Теорія оптимальних рішень

Анализируются некоторые модели принятия решений для оптимизации производственной деятельности предприятия в условиях монопольного производства для получения максимальной прибыли. Решения определяются путем учета различных факторов производства, величин спроса и предложения, цен и т. д. Для разных моделей спроса (детерминированных, рисковых, неопределенных) предлагаются три алгоритма решения соответствующих моделей. Исследуемые математические модели содержат недифференцируемые функции, и численные алгоритмы решения строятся на основе метода обобщенного градиента.

УДК 519.6

А.Ф. ГОДОНОГА, А.А. БАРАКТАРЬ, Б.М. ЧУМАКОВ

МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ МОНОПОЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Введение. Предприятие имеет монопольное положение на рынке, если является единственным, предлагающим на рынок определенный тип незаменимой продукции. В данной работе исследуется задача определения максимальной прибыли монополиста в случае, когда предложение покрывает полностью рынок и, следовательно, предприятие фиксирует некоторые потери, связанные с перепроизводством. Для принятия решения в таких случаях, на основе обобщенного градиентного метода предлагаются три алгоритма, в зависимости от характера спроса: детерминированный, стохастический или неопределенный.

Рассматривается модель [1, 2], где целевая функция состоит в максимизации гипотетической прибыли предприятия монополиста

$$R(y)=\sum_{j=1}^{n} c_j(\bullet)*y_j \to \max_y \qquad (1)$$

при выполнении ограничений на объемы потребления факторов производства,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m} \qquad (2)$$

и естественных условий

$$0\le \underline{y}_j \le y_j \le \overline{y}_j, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

где $c_j(\bullet)$ – удельная цена продукта j с учетом предложения и ситуации на рынке; y_j – количество (объем) продукта j – величину которого необходимо будет определить; $R(y)$ – суммарная прибыль, которую можно было бы получить от продажи продукции в количествах $y_1, y_2,.., y_n$; b_i – объем ресурсов типа i (сырье, рабочая сила, оборудование, энергия и т. д.); a_{ij} – технологические нормы использования ресурсов каждого типа i, с указанием количества ресурса, необходимого для выпуска единицы продукции типа j; $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$. В модели учитывается специфическое условие для монополиста – тенденция к снижению цены продукта при увеличении его поставок.

Модель (1) – (3) это нелинейная модель и адекватно описывает состояние предприятия, только если у него есть все необходимые ресурсы для производства и вся продукция будет полностью реализована. Но в повседневной деятельности производители, часто сталкиваются с ситуациями, которые модифицируют такую модель. Решение, о количестве товаров, подлежащих изготовлению, существенно зависит от спроса, определенном в дальнейшем вектором $Y = (Y_1, Y_2,..., Y_n)$ и от производственных мощностей. Таким образом, в ситуациях, когда спрос меньше объема произведенного продукта, предприятие несет определенные потери (дополнительные расходы) относительно избыточного производства: $y_j > Y_j$.

Пусть $p = (p_1, p_2,..., p_n)$ вектор удельных потерь. В работе [3] прибыль определяется при постоянных $c_j(\bullet)$, а в рассматриваемом случае общая прибыль определяется значением функции

$$R(y,Y) = \sum_{j=1}^{n}\left[c_j(\bullet) * \min\{y_j;\ Y_j\} - p_j * \max\{0;\ y_j - Y_j\}\right] \to \max_{y}. \quad (4)$$

Соответственно функция $R_j(y_j, Y_j) = R_j(y_j, Y_j) = c_j(\bullet) * \min\{y_j;\ Y_j\} - p_j * \max\{0; y_j - Y_j\}$ определяет прибыль, которую могли бы получить при реализации продукта j. Такая функция является нелинейной и, более того, недифференцируемой по y_j.

$$R_j(y_j, Y_j) = \begin{cases} c_j(\bullet) \cdot y_j, & \text{если } y_j \le Y_j, \\ (c_j(\bullet) + p_j)Y_j - p_j y_j, & \text{если } y_j > Y_j. \end{cases}$$

На рис. 1 и 2 показаны графики зависимости $R_j(y_j, Y_j)$ от y_j (для фиксированного Y_j) и от Y_j (в этом случае предполагается фиксированным y_j).

