ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 519.85

Г.П. ДОНЕЦЬ, А.М. НАГІРНА

ОПТИМІЗАЦІЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ НА МНОЖИНІ ПЕРЕСТАНОВОК

Розглянуто підхід до розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач з квадратичною функцією цілі на комбінаторній множині перестановок, представленої у вигляді графа. Приведено числові приклади задач.

Вступ. Теорія графів широко застосовується для представлення даних і знань в різних областях, таких як: електротехніка, будівництво, логістика, комп'ютерні і соціальні мережі, лінгвістика і т. д. В більшості випадків практичні задачі характеризуються лінійністю процесу [1]. Графові моделі досить чітко і зручно представляють комбінаторні множини, забезпечуючи створення нових алгоритмів та методів розв'язання оптимізаційних комбінаторних задач з лінійною та дробово-лінійною функцією цілі [2 – 4]. Оскільки значна кількість питань, практичного характеру, вирішується при моделюванні певних процесів нелінійними функціями і клас задач нелінійного програмування значно ширше лінійного, то необхідно оцінити існуючі методи розв'язання та створити нові алгоритми для розв'язання задач комбінаторної оптимізації із нелінійними цільовими функціями. Значної уваги заслуговує квадратична функція, яка є частковим випадком нелінійної, представленої у вигляді суми лінійної і квадратичної функцій. Деякі практичні задачі технічно-економічного змісту моделюються з квадратичними цільовими функціями і значна кількість квадратичних моделей виникають як допоміжні чи проміжні, при вирішенні ряду задач.

Дослідження направлено на продовження вивчення квадратичної функції на комбінаторній множині перестановок і описує послідовний алгоритм знаходження розв'язків задачі із квадратичною функцією цілі на даній множині.

1. Постановка задачі. Нехай дано задачу комбінаторної оптимізації: $Z(\Phi, P(A)) : \max\{\Phi(a) \mid a \in P(A)\}$, яка полягає у максимізації квадратичної функції $\Phi(a)$ вигляду:

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

на множині перестановок $P(A)$.

Тоді, основна задача $Z(F, X)$ буде полягати в максимізації критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ відповідатиме точка $x \in X$, така, що виконується рівність $F(x) = \Phi(a)$:

$$Z(F, X) : \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, X – непорожня множина в R^n, яка визначається наступним чином:

$$X = \mathrm{vert}\Pi(A), \quad \Pi = \mathrm{conv}P(A).$$

Отже, максимум квадратичної функції буде однією з вершин переставного багатогранника, а вершини графа $G(P_n)$ відповідатимуть усім точкам множини перестановок $P(A)$. Оскільки, суміжність вершин визначається одноразовою транспозицією двох елементів вершин, то кількість транспозицій у графі буде рівна [4]:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

2. Алгоритм розв'язування екстремальної задачі з додатковими обмеженнями на комбінаторній множині перестановок.

Розглянемо функції, що утворюються при транспозиції відповідних елементів:

$$x_1 \leftrightarrow x_i, \quad (i = 2, ..., n):$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2: \quad f_{12} = (x_1 - x_2)\left(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n\right);$$

$$x_1 \leftrightarrow x_3: \quad f_{13} = (x_1 - x_3)\left(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + ... + a_{n3}x_n\right);$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$x_1 \leftrightarrow x_n: \quad f_{1n} = (x_1 - x_n)\left(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{nn}x_n\right);$$

$$x_2 \leftrightarrow x_i, \quad (i = 3, ..., n):$$

$$x_2 \leftrightarrow x_3: \ f_{23} = (x_2 - x_3)\left(a'_{12}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{n2}x_n\right);$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$x_2 \leftrightarrow x_n: \ f_{2n} = (x_2 - x_n)\left(a'_{1n}x_1 + a'_{2n}x_2 + ... + a'_{nn}x_n\right);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n: \quad f_{n-1n} = (x_{n-1} - x_n)\left(a'_{1n-1}x_1 + a'_{2n-1}x_2 + ... + a'_{nn-1}x_n\right). \qquad (2)$$

У випадку функції декількох змінних можна розділити вплив аргументів на загальний результат, тобто

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Тому, для знаходження максимального значення розглянемо окремо дві задачі, умовно розділивши функції транспозицій на праву і ліву частини.

Задача 1. Знайти максимум функцій:

$$x_1 \leftrightarrow x_i, \ \ (i = 2, ..., n):$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2: \ \ f'_{12} = (x_1 - x_2);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1 \leftrightarrow x_n: \ f'_{1n} = (x_1 - x_n);$$

$$x_2 \leftrightarrow x_i, \ (i = 3, ..., n):$$

$$x_2 \leftrightarrow x_3: \ \ f'_{23} = (x_2 - x_3);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_2 \leftrightarrow x_n: \ f'_{2n} = (x_2 - x_n);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n: \ \ f'_{n-1n} = (x_{n-1} - x_n).$$

Розв’язок задачі є єдиним для всіх функцій і рівний: $(x_1, x_2, ..., x_n)$, за умови $(x_1 > x_2 > ... > x_n)$, який будемо визначати, як 1-ий опорний розв’язок.

Задача 2. Знайти максимум функцій:

$$x_1 \leftrightarrow x_i, \ \ (i = 2, ..., n):$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2: \ \ f''_{12} = \left(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n\right);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1 \leftrightarrow x_n: \ f''_{1n} = \left(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{nn}x_n\right);$$

$$x_2 \leftrightarrow x_i, \ (i = 3, ..., n):$$

$$x_2 \leftrightarrow x_3: \ \ f''_{23} = \left(a'_{12}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{n2}x_n\right);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_2 \leftrightarrow x_n: \ f''_{2n} = \left(a'_{1n}x_1 + a'_{2n}x_2 + ... + a'_{nn}x_n\right);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n:$$

$$x_{n-1} \leftrightarrow x_n: \ \ f''_{n-1n} = \left(a'_{1n-1}x_1 + a'_{2n-1}x_2 + ... + a'_{nn-1}x_n\right).$$

Для знаходження максимуму функції необхідно скористатися 1-м опорним розв'язком першої задачі $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Підставляємо 1-ий опорний розв'язок $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в f''_{12}, якщо $f''_{12} > 0$, то 1-ий опорний розв'язок $(x_1, x_2, ..., x_n)$ буде оптимальним розв'язком. Якщо $f''_{12} < 0$, то необхідно знайти такий x_k, де $x_k \in (x_1, x_2, ..., x_n)$, при якому функція f''_{12} зростає. Для цього здійснюємо перестановку x_k на x_m, де $x_m \in (x_1, x_2, ..., x_n)$, при якому $f''_{12} < 0$. Тоді, наступний опорний розв'язок буде $(x_1, x_2, ...x_k, ..., x_m, ..., x_n)$.

Послідовно перевіряємо всі функції, здійснюючи відповідні перестановки, якщо потрібно, до тих пір, поки не буде зроблена перевірка останньої транспозиції. На кожному кроці значення змінних або залишатимуться без змін, або мінятимуться місцями для забезпечення максимізації функції. У випадку мінімізації функції.

3. Приклад. Дано функцію

$$F(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + 2x_4^2$$

на множині перестановок $P(A)$, де $A = (1, 2, 3, 4)$. Необхідно знайти точку множини перестановок, де квадратична функція приймає максимальне значення.

Згідно формули (1), знаходимо кількість транспозицій: $C_4^2 = 6.$ Користуючись формулами (2), розглянемо транспозиції відповідних елементів у вигляді добутку:

1. $x_1 \leftrightarrow x_2$: $f_{12} = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4)$.
2. $x_1 \leftrightarrow x_3$: $f_{13} = (x_1 - x_3)(x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4)$.
3. $x_1 \leftrightarrow x_4$: $f_{14} = \frac{1}{2}(x_1 - x_4)(3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4)$.
4. $x_2 \leftrightarrow x_3$: $f_{23} = 4(x_2 - x_3)x_4$.
5. $x_2 \leftrightarrow x_4$: $f_{24} = \frac{1}{2}(x_2 - x_4)(x_2 - 8x_1 + 14x_3 + x_4)$.
6. $x_3 \leftrightarrow x_4$: $f_{34} = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)(6x_2 - 8x_1 + x_3 + x_4)$.

Розв'язуємо задачу 1: $\max(f_{12}^1 \cup f_{13}^1 \cup f_{14}^1 \cup f_{23}^1 \cup f_{24}^1 \cup f_{34}^1)$,

де

$$f_{12}^1 = (x_1 - x_2),\ f_{13}^1 = (x_1 - x_3),\ f_{14}^1 = (x_1 - x_4),$$
$$f_{23}^1 = (x_2 - x_3),\ f_{24}^1 = (x_2 - x_4),\ f_{34}^1 = (x_3 - x_4).$$

Перший опорний розв'язок рівний: $(4, 3, 2, 1)$.

Задача 2. Знайти $\max(f_{12}^2, f_{13}^2, f_{14}^2, f_{23}^2, f_{24}^2, f_{34}^2)$,
де

$$f_{12}^2 = (x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4),\ f_{13}^2 = (x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4),$$

$$f_{14}^2 = (3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4),\ f_{23}^2 > 0,$$

$$f_{24}^2 = (x_2 - 8x_1 + 14x_3 + x_4),\ f_{34}^2 = (6x_2 - 8x_1 + x_3 + x_4).$$

Для знаходження максимуму функції необхідно скористатися 1-м опорним розв'язком задачі.

Підставляємо перший опорний розв'язок $(4, 3, 2, 1)$ в $f_{12}^2 = (x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4)$, $f_{12}^2 < 0$, тоді для максимізації функції необхідно, щоб $x_1 < x_2$, отже 2-ий опорний розв'язок рівний $(3, 4, 2, 1)$.

Підставляємо 2-ий опорний розв'язок $(3, 4, 2, 1)$ в $f_{13}^2 = (x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4)$.

$f_{13}^2 < 0$, щоб функція зростала, необхідно, щоб $x_1 < x_3$, отже 2-ий опорний розв'язок $(2, 4, 3, 1)$.

Аналогічно попереднім міркуванням, $f_{14}^2 < 0$, $x_1 < x_4$, 3-ій опорний розв'язок $(1, 4, 3, 2)$.

Оскільки, $f_{24}^2 > 0$ і $f_{34}^2 > 0$, то останній опорний розв'язок $(1, 4, 3, 2)$ буде оптимальним.

Отже, максимального значення квадратична функція $F(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + 2x_4^2$ на множині перестановок $P(A)$ буде набувати в точці $(1, 4, 3, 2)$ і $\max F(x) = 57$.

Висновок. Вперше досліджено задачу оптимізації з квадратичною цільовою функцією на комбінаторній множині перестановок та описано алгоритм її розв'язання із застосуванням теорії графів, який полягає у знаходженні 1-го опорного розв'язку, котрий після здійснення кожної ітерації алгоритму, яка характеризується відповідною перестановкою для знаходження максимального значення функції, забезпечує знаходження єдиного оптимального розв'язку.

Детально розглянуто числові приклади покрокової реалізації нового підходу алгоритмізації розв'язання.

Майбутня наукова робота передбачає подальші дослідження щодо створення нових методів розв'язання, як безумовних оптимізаційних задач із квадра-тичною функцією цілі на інших комбінаторних конфігураціях, так і з урахуванням додаткових обмежень.

Г.А. Донец, А.Н. Нагорная

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Рассмотрен подход к решению оптимизационных задач с квадратической функцией цели на комбинаторном множестве перестановок, представленном в виде графа. Приведены числовые примеры задач.

G.A. Donets, A.N. Naghirna

OPTIMIZATION OF QUADRATIC FUNCTION ON A SET OF PERMUTATIONS

Approach to the solution of optimization problems with quadratic function of the purpose is considered on the combinatorial set of permutations, represented as a graph. The numerical example is given.

1. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. – П.: РВВ ПУЕТ, 2011. – 309 с.
3. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10 – 16.
4. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие машины и системы. – 2009. − № 4. – С. 36 – 42.

Одержано 20.03.2016