УДК 519.1

М.Ф. СЕМЕНЮТА

ПРО ДИСТАНЦІЙНУ АНТИМАГІЧНУ РОЗМІТКУ ГРАФІВ

Досліджується антимагічний тип вершинної розмітки графа. Для циркулянтних графів знайдена необхідна умова, а для голландського вітряка – необхідна і достатня умови існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки.

Вступ. Під розміткою графа $G = (V, E)$ розуміємо відображення множини елементів графа на скінченну множину, що складається з натуральних чисел. Отримані образи називають мітками. Вершинам або ребрам поставимо у відповідність ваги (суми міток), які визначаються за певним правилом. Якщо всі ваги однакові, мова йде про магічний тип розмітки, якщо різні – про антимагічний. Для вершинних (реберних) розміток областю значень є множина вершин V (ребер E), а для тотальних – множина $V \cup E$. Вивчення магічних розміток започатковано в роботі Д. Седлячека 1963 року [1]. Він визначив магічну розмітку графа G, як таку бієкцію множини ребер на множину натуральних чисел, що ребра дістають різні мітки і суми міток ребер, інцидентних даній вершині, однакові для кожної вершини. В 1970 році А. Котціг
і А. Роса [2] тотальну розмітку f графа $G = (V, E)$, при якій кожне ребро отримує вагу $f(u)+f(v)+f(uv)$, де $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$, назвали магічною за умови, що ваги всіх ребер однакові та дорівнюють числу, яке називають магічною сталою. Щоб розрізнити ці поняття, для останнього почали використовувати термін реберно-магічна тотальна розмітка. Н. Хартсфілд і Г. Рінгель у роботі [3] 1989 року заклали основи для антимагічного типу розміток. Антимагічна розмітка графа $G = (V, E)$ являє собою таку бієкцію множини E на множину чисел 1, 2,...

…, $|E|$, що вершинні суми міток попарно різні, де вершинна сума – це сума міток ребер, інцидентних даній вершині. Означення (a, d) – реберно-антимагічної тотальної розмітки запропоновано в 2000 році [4]. Це тотальна розмітка, при якій ваги ребер утворюють арифметичну прогресію. В 2012 році, як наслідок проведених досліджень, з'явилася (a, d) – дистанційна антимагічна розмітка, введена С. Арумугамом і Н. Камачі [5].

Розмітки графів знайшли широке коло застосувань у теоретичних дослідженнях, пов'язаних з вивченням розкладів графів та алгебраїчних комбінаторних структур, в теорії відображень, в теорії поля. Серед практичних застосувань можна відмітити такі напрямки, як кодування радарних імпульсів, мережеве планування, управління базами даних, астрономія.

Розглянемо скінченні неорієнтовані графи без кратних ребер та петель. Під вагою $w(u)$ вершини u графа $G = (V, E)$, при вершинній розмітці f, розуміємо суму міток вершин, суміжних з u, тобто $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$, де $v \in V(G)$ і $N(u)$ – множина суміжності вершини u.

(a, d)-дистанційною антимагічною розміткою графа $G = (V, E)$ порядку n називається така бієкція $f: V(G) \to \{1, 2, \dots, n\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію a, $a + d$, $a + 2d$, …, $a + (n - 1)d$ з першим членом a і різницею d, де a, d – фіксовані невід'ємні цілі числа і $a \geq 1$, $d \geq 0$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

С. Арумугам і Н. Камачі, які започаткували дану розмітку, отримали декілька базових результатів [5]. Встановили необхідну умову існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки графа, довели, що цикл C_n буде (a, d)-дистанційним антимагічним графом лише коли n – непарне і $d = 1$, а граф C_{2n}^{+} є $(2n + 2, 1)$-дистанційним антимагічним графом. Також запропонували дослідити основні класи графів на наявність такої розмітки. Наступний крок зроблено в роботі [6], де досліджуються на дистанційну антимагічність ланцюги P_n при $2 \leq n \leq 15$, диз'юнктивне об'єднання ізоморфних копій циклу C_n, голландський вітряк F_n та графи з порядком меншим 6. Задачі, що розв'язуються в [5 і 6] можна поділити на два типи. До першого віднесемо задачу знаходження умов існування розмітки, а до другого – задачу визначення аналітичного опису розмітки, який дозволяє знайти її безпосередньо побудовою. В даній статті розглядається задача 1-го типу для циркулянтних графів. Також досліджено умови існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки графа F_n.

В наступній лемі сформульована необхідна умова існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки графа G, де δ і Δ – його мінімальний і максимальний степені, відповідно.