Если бы соответствующие потери не учитывались, независимо от значения $y_j > Y_j$ доход соответствующий продукту j имел бы одно и тоже значение $c_j(Y_j) \cdot Y_j$. Для фиксированного объема потребления Y_j значение, определяемое функцией $R_j(y_j, Y_j)$ будет расти, пока $y_j = Y_j$, где будет достигаться максимальное значение. В дальнейшем $R_j(y_j, Y_j)$ убывает и в точке $y_j = y_j^0 = \left(\dfrac{c(Y_j)}{p_j} + 1\right) \cdot Y_j$ достигает нулевого значения и отрицательных значений, если $y_j > y_j^0$.

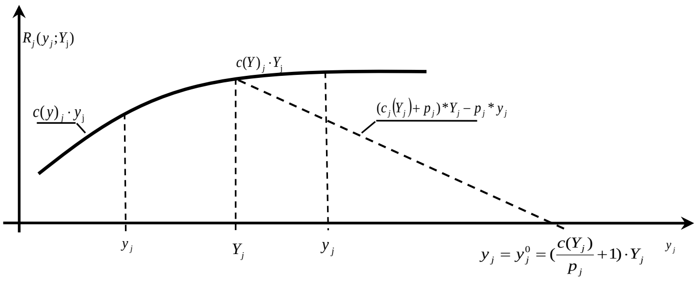

РИС. 1. График зависимости функции $R_j(y_j,Y_j)$ от предложения для фиксированного объема потребления Y_j

На рис. 2 показан график случая, когда при больших вариациях спроса Y_j для определенного объема предложения y_j, значение прибыли $R_j(y_j,Y_j)$ может варьировать в достаточно большом диапазоне, принимая даже отрицательные значения.

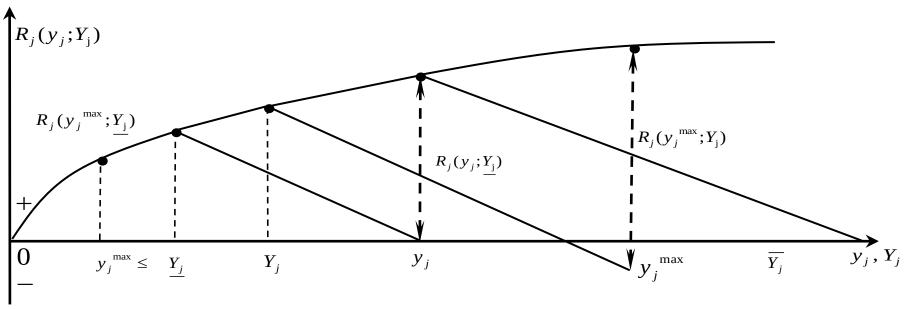

РИС. 2. График изменения значения $R_j(y_j,Y_j)$ в зависимости от спроса при фиксированном предложении y_j

То есть насколько производитель будет меньше производить, настолько риск получения убытков будет уменьшаться, но и прибыль будет меньше. Но при больших объемах предложения растет и риск получения существенных потерь. Таким образом, при небольших объемах спроса, доход предприятия может оказаться в зоне отрицательных значений (убытков). Тогда, учитывая факторы спроса Y_j, получим следующую модель:

$$R(y,Y) = \sum_{j=1}^{n} R_j(y_j;Y_j) \to \max_{y} \tag{5}$$

при ограничениях (2) и

$$\underline{y}_j \leq y_j \leq \overline{y}_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\underline{Y}_j \leq Y_j \leq \overline{Y}_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где $\underline{Y}_j$ и $\overline{Y}_j$ соответственно минимальный и максимальный спрос на j-й продукт.

Если предположить, что производитель мог бы на рынке факторов производства приобрести дополнительные объемы $x_1, x_2, .., x_m$ по фиксированным $q_1, q_2, .., q_m$ или по переменным $q_1(x_1), q_2(x_2), .., q_m(x_m)$ ценам, для увеличения дохода, тогда получается обобщение ранее описанной модели.

Учитывая затраты на приобретение дополнительных ресурсов целевая функция (5) уточняется

$$R(y, Y, x) = \sum_{j=1}^{n} R_j(y_j, Y_j) - \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot x_i \to \max_{(y,x)}, \tag{8}$$

а ограничения (2) – следующими неравенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le b_i + x_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$0 \le x_i \le \overline{x}_i\ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

где $\overline{x}_i$ – максимальный объем ресурса i, который может быть приобретен.

Предполагается еще, что цена реализации продукта j, в зависимости от объема предложения y_j, представляется в следующем виде [4]:

$$c_j(\bullet) = \begin{cases} c_j(y_j), & \text{если } y_j \le Y_j, \\ c_j(Y_j), & \text{если } y_j > Y_j. \end{cases} \tag{11}$$

$$c_j(Y_j) = \begin{cases} \overline{c}_j, & \text{если } Y_j \le \underline{y}_j, \\ c_j(\tilde{y}_j), & \text{если } \underline{y}_j \le Y_j \le \overline{y}_j,\ Y_j \le y_j;\ \text{где } \tilde{y}_j = Y_j, \end{cases} \tag{12}$$

$$c_j(y_j) = \overline{c}_j - (\overline{c}_j - \underline{c}_j) * \frac{y_j - \underline{y}_j}{\overline{y}_j - \underline{y}_j}. \tag{13}$$

Здесь $\overline{c}_j$ – максимальная, а $\underline{c}_j$ – минимальная цена j-го продукта.

Рассмотрим модель принятия решения в форме (8), (9) – (13), (6), (7). В зависимости от природы спроса (детерминированный, стохастический или неопределенный) предлагаются три алгоритма.

Для удобства описания алгоритмов определяются следующие функции и множества:

$$\varphi_i(y, x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i - x_i, \quad \varphi(y, x) = \max_{1 \le i \le m} \varphi_i(y, x_i).$$

$$D_y = \{ y \in E^n : \underline{y}_j \le y_j \le \overline{y}_j,\ j = \overline{1,n} \}, \quad D_x = \{ x \in E^m : 0 \le x_i \le \overline{x}_i,\ i = \overline{1,m} \},$$

$D = D_y \times D_x$ – декартово произведение множеств D_y и D_x.

Алгоритм 1 [5, 6] (детерминированный случай).

Реализовывается метод обобщенного градиента [7] в следующем виде.

Итеративно строится последовательность векторов $(y^0, x^0), \ldots, (y^k, x^k)$, $(y^{k+1}, x^{k+1}), \ldots$ Здесь (y^0, x^0) – произвольный элемент из $D = D_y \times D_x$. Далее, начиная с точки (y^k, x^k), следующий вектор (y^{k+1}, x^{k+1}) вычисляется по формуле

$$\begin{pmatrix} y^{k+1} \\ x^{k+1} \end{pmatrix} = \prod\nolimits_D \left[\begin{pmatrix} y^k \\ x^k \end{pmatrix} - h_k \cdot \begin{pmatrix} g_y^k \\ g_x^k \end{pmatrix} \right], \tag{14}$$

где h_k – величина шага на итерации k $\left(h_k > 0,\ h_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty \right)$ [1], $\prod_D(\bullet)$ – оператор проектирования точки (y, x) на область D; g^k – вектор сдвига на итерации k, который определяется следующим образом:

$$g^k = \begin{cases} -Ggrad\, R(y, Y, x) \text{ для } (y, x) = (y^k, x^k), \text{ если } \varphi(y^k, x^k) \le 0, \\ Ggrad\ \varphi(y, x) \ \text{ для } (y, x) = (y^k, x^k), \ \text{ если } \varphi(y^k, x^k) > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначение «*Ggrad*» означает какой либо обобщенный градиент [7] соответствующей функции, вычисленный относительно пары векторов (y, x).

