1>^+$ за $f_2(4_1)=3$ проверки. В сумме получается 5 проверок.

Лемма 3. Для $n_1 = 3^+$ и $n_2 = 9$ $h(3^+, 9) = 5$.

Берем 5 шаров из 9-ти и осуществляем $<5>$. Если $<5>^+$, то тогда два активные шары определяются за 4 проверки ($g(3^+, 5^+)=4$ [1]). Если $<5>^-$, тогда $h(3^+, 4) = 4$ (лемма 1). В обоих случаях число проверок равно 5.

Лемма 4. Для $n_1 = 6^+$ и $n_2 = 2$ $h(6^+, 2) = 5$.

Шаг 1. $<2_1>$. Если $<2_1>^+$, проверяем следующие 4 шара из 6-ти.

Шаг 2. $<4_1>$. Если $<4_1>^+$, тогда два активные шары можно найти за 3 проверки: $f_1(4_1)=2$ и $f_1(2_1)=1$. В сумме получаем 5 проверок.

Если $<4_1>^-$, переходим к 3-у шагу.

Шаг 3. $<2_2>$. Если $<2_2>^+$, тогда два активные шары легко обнаружить за 2 проверки: $f_1(2_1)=1$ и $f_1(2_2)=1$. В сумме получается 5 проверок.

Если $<2_2>^-$, то результат $<2_1>^+$ означает, что 2 активные шары найдены.

Лемма 5. Для $n_1 = 8^+$ и $n_2 = 4$ $h(8^+, 4) = 6$.

Проверяем 3 шара из первой группы. Если $<3>^+$, тогда по лемме 3 $h(3^+, 9) = 5$ (9 – это суммарное количество 5-ти шаров из первой группы и 4 шара из второй группы). Если $<3>^-$, тогда $h(5^+, 4) = 5$ (лемма 2). В обоих случаях суммарное число проверок равно 6.

Лемма 6. Для $n_1 = 9^+$ и $n_2 = 2$ $h(9^+, 2) = 6$.

Шаг 1. Проверяем 3 шара из 1-й группы. Если $<3>^-$, то в этом случае $h(6^+, 2) = 5$ (лемма 4), и в сумме получаем 6 проверок.

Если $<3>^+$, то берем для проверки 5 шаров из оставшихся 8-и.

Шаг 2. $<5>$. Если $<5>^+$, тогда 2 активные шары определяются за 4 проверки ($g(3^+, 5^+)=4$ [1]), и в сумме получается 6 проверок.

Если $<5>^-$, то из 8-и шаров остается 3.

Шаг 3. $<1>$ из группы, для которых $<3>^+$. Если результат проверки $<1>^+$, значит, этот шар активный. Второй активный шар находим из 5-и оставшихся за $f_1(5)=3$ проверки, что в сумме дает 6 проверок.

Если $<1>^-$, берем следующий один шар для проверки из этой группы.

Шаг 4. $<1>$. Если $<1>^+$, значит, этот шар активный. Второй активный шар находим из 4-х оставшихся за $f_1(4)=2$ проверки, что в сумме дает 6 проверок.

Если $<1>^{-}$, это означает, что последний шар из группы $<3>^{+}$ активен. Второй активный шар находим из 3-х оставшихся за $f_1(3)=2$ проверки, что в сумме дает 6 проверок.

Лемма 7. Для $n_1 = 3^{+}$ и $n_2 = 20$ $h(3^{+}, 20) = 6$.

Шаг 1. $<1_1+5_2>$. Пусть $<1_1+5_2>^{+}$ $(*)$.

Шаг 2. $<2_1+4_2>$, где $<2_1>$– следующие 2 шара из группы $<3>^{+}$ и $<4_2>$ – четыре шара из 15 оставшихся во второй группе. Если $<2_1+4_2>^{-}$, это означает, что $<1_1>^{+}$. Второй активный шар находится из 16-и (20 – 4_2) оставшихся во второй группе за $f_2(16)=4$ проверки, что в сумме дает 6 проверок.

Если $<2_1+4_2>^{+}$, берем из этой группы половину шаров $<1_1+2_2>$.

Шаг 3. $<1_1+2_2>$. Пусть $<1_1+2_2>^{+}(**)$. (Если $<1_1+2_2>^{-}$, тогда другая тройка шаров $<1_1+2_2>^{+}$).

Шаг 4. $<4_2>$из группы $(*)$. Если $<4_2>^{+}$, тогда $<1_1>^{+}$ из $(**)$. Второй активный шар находим из группы $<4_2>^{+}$ за 2 проверки. В сумме получается 6 проверок.

Если $<4_2>^{-}$, то остается $<1_1+1_2>^{+}$ $(*)$ и $<1_1+2_2>^{+}$ $(**)$.

Шаг 5. $<2_2>$. Если $<2_2>^{+}$, тогда $<1_1>^{+}$ из группы $(*)$, а второй активный шар находим за одну проверку из группы $<2_2>^{+}$. В сумме получается 6 проверок.

Если $<2_2>^{-}$, тогда $(**)$, а второй активный шар находим из группы $<1_1+1_2>^{+}$ за одну проверку. В сумме получается 6 проверок.

Если на 1-м шаге $<1_1+5_2>^{-}$, это означает, что в первой группе остается 2 шара, во второй – 15.

Шаг 6. $<8>$ из 15-и. Если $<8>^{+}$, тогда 2 активных шара легко обнаружить за 4 проверки: $f_1(8)=3$ и $f_1(2_1)=1$. Всего – 6 проверок.

Если $<8>^{-}$, тогда берем 4 шара из 7-и оставшихся.

Шаг 7. $<4>$. Если $<4>^{+}$, тогда 2 активных шара легко обнаружить за 3 проверки: $f_1(4)=2$ и $f_1(2_1)=1$. Всего – 6 проверок.

Если $<4>^{-}$, тогда берем 2 шара из 3-х оставшихся.

Шаг 8. $<2>$. Если $<2>^{+}$, тогда 2 активных шара легко обнаружить за 2 проверки: $f_1(2)=1$ и $f_1(2_1)=1$. Всего 6 проверок.

Если $<2>^{-}$, тогда проверяем последний шар из 15-и.

Шаг 9. $<1>$. Если $<1>^{+}$, тогда $f_1(2_1)=1$. И всего – 6 проверок.

Если $<1>^{-}$, тогда два активные – это шары $<2_1>^{+}$.

Лемма 8. Для $n_1 = 11^{+}$ и $n_2 = 6$ $h(11^{+}, 6) = 7$.

Шаг 1. $<3_1+2_2>$. Если $<3_1+2_2>^{-}$, тогда остается $<8_1>^{+}$ из первой группы 4 шара – из второй.

Шаг 2. $<3_1>$. Если $<3_1>^{+}$, тогда 2 активных шара получаем за 5 проверок ($h(3^{+}, 9) = 5$, лемма 3). В сумме получаем 7 проверок.

Если $<3>^{-}$, тогда в первой группе остается $<5>^{+}$ шаров. 2 активных шара получаем тоже за 5 проверок ($h(5^{+}, 4) = 5$, лемма 2). Всего 7 проверок.

Рассмотрим случай, когда на 1-м шаге $<3_1+2_2>^{+}$.

Шаг 3. Берем следующие шары из групп $<4_1+4_2>$. Если $<4_1+4_2>^{-}$, то это означает, что остается 4 непроверенных шара из 1-й группы. 2 активные шары находим за 5 проверок ($h(5^{+}, 4) = 5$), где $<5>^{+} = <3_1+2_2>^{+}$. В сумме получаем 7 проверок.

Шаг 4. Если $<4_1+4_2>^{+}$, берем половину из этих шаров $<2_1+2_2>$, и за одну проверку выбираем ту половину, для которой $<2_1+2_2>^{+}$.

Шаг 5. Из группы $<2_1+2_2>^{+}$ берем для проверки половину шаров, и выбираем ту половину, для которой $<1_1+1_2>^{+}$.

Шаг 6. Из группы шаров $<3_1+2_2>^{+}$ берем для проверки шары $<1_1+2_2>$. Если $<1_1+2_2>^{-}$, тогда в этой группе остается $<2_1>^{+}$. Теперь легко обнаружить 2 активных шара за две проверки: $f_1(1_1+2_2)=1$ и $f_1(2_1)=1$. Всего получаем 7 проверок.