Лема 1 [5]**.** Якщо граф G є (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n, то

$$d \le \frac{2n\Delta - \Delta(\Delta-1) - \delta(\delta+1)}{2(n-1)}.$$

Наслідок 1 [5]**.** Якщо граф G є r-регулярним (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n з $r \ge 2$, то $d < r$.

Необхідна і достатня умови існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки для 1-регулярного графа наведені в теоремі 1.

Теорема 1 [5]**.** Граф G є (1, 1)-дистанційним антимагічним тоді і тільки тоді, коли кожна його компонента є ізоморфним образом P_2.

Нехай $s_1, s_2, \ldots, s_m, n$ – натуральні числа, такі, що $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_m < n$. Неорієнтований граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ з множиною вершин $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ і ребрами (u_i, u_{i+s_j}), для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, де $i + s_j$ береться за модулем n, називають циркулянтним графом, а m – його розмірністю.

Елементи породжуваної множини $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ називають твірними. Параметричний опис $C(n; S)$ повністю визначає циркулянтний граф порядку n і розмірності m. Його степінь дорівнює $2m$, якщо $s_m < n/2$. Якщо n парне і $s_m = n/2$, то $C(n;S)$ є $(2m - 1)$-регулярним графом. В роботі [7] показано, що циркулянтний граф $C(n; S)$ є зв'язним, тоді і тільки тоді, коли найбільший спільний дільник (НСД) $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$. Граф $C(n; S)$ буде двочастковим, якщо $s_1, s_2, \ldots, s_m$ – непарні, а n – парне [7].

Теорема 2. Циркулянтний граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, де $s_m<n/2$ і НСД $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$, не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки, якщо $d \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ і $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

Доведення. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка f для графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, де $s_m < n/2$ і НСД $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$. Це $2m$-регулярний зв'язний граф. Обчислимо суму ваг всіх його вершин:

$$2m\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = an + \frac{dn(n-1)}{2}. \quad (1)$$

З рівності (1) маємо

$$a = m(n+1) - \frac{d(n-1)}{2}. \quad (2)$$

З останньої рівності випливає, що розмітка f може бути (a, d)-дистанційною антимагічною лише в наступних випадках: $d \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ і $n \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ або $d \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

Теорему доведено.

Теорема 3. Циркулянтний граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, де $s_m = n/2$ і НСД $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$, не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки, якщо $d \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

Доведення. При $s_m = n/2$ і НСД $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$, граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ являє собою $(2m - 1)$-регулярний зв'язний граф парного порядку. Припустимо, що для нього існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка. Обчислимо суму ваг всіх вершин і знайдемо значення a:

$$a = d + \frac{(2m-1-d)(n+1)}{2}. \tag{3}$$

Припущення виконується тільки при $d \equiv 1(\mathrm{mod}2)$, так як $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ за умовою.

Теорему доведено.

Теорема 4. Циркулянтний граф $C_n(s)$, де $s \leq (n - 1)/2$ є $(a, 1)$-дистанційним антимагічним, якщо n – непарне і $a > 1$. Циркулянтний граф $C_n(n/2)$ є $(1, 1)$-дистанційним антимагічним.

Доведення. Якщо НСД $(s, n) = 1$ для непарного n і $s \leq (n - 1)/2$, тоді $C_n(s)$ – цикл порядку n. Він допускає $(a, 1)$-дистанційну антимагічну розмітку з $a > 1$ [5].

Нехай $s \leq (n - 1)/2$ і НСД $(s, n) = h$, тоді граф $C_n(s)$ являє собою диз'юнктивне об'єднання h копій циклу $C_{n/h}$. В такому разі, $C_n(s)$ буде $(a, 1)$-дистанційним антимагічним графом, коли n приймає непарні значення [6] і $a >$ 1.

Кожний циркулянтний граф $C_n(n/2)$ є диз'юнктивним об'єднанням n копій ланцюга P_2, тому допускає $(1, 1)$-дистанційну антимагічну розмітку [5].

Теорему доведено.

Циркулянтний граф $C_n(1, s)$ є 4-регулярним, якщо $s<n/2$ і 3-регулярним, якщо $s = n/2$. Оскільки НСД $(1, s, n) = 1$, то $C_n(1, s)$ – зв'язний граф. Для нього маємо результати, описані в наступних теоремах.

Теорема 5. Циркулянтний граф $C_n(1, s)$, де $s<n/2$, не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки, якщо $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ і $d = 1$ або $d = 3$.

