УДК 517.977.56

М.М. КОПЕЦ, С.Ф. САБОЛ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ БАЛКИ

Рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления процессом колебаний призматической балки. Используя метод множителей Лагранжа, получены необходимые условия оптимальности для исследуемой задачи. Из этих условий выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати. Решение полученной системы позволяет выписать явную формулу для оптимального управления.

Введение. Исследование задач оптимального управления колебательными процессами в настоящее время достаточно актуально. Это объясняется существенным прогрессом в космической технике, самолетостроении, ракетостроении, судостроении и т. п. В теории оптимального управления одно из центральных мест справедливо занимает линейно-квадратическая задача, поскольку она служит важным инструментом для процесса исследования других актуальных задач оптимизации (задача аналитического конструирования регулятора, оптимальная фильтрация Калмана – Бьюси). Эта задача для систем со сосредоточенными параметрами изучена достаточно подробно [1], чего нельзя утверждать об аналогичной задаче для систем с распределенными параметрами. В некоторых известных монографиях она вовсе не рассматривается [2]. В других работах для ее исследования использованы методы функционального анализа [3], что обуславливает достаточно высокий уровень абстракции. Цель данной работы состоит в исследовании линейно-квадратичной задачи оптимального управления процессом колебаний призматической балки, а именно: получение необходимых условий оптимальности и вывод формулы для вычисления оптимального управления с использованием классических методов математической физики.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс в области Ω, где Ω имеет вид $\Omega=\{(t,x): t\in[t_0,t_1], x\in[0,l]\}$, описывается следующим уравнением

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+\frac{F}{m}\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}=u(t,x)\,, \tag{1}$$

где действительные числа $l \succ 0$, $t_0 \geq 0$, $t_1 \succ t_0$ известны. Обозначим EJ – жесткость балки, F – сжимающая сила, направленная вдоль оси балки, m – масса поперечного сечения балки, функция $z(t,x)$ описывает прогиб балки в точке x в момент времени t. Известно, что уравнение (1) описывает процесс колебаний призматической балки с учетом действия осевой силы [4, с. 285]. Для уравнения (1) заданы начальные условия

$$z(t_0,x)=f(x)\,,\ \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x), \tag{2}$$

где функции $f(x)\in W_2^{1,0}(0,l)$, $g(x)\in L_2(0,l)$ предполагаются известными, символ $\frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}$ обозначает значение частной производной $\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}$ при $t=t_0$.

Подобным образом трактуются символы $\frac{\partial z(t,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$ и т. д. Концы балки свободно опертые. Поэтому краевые условия для уравнения (1) имеют вид

$$z(t,0)=0,\ \frac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}=0,\ z(t,l)=0,\ \frac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}=0. \tag{3}$$

Функция $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Функционал качества процесса задан следующим образом:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dxdt. \tag{4}$$

Для фиксированного допустимого управления $u(t,x)$ решением $z(t,x)$ задачи $(1)-(4)$ считается обобщенное решение $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустимое управление, на котором реализуется минимум функционала (4), называется оптимальным управлением.

Необходимые условия оптимальности. Метод множителей Лагранжа приводит к таком выводу.

Теорема 1. Для нахождения оптимального управления $u(t,x)$ в задаче оптимизации (1) – (4) имеем следующую систему соотношений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+\dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}=u(t,x),\\ z(t_0,x)=f(x), \dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x),\\ z(t,0)=0, \dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}=0, z(t,l)=0, \dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}=0,\\ \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=-\dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}-\dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+z(t,x),\\ p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}, \dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x),\\ p(t,0)=0, \dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}=0, p(t,l)=0, \dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0,\\ u(t,x)+p(t,x)=0,\end{cases} \quad (5)$$

где функция $p(t,x)$ – множитель Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим следующий вспомогательный функционал:

$$\Psi(p,u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)[u(t,x)-$$
$$\left.-\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}-\frac{F}{m}\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt. \quad (6)$$

Дальше находим выражение $\Delta\Psi$ для приращения функционала (6)

$$\Delta\Psi=\Psi(p+\varepsilon\delta p,u+\varepsilon\delta u,z+\varepsilon\delta z)-\Psi(p,u,z).$$

Предполагая выполнение краевых условий

$$p(t,0)=0,\ p(t,l)=0,\ \frac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0, \quad (7)$$

после несложных преобразований получаем

$$\Delta\Psi = \varepsilon\int_0^l\left(z(t_1,x)+\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\right)\delta z(t_1,x)\,dx+$$

$$+\varepsilon\int_0^l\left(\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}-p(t_1,x)\right)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\left(z(t,x)-\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}-\frac{F}{m}\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\right)\delta z(t,x)+[u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\delta p(t,x)\left[u(t,x)-\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}-\frac{F}{m}\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2\,dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt. \tag{8}$$

Необходимым условием экстремума функционала (6) является равенство нулю его первой вариации. На основании соотношений (7) и выражения (8) это условие приводит к системе уравнений (5).

Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати. Равенства $p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x)$ дают основание для предположения о существовании таких зависимостей:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=-\int_0^l\left[R_{11}(t,x,y)z(t,y)+R_{12}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy,$$

$$p(t,x)=\int_0^l\left[R_{21}(t,x,y)z(t,y)+R_{22}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy,$$

где функции $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$ следует найти.

Подобно тому, как это было выполнено в [6], для их нахождения получаем следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t} - \dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^4} - \dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^2} - \\ -\dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^4} - \dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^2} - \\ -\displaystyle\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)\,ds + \delta(x-y) = 0, \\ \dfrac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t} - \dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^4} - \dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^2} + \\ +R_{11}(t,x,y) - \displaystyle\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)\,ds = 0, \\ \dfrac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t} - \dfrac{EJ}{m}\dfrac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^4} - \dfrac{F}{m}\dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^2} + \\ +R_{11}(t,x,y) - \displaystyle\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)\,ds = 0, \\ \dfrac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t} + R_{12}(t,x,y) + R_{21}(t,x,y) - \\ -\displaystyle\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)\,ds = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

При этом должны выполняться краевые условия

$$\begin{cases} R_{12}(t,x,0) = 0,\ R_{12}(t,x,l) = 0,\ \dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,0)}{\partial y^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^2} = 0, \\ R_{22}(t,x,0) = 0,\ R_{22}(t,x,l) = 0,\ \dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,0)}{\partial y^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

и условия трансверсальности

$$\begin{cases} R_{11}(t_1,x,y) = \delta(x-y), R_{12}(t_1,x,y) = 0, \\ R_{21}(t_1,x,y) = 0, R_{22}(t_1,x,y) = \delta(x-y). \end{cases} \tag{11}$$

В результате приходим к таким выводам.

Теорема 2. Функции $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$ являются решением нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (9), удовлетворяют краевым условиям (10) и условиям трансверсальности (11).

Теорема 3. Если известны функции $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$ из теоремы 2, то оптимальное управление $u(t,x)$ имеет вид

$$u(t,x) = -\int_0^l \left[R_{21}(t,x,y)z(t,y) + R_{22}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} \right] dy.$$

Выводы. В данной статье получена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными для линейно-квадратической задачи оптимального управления процессом колебаний призматической балки. Решение этой системы предоставляет возможность выписать явную формулу для вычисления оптимального управления. Перспективным для дальнейшего исследования представляется получение явных формул для функций $R_{11}(t,x,y)$, $R_{12}(t,x,y)$, $R_{21}(t,x,y)$, $R_{22}(t,x,y)$, аналогично тому, как это было сделано в работе [5], и исследовать поведение этих функций при $t_1 \to \infty$. Также следует отметить целесообразность обобщения результатов, полученных в данной работе, для игровых ситуаций [7] и на случай динамических систем с дробными производными [8 – 9].

М.М. Копець, С.Ф. Сабол

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОЛИВАННЯ ПРИЗМАТИЧНОЇ БАЛКИ

Розглянута лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом коливання призматичної балки. Використовуючи метод множників Лагранжа, отримані необхідні умови оптимальності. Із цих умов виведена система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв'язок отриманої системи дозволяє виписати явну формулу для оптимального керування.

M.M. Kopets, S. F. Sabol

OPTIMAL CONTROL BY PROCESS OF VIBRATION OF THE PRISMATIC BEAM

In the present paper the linear-quadratic optimal control problem for vibration process of the prismatic is considered. The necessary optimality conditions are obtained by using the Lagrange multiplier method. The system of integro-differential Riccati equations is derived from this conditions. The solution of obtained system permits to write the closed formula for optimal control.

1. *Андреев Ю.Н.* Управлене конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управлення системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 476 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управлене системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
4. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Государственное научно-техническое изд-во машиностроительной литературы, 1957. – 336 с.

5. *Копец М..М.* Задача оптимального управления процессом колебания струны // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2014. – С. 32 – 38.
6. *Копец М.М. О*птимальное управление процессом колебаний тонкого прямоугольного стержня // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». – 2015. – № 3. – С. 41 – 53.
7. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наукова думка, 1992. – 384 с.
8. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана – Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 6. – С. 66 – 99.
9. *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Украинский математический журнал. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1566 – 1583.

Получено 31.03.2016