А) компоненты g_y^k и g_x^k, соответствующие функции цели $R(y, Y, x)$, вычисляются следующим образом: $\left(g_x^k\right)_i = -q_i$, $i = \overline{1, m}$;

$$\left(g_y^k\right)_j = \begin{cases} \dfrac{\bar{c}_j \bar{y}_j - \underline{c}_j \underline{y}_j}{\bar{y}_j - \underline{y}_j} - 2\dfrac{\bar{c}_j - \underline{c}_j}{\bar{y}_j - \underline{y}_j} * y_j^{\,k} - p_j, \text{ если } y_j^{\,k} < Y_j,\ j = \overline{1, n}; \\ -p_j, \text{ если } y_j^{\,k} \ge Y_j. \end{cases} \tag{16}$$

Б) компоненты g_y^k и g_x^k, соответствующие функции-ограничению $\varphi(y, x)$ определяются по следующим формулам:

$$\left(g_y^k\right)_j = a_{i^* j}, \qquad \left(g_x^k\right)_i = \begin{cases} -1, \text{ для } i = i^* \\ 0, \ \text{ если } i \ne i^*, \end{cases}$$

где
$i^* \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $\varphi_{i^*}(y^k,\ x_{i^*}^k) = \varphi(y^k, x^k) = \max\{\varphi_1(y^k, x_1^k), \ldots, \varphi_m(y^k, x_m^k)\}$.

Замечание. Пусть $\tilde{y}^k = y^k - h_k \cdot g_y^k$, $\tilde{x}^k = x^k - h_k \cdot g_x^k$, а (y^{k+1}, x^{k+1}) проекция на область D точки $(\tilde{y}^k, \tilde{x}^k)$. Не сложно показать, что компоненты y_j^{k+1} и x_i^{k+1} вектора (y^{k+1}, x^{k+1}) определяются по правилам:

$$y_j^{k+1} = \begin{cases} \underline{y}_j, \quad \text{если} \quad \tilde{y}_j^k < \underline{y}_j, \\ \tilde{y}_j^k, \text{ если } \underline{y}_j \le \tilde{y}_j^k \le \bar{y}_j,\ j = \overline{1, n}, \\ \bar{y}_j, \quad \text{если} \quad \tilde{y}_j^k > \bar{y}_j, \end{cases} \qquad x_i^{k+1} = \begin{cases} 0, \text{ если } \tilde{x}_i^k < 0, \\ \tilde{x}_i^k, \quad \text{если } 0 \le \tilde{x}_i^k \le \bar{x}_i, \\ \bar{x}_i, \quad \text{если} \quad \tilde{x}_i^k > \bar{x}_i. \end{cases}$$

Все вышеперечисленные условия обеспечивают сходимость последовательности $\{(y^k, x^k)\}$ к оптимальному решению (y^*, x^*), для любой начальной точки (y^0, x^0) [5, 7].

Последовательность векторов $\{g^k\}$ генерирует процесс максимизации функции общей прибыли $R(y, Y, x)$ и одновременно обеспечивает уменьшение положительных отклонений значений $\varphi(y^k, x^k)$. Другими словами, если на итерации k, не нарушается ни одно из ограничений (9), тогда используется обобщенный градиент целевой функции. При нарушении любого из ограничений (9), используется градиент максимально нарушенного ограничения. Выполняя определенное число итераций, замечается все более несущественные нарушения базовых ограничений. При этом с возрастанием числа итераций последовательность (14), стремится к оптимальному решению (y^*, x^*).

Алгоритм 2 [1] (стохастический случай).

В данном случае предполагается, что в интервале $\underline{Y}_j \le Y_j \le \overline{Y}_j$, $j = \overline{1, n}$, спрос ведет себя случайным образом и распределение вероятностей $P(dY)$ известно. Модель (8), (9) – (13), (6), (7) конкретизируется в том смