УДК 519.61: 519.85

Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ

ОБ УПРОЩЕНИИ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается метод, позволяющий привести несколько симметрических матриц к одинаковому блочно-диагональному виду, либо установить, что для данных матриц такое приведение невозможно. Это может быть полезно при решении задач полуопределенного программирования. Учитывается требование – матрица преобразования должна быть ортогональной.

Введение. В настоящее время активно развивается полуопределенное программирование [1 – 3]. К этой постановке задачи приводится ряд нелинейных задач оптимизации. Для упрощения задач предложены методы приведения матриц коэффициентов к блочно-диагональному виду [4, 5]. В настоящей работе предлагаются менее громоздкие методы упрощения задачи оптимизации.

Пусть S^n обозначает пространство симметрических вещественных матриц порядка *n*, S_+^n – подмножество S^n, состоящее из неотрицательно определенных (положительно полуопределенных) матриц. Скалярное (внутреннее) произведение между двумя квадратными матрицами L и M порядка *n* определяется как след матрицы $L^{\mathrm{T}}M$ и обозначается

$$L \bullet M = \mathrm{tr}(L^{\mathrm{T}}M) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} m_{ij},$$

где l_{ij} и m_{ij} – (ij)-элементы соответственно матриц L и M.

Задача полуопределенного программирования заключается в следующем [3, 5]: даны матрицы $A_p \in S^n$ $(p = \overline{0, m})$ и столбец $\mathbf{b} = [b_1, b_2, ..., b_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, нужно найти матрицу $X \in S_+^n$, удовлетворяющую следующим условиям

$$\min A_0 \bullet X,$$

$$A_i \bullet X = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (1)$$

Рассмотрим проблему уменьшения числа неизвестных в (1).

1. Постановка задачи. Если сделать замену переменных в (1): $X = H^T \tilde{X} H$ (H – вещественная ортогональная матрица преобразования, $\tilde{X}$ – новая неизвестная матрица порядка n) и преобразовать матрицы A_p $(p = \overline{0, m})$ с помощью той же матрицы преобразования: $A_p = H^T A_p H,$ то получим опять задачу полуопределенного программирования. Действительно: симметричность матриц при таком преобразовании не нарушится, кроме того, это преобразование является преобразованием подобия и, следовательно, оставляет неизменными собственные числа матрицы X, сохраняя, таким образом, полуопределенность неизвестной матрицы.

Допустим, что матрицы A_p приобрели одинаковый блочно-диагональный вид:

$$A_p = HA_pH^T = \begin{pmatrix} A_p^{(1)} & 0 \\ 0 & A_p^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_p^{(1)} \in S^{n_1}$, $A_p^{(2)} \in S^{n_2}$ и $n_1 + n_2 = n.$ В этом случае задача (1) приводится к следующему виду [5]:

$$\min A_0^{(1)} \bullet X^{(1)} + A_0^{(2)} \bullet X^{(2)},$$

$$A_i^{(1)} \bullet X^{(1)} + A_i^{(2)} \bullet X^{(2)} = b_i \quad i = \overline{1,m}\ . \tag{3}$$

Здесь $X_p^{(1)} \in S_+^{n_1}$ и $X_p^{(2)} \in S_+^{n_2}$ – диагональные блоки матрицы $\tilde{X}$.

Заметим, что число переменных в (3) меньше, чем в (1). Еще лучше получить выражение, аналогичное (2), с максимально возможным количеством блоков.

Итак, нужно для данных матриц $A_p(p = \overline{0, m})$ найти такую матрицу H, при которой матрицы $A_p = HA_pH^{Ò}$ будут иметь наилучший блочно-диагональный вид, либо убедиться в том, что для заданных матриц такое приведение невозможно. Слово «наилучший» может означать максимальное количество блоков либо минимальное суммарное количество переменных в диагональных блоках матрицы $\tilde{X}$. Далее изложено решение этой проблемы и показано, что оба критерия приводят к одному и тому же результату.

Предварительным этапом решения задачи о преобразовании матриц является использование априорной информации о симметрии с помощью теории групп. Здесь группы симметрии не рассматриваются потому, что существует хорошо разработанная методика таких расчетов [6]. Она используется при расчетах колебаний молекул, кристаллов и т. п.

2. Метод коммутирующей матрицы. О возможности применения коммутирующей матрицы для расщепления систем уравнений можно ознакомиться в учебниках по квантовой механике. Метод коммутирующей матрицы предложен одновременно А.К. Лопатиным и Е.Д. Якубович.

Рассмотрим множество $\Lambda(B_\nu)$ всех матриц, коммутирующих с данными матрицами B_1, B_2, …, B_g. Это множество является алгеброй над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и называется централизатором матриц $\{B_\nu\}$.

Теорема 1. Пусть матрицы A и T коммутируют

$$AT = TA,$$

матрица T имеет блочно-диагональный вид: $T = \operatorname{diag} T_k$, причем спектры блоков T_k попарно не пересекаются. Тогда матрица A также имеет блочно-диагональный вид

$$A = \operatorname{diag} A_k .$$

Эта теорема приведена в [7] – гл. VIII, теорема 3 (см., также [8] § 2.5 и [9]).

Следствие. Если существует матрица $T \in \Lambda(B_\nu)$, имеющая хотя бы два различных собственных числа, то преобразование подобия $\tilde{B}_\nu = H^{-1} B_\nu H$, где H – матрица, столбцами которой являются векторы канонического базиса матрицы T, приводит обе матрицы к блочно-диагональному виду с двумя (как минимум) блоками на главной диагонали.

Теорема 2. Если матрицы B_ν приводятся преобразованием подобия к блочно-диагональному виду с двумя (как минимум) блоками на главной диагонали, то существует матрица $T \in \Lambda(B_\nu)$, имеющая хотя бы два различных собственных числа.

Итак, для возможности одновременного приведения двух матриц к блочно-диагональному виду необходимо и достаточно чтобы централизатор содержал матрицу T с неодинаковыми собственными числами.

Для нахождения централизатора (точнее говоря – его базиса) можно объявить все элементы матрицы T неизвестными и составить систему линейных однородных алгебраических уравнений, соответствующую матричным уравнениям

$$B_\nu T = T B_\nu, \quad \nu = \overline{1, g} .$$

Получим gn^2 уравнений с n^2 неизвестными. Общее решение такой системы уравнений (при небольшом n) можно получить известными методами. Вычислительный метод преодоления проблем, связанных с большим n, изложен в [10].

Обозначим базис централизатора $\Lambda(B_\nu)$ через W_1, W_2, …, W_r. Если размерность r централизатора равна 1, то весь централизатор состоит из матриц кратных единичной матрице. В этом случае приведение матриц B_ν к блочно-диагональному виду невозможно. Если $r > 1$, то в качестве матрицы T, используемой для нахождения преобразования (следствие к теореме 1), выбираем матрицу базиса W_k, имеющую хотя бы два различных собственных числа. Векторы ее канонического базиса являются столбцами искомой матрицы преобразования подобия.

3. Приведение симметрических матриц. Особенность решаемой проблемы в том, что преобразованные матрицы должны быть симметрическими, и новая матрица неизвестных $\tilde{X}$ должна оставаться положительно полуопределенной. Эти условия будут выполняться, если матрица преобразования H будет ортогональной. Для этого из множества коммутирующих матриц нужно выбирать симметрическую матрицу T.

Следует обратить внимание на тот факт, что вместе с каждой матрицей T в централизатор множества симметрических матриц входит и транспонированная матрица T^{T}. Действительно, из равенства $C_jT = TC_j$ вытекает $T^T C_j^T C_j^T T^T$, а поскольку матрица C_j симметрическая, то и $T^T C_j = C_j T^T$. Это и означает, что T^T принадлежит централизатору. Поэтому, вместо несимметрических (вообще говоря) матриц T нужно использовать заведомо симметрические матрицы $V = TT^T$ или $V = T + T^T$. Для симметрической матрицы всегда существует базис, состоящий из ортогональных нормированных собственных векторов. Из таких векторов и составляем ортогональную матрицу преобразования H.

Особый случай, когда $r > 1$, но все матрицы базиса не имеют различных собственных чисел, при симметрических матрицах исключен. Действительно: симметрические матрицы имеют диагональную жорданову форму. Если все числа такой диагональной формы одинаковы, то матрица T кратна единичной и может быть лишь одним элементом базиса. Иначе – матрица T имеет различные собственные числа.

Приведение к блокам минимального порядка осуществляется путем последовательного применения метода коммутирующей матрицы сначала к исходным матрицам C_k, затем к получающимся блокам до нахождения нерасщепляющихся блоков. Теорема единственности ([8], теорема 6.5) подтверждает, что это и есть наилучшее приведение. Другими словами, получив нерасщепляющиеся далее блоки, мы имеет и максимально возможное число подсистем, и минимальное количество неизвестных в матрице $\tilde{X}$.

Выводы. Разработан метод одновременного приведения нескольких симметрических матриц к блочно-диагональному виду. Используются такие вычислительные методы, которые позволяют получить результат при сравнительно высоких порядках исходных матриц. Метод предназначен для упрощения задач полуопределенного программирования. Он же может быть полезен для декомпозиции «традиционных» колебательных систем, т. е. таких, где нет гироскопических добавок и нет позиционных неконсервативных сил, обусловленных взаимодействием с внешней средой.

Ю.М. Базилевич

ПРО СПРОЩЕННЯ ЗАДАЧІ НАПІВВИЗНАЧЕНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглядається метод, що дозволяє привести кілька симетричних матриць до однакового блочно-діагонального вигляду, або встановити, що для даних матриць таке приведення неможливе. Це може бути корисно при вирішенні задач напіввизначеного програмування. Враховується вимога – матриця перетворення має бути ортогональною.

Yu.N. Bazilevich

ON THE REDUCING OF SEMIDEFINITE PROGRAMMING PROBLEM

The method, which allows to reducing some symmetric matrices to the same block-diagonal form, either to establishing that such a reduction is impossible for these matrices, is considered. This can be useful in solving semidefinite programming problems. We taken into account the demand — the transformation matrix must be orthogonal.

1. *Todd M.J.* Semidefinite optimization // Acta Numerica. – 2001. – N 10. – P. 515 – 560.
2. *Перетятько А.С.* Напіввизначена оптимізація для розв'язування загальних квадратичних задач: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат наук: «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Харків, 2015 – 22 с.
3. *Жадан В.Г.* Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 145 – 160.
4. *de Klerk E., Dobre C., P˙asechnik D V.* Numerical block diagonalization of matrix *-algebras with application to semidefinite // Math. Program. – 2011. – Ser. B. – 129: 91 – 111.
5. *Murota K., Kanno Y., Kojima M., Kojima S.* A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix *-algebras with application to semidefinite programming // Japan J. Indust. Appl. Math. (2010) 27: 125 – 160.
6. *Любарский Г.Я.* Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2. – М.; 2016. – 360 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
8. *Базилевич Ю.Н.* Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. – Киев: Наук. думка, 1987. – 156 с.
9. *Bazilevich Yu.N.* The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form [E-resource] // Physics Journal. – 2015. – Vol. 1, N 2. – P. 54 – 61. Access to the resource: http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061.html.
10. *Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.* Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов // Математические модели и современные технологии. Киев: Ин-т математики, 1998. – С. 12 – 13.

Получено 20.04.2016