Шаг 7. Если $<1_1+2_2>^{+}$, проверяем $<2_2>$. Если $<2_2>^{+}$, то это значит, что в группе шаров $<1_1+1_2>^{+}$ шар $<1_2>$ не может быть активным, т. е. активный шар $<1_1>$. Второй активный шар обнаруживается за одну проверку из группы $<2_2>^{+}$. Всего 7 проверок.

Если $<2_2>^{-}$, тогда шар $<1_1>$ из группы $<1_1+2_2>^{+}$ активный и второй активный шар находим за 1 проверку из группы $<1_1+1_2>^{+}$. Всего 7 проверок.

Лемма 9. Для $n_1 = 3^{+}$ и $n_2 = 41$ $h(3^{+}, 41) = 7$.

Шаг 1. Берем 21 шар из второй группы и производим $<21_2>$. Если $<21_2>^+$, значит эта группа и группа $<3_1>^+$ содержат по одному активному шару.

Шаг 2. $<1_1+5_2>$. Если $<1_1+5_2>^-$, тогда 2 активных шара легко обнаружить за 5 проверок: $f_1(2_1)=1$ и $f_1(16_2)=4$. Всего 7 проверок.

Рассмотрим случай $<1_1+5_2>^+$.

Шаг 3. $<5_2>$. Если $<5_2>^-$, значит, $<1_1>^+$, т. е. один активный шар уже определен, а второй активный шар находим из $<16_2>^+$ за 4 проверки ($f_1(16_2)=4$). В сумме получаем 7 проверок.

Если $<5_2>^+$, тогда два активных шара определяем за 4 проверки ($g(3_1^+,\ 5_2^+)=4$ [1]). В сумме получаем 7 проверок.

Если на 1-м шаге $<21_2>^-$, тогда из второй группы (41 шар) остается 20. Два активные шары определяются за $h(3^+,\ 20)=6$ проверок (лемма 7). В сумме получаем 7 проверок.

Лемма 10. Для $n_1=8^+$ и $n_2=28$ $h(8^+,\ 28)=8$.

Шаг 1. $<16_2>$. Если $<16_2>^+$, тогда 2 активных шара находим за 7 проверок: $f_1(8_1)=3$ и $f_1(16_2)=4$. В сумме получаем 8 проверок.

Если результат проверки $<16_2>^-$, берем следующие 8 шаров для проверки из 2-й группы.

Шаг 2. $<8_2>$. Если $<8_2>^+$, тогда 2 активных шара находим за 7 проверок: $f_1(8_1)=3$ и $f_1(8_2)=3$. В сумме получаем 8 проверок.

Если $<8>^-$, тогда два активных шара определяем за 6 проверок ($h(8^+,\ 4)=6$, лемма 5), что в сумме также дает 8 проверок.

Теорема 1. На множестве шаров для n = 63 $f_2(63)=11$.

Описание алгоритма, подтверждающего справедливость теоремы 1.

Шаг 1. Берем для проверки 19 шаров. Если $<19>^-$, тогда $f_2(44)=10$ [1] и в сумме получается 11 проверок.

Если $<19>^+$, переходим к шагу 2.

Шаг 2. $<8_1+3_2>$. Пусть $<8_1+3_2>^+$.

Шаг 3. $<11_1+16_2>$ (11 шаров из первой группы и 16 шаров из второй). Если $<11_1+16_2>^+$, переходим к шагу 4.

Шаг 4. $<11_1>$. Если $<11_1>^+$, тогда $g(11_1^+,\ 11^+)=7$ [1] (11 – это $<8_1+3_2>$) и всего получается 11 проверок.

Если $<11_1>^-$, то тогда $<16_2>^+$ и $<8_1>^+$, и 2 активных шара находим за 7 проверок: $f_1(8_1)=3$ и $f_1(16_2)=4$. В сумме получаем 11 проверок.

Если на 3-м шаге $<11_1+16_2>^-$, то остается из первой группы $<8>^+$ и $<28>$ из второй, и 2 активных шара определяются за 8 проверок ($h(8^+, 28)=8$, лемма 10), что в сумме дает 11 проверок.

Если результат 2-го шага $<8_1+3_2>^-$, то остается $<11_1>^+$ и $<41_2>$.