Доведення. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка для графа $C_n(1, s)$, де $s < n/2$. З леми 1 випливає, що d може приймати значення менші, ніж 4. З рівності (2) маємо:

$$a = 2(n+1) - \frac{d(n-1)}{2}.$$

Якщо $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$ і $d = 1$ або $d = 3$, тоді a приймає не натуральні значення. Прийшли до протиріччя з припущенням.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо циркулянтний граф $C_n(1, s)$, де $s < n/2$ допускає (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку, то $n \equiv 1(\mathrm{mod}2)$, $d = 1$ і $a = (3n + 5)/2$ або $n \equiv 1(\mathrm{mod}2)$, $d = 3$ і $a = (n+7)/2$, або $d = 2$ і $a = n + 3$.

Доведення наслідку випливає безпосередньо з теореми 4.

Циркулянтний граф $C_5(1, 2)$ – це повний граф порядку 5. Якщо визначити його вершинну розмітку f, як $f(u_i) = i$, де $i = 1, \ldots, 5$, $u_i \in V(C_5(1, 2))$, то f є (10, 1)-дистанційною антимагічною розміткою $C_5(1, 2)$.

На рисунку показано циркулянтний граф $C_7(1, 2)$. Задамо вершинну розмітку f наступним чином:

$$f(u_1) = 1,\ f(u_2) = 4,\ f(u_3) = 7,\ f(u_4) = 3,\ f(u_5) = 6,\ f(u_6) = 2,\ f(u_7) = 5,$$

де $u_i \in V(C_7(1, 2))$ для $i = 1, \ldots, 7$.

Визначимо ваги вершин:

$$\begin{aligned}
w(u_1) &= f(u_2) + f(u_3) + f(u_6) + f(u_7) = 18,\\
w(u_2) &= f(u_1) + f(u_3) + f(u_4) + f(u_7) = 16,\\
w(u_3) &= f(u_1) + f(u_2) + f(u_4) + f(u_5) = 14,\\
w(u_4) &= f(u_2) + f(u_3) + f(u_5) + f(u_6) = 19,\\
w(u_5) &= f(u_3) + f(u_4) + f(u_6) + f(u_7) = 17,\\
w(u_6) &= f(u_1) + f(u_4) + f(u_5) + f(u_7) = 15,\\
w(u_7) &= f(u_1) + f(u_2) + f(u_5) + f(u_6) = 13.
\end{aligned}$$

Вони утворюють арифметичну прогресію з першим членом $a = 13$ і різницею $d = 1$. Тому розмітка f для $C_7(1, 2)$ є (13, 1)-дистанційною антимагічною.

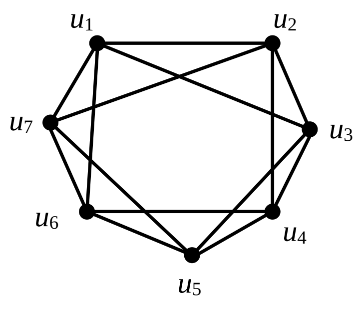

РИСУНОК. Циркулянтний граф $C_7(1, 2)$

Циркулянтний граф $C_n(1, n/2)$ при $n = 4$ є повним графом, він буде (6, 1)-дистанційним антимагічним.

Якщо $n = 6$, то $C_6(1, 3)$ є повним двочастковим графом. Позначимо $V(C_6(1, 3)) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, тоді $N(u_1) = N(u_2) = N(u_3) = \{u_2, u_4, u_6\}$. З цього випливає [5], що $C_6(1, 3)$ не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки. Далі дослідимо графи $C_n(1, n/2)$, для яких $n \geq 8$.

Теорема 6. Якщо для $C_n(1, n/2)$, де $n \geq 8$ існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка, то $d = 1$, $a = n + 2$.

Доведення. $C_n(1, n/2)$ є 3-регулярним зв'язним графом парного порядку. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка даного графа, тоді $d = 1$ або $d = 2$.

З рівності (3) маємо $a = d + \dfrac{(3-d)(n+1)}{2}$. Отже $a = n + 2$ при $d = 1$, а при $d = 2$, не існує парних натуральних чисел $n \geq 8$, що задовольняють рівності $a = 2 + \dfrac{n+1}{2}$, так як $n \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

Теорему доведено.

Голландський n-вітряк F_n (граф дружби) утворює n копій циклу порядку три, кожні два з яких перетинаються тільки в одній, спільній для всіх циклів, вершині. Результати відносно його дистанційної антимагічності у вигляді двох теорем подано в [6]. В теоремі 5 пропонуємо простіший, ніж в [6], спосіб встановлення умов існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки F_n.

Теорема 7. Граф F_n допускає (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку тоді і тільки тоді, коли $d = 1$ і $n = 1$ або $n = 2$.

Доведення. Позначимо v вершину степеня $2n$ в графі F_n. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка f для F_n. Очевидно, що $n(2n + 1) \leq w(v) \leq n(2n + 3)$.

Якщо $w(v) = n(2n + 1)$, то $f(v) = 2n + 1$ і для деякої вершини u вага прийме значення $w(u) = 4n + 1$. Тоді $w(v) - w(u) = 2n^2 - 3n - 1$. З іншого боку, $w(v) - w(u) \leq 2n$ або $2n^2 - 5n - 1 \leq 0$. Остання нерівність виконується лише при $n \leq 2$. Для $n = 1$ маємо цикл, тобто $F_1 = C_3$, який є $(a, 1)$-дистанційним антимагічним графом [5]. Для $n = 2$, d може приймати значення 1 або 2, в обох випадках $f(v) = 5$. Іншим вершинам поставимо у відповідність мітки 1, 2, 3, 4 так, що суміжні вершини дістають мітки, які відрізняються на одиницю. Отримаємо (6, 1)-дистанційну антимагічну розмітку F_2. Нехай $d = 2$, тоді, додавши суми ваг всіх вершин, знайдемо, що $a = 1$. Це неможливо, оскільки (1, 1)-дистанційним антимагічним може бути лише граф, у якого кожна компонента є ізоморфним образом P_2 [5].

Якщо $w(v) = n(2n + 3)$, то $f(v) = 1$. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що для деякої вершини u її вага становить $w(u) = 2n + 2$ і $w(v) – w(u) = 2n^2 + n – 2 \le 2n$ або $2n^2 – n – 2 \le 0$. Остання нерівність виконується лише при $n = 1$.

Нехай $w(v) = n(2n + 2)$, розглянемо довільну вершину u, відмінну від v, її вага набуває значення $w(u) = f(v) + f(z)$, де u і z суміжні вершини. Тоді $w(v) – w(u) = 2n^2 + 2n – (f(v) + f(z)) \le 2n$ або $f(v) + f(z) \ge 2n^2$. Остання нерівність не має розв'язку для $f(v)$ і $f(z)$ з множини $\{1, 2, …, 2n+1\}$.

Таким чином, F_n має (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку лише при $d = 1$ і $n = 1$ або $n = 2$.

Теорему доведено.

Висновок. Поняття (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки виникло порівняно недавно, в 2012 році, тому цей напрямок містить багато відкритих проблем. Результати даної роботи є початком їх розв'язку.

М.Ф. Семенюта

О ДИСТАНЦИОННОЙ АНТИМАГИЧЕСКОЙ РАЗМЕТКЕ ГРАФОВ

Исследуется антимагический тип вершинной разметки графа. Для циркулянтных графов найдено необходимое условие, а для голландской мельницы – необходимое и достаточное условие существования (a, d)-дистанционной антимагической разметки.

M.F. Semeniuta

ON DISTANCE ANTIMAGIC LABELING OF GRAPHS

We studied the antimagic type of a vertex labeling of the graph. We have found necessary condition for existence of (a, d)-distance antimagic labelling for circulation graphs, as well as necessary and sufficient conditions for existence of (a, d)-distance antimagic labelling for a Dutch windmill graph.

1. *Sedlacek J.* Problem, 27 in: Theory of graphs and its applications // Proc. Symposium Smolenice. – 1963. – P. 163 – 164.
2. *Kotzig A., Rosa A.* Magic valuations of finite graphs // Canad. Math. Bull. – 1970. – Vol. 13. – P. 451 – 461.
3. *Hartsfield N., Ringel G.* Supermagic and antimagic graphs // J. Recreat. Math. – 1989. – Vol. 21, N 2. – P. 107 – 115.
4. *Simanjuntak R., Bertault F., Miller M.* Two new (a, d)-antimagic graph labelings // Proc. of Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms. – 2000. – Vol. 11. – P. 179 – 189.
5. *Arumugam S., Kamatchi N.* On (a, d)-distance antimagic graphs // Australasian journal of combinatorics. – 2012. – Vol. 54. – P. 279 – 287.
6. *Nalliah M.* Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. thesis // M. Nalliah. – The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014 – 135 p.
7. *Heuberger C.* On planarity and colorability of circulant graphs // Discrete Math. – 2003. – Vol. 268. – P. 153–169.

Одержано 20.03.2016