Шаг 5. $<3_1+13_2>$. Если $<3_1+13_2>^-$, тогда среди оставшихся 2 активных шара можна найти за 8 проверок ($h(8^+, 28)=8$, лемма 10) и в сумме получается 11 проверок.

Если $<3_1+13_2>^+$, тогда для проверки берем из 1-й группы следующие 8 шаров.

Шаг 6. $<8_1>$. Если $<8_1>^+$, тогда 2 активные шары находим за 7 проверок: $f_1(8_1)=3$ и $f_1(16)=4$, где 16 шаров – это $<3_1+13_2>^+$. В сумме получаем 11 проверок.

Если $<8_1>^-$, тогда в 1-й группы остается 3 шара, и 2 активных шара находим за 7 проверок ($h(3_1^+, 41_2)=7$, лемма 9). В сумме получим 11 проверок.

Теорема 2. На множестве шаров для n = 89 $f_2(89)=12$.

Описание алгоритма, подтверждающего справедливость теоремы 2.

Шаг 1. Берем для проверки 26 шаров. Если $<26>^-$, тогда $f_2(63)=11$ и всего достаточно 12 проверок.

Если $<26>^+$, берем для проверки следующие 38 шаров.

Шаг 2. $<38>$. Если $<38>^+$, тогда $g(26^+,38^+)=10$ [1] и в сумме получаем 12 проверок.

Если $<38>^-$, берем для проверки следующие 19 шаров.

Шаг 3. $<19>$. Если $<19>^+$, тогда $g(26^+,19^+)=9$ [1] и в сумме получаем 12 проверок.

Если $<19>^-$, остается 6 непроверенных шаров и $<26>^+$.

Шаг 4. Берем для проверки 9 шаров из 26. Если $<9>^+$, тогда из оставшихся 23 шара (17 из группы $<26>^+$ и 6 непроверенных) берем 14 шаров.

Шаг 5. $<14>$. Если $<14>^+$, тогда $g(9^+,14^+)=7$ [1]. И всего 12 проверок.

Если $<14>^-$, берем следующие 7 шаров (из группы 23).

Шаг 6. $<7>$. Если $<7>^+$, то тогда $g(7^+,9^+)=6$ [1]. В итоге 12 проверок.

Если $<7>^-$, то тогда $h(9^+, 2)=6$ (лемма 6) и в сумме получаем 12 проверок.

Если $<9>^{-}$ (4-й шаг), то остается из 26-и шаров $<17>^{+}$ и тех же 6 непроверенных.

Шаг 7. Берем 6 шаров из $<17>^{+}$. Пусть $<6>^{+}$.

Шаг 8. Берем 3 шара из $<6>^{+}$. За одну проверку выбираем те 3 шара, для которых $<3>^{+}$, и тогда $h(3^{+},\ 20)=6$ (лемма 7). Всего 12 проверок.

Если на 7-м шаге $<6>^{-}$, тогда остаются $<11>^{+}$ шаров и 6 непроверенных. В этом случае $h(11^{+},\ 6)=7$ (лемма 8) и в итоге получаем 12 проверок.

В.І. Білецький, Е.І. Ненахов

АЛГОРИТМИ ПОШУКУ ДВОХ АКТИВНИХ КУЛЬОК НА ЗАДАНИХ МНОЖИНАХ

Розглядаються задачі пошуку двох активних кульок на заданих множинах для *n* = 63, 89. Приводяться теореми, які визначають мінімальну кількість перевірок (випробовувань) при пошуку 2-х активних кульок із заданої сукупності та описуються відповідні алгоритми покрокових дій.

V.I. Biletsky, E.I. Nenakhov

ALGORITHMS OF SEARCHING FOR TWO ACTIVE BALLS ON GIVEN SETS

The problems of searching for two active balls on given sets for *n*=63, 89. We some give theorems that allow calculating the minimal number of trials needed to find two active balls among the elements of the given set. For every case, the specific step-by-step algorithms are provided.

1. *Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И.* Оптимальный поиск двух активных шаров на множестве заданных // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2015. – С. 134 – 139.
2. *Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И.* Графовый подход к решению задачи поиска радиоактивных шаров. – Там само. – 2014.– С. 147 – 154.

Получено 08.04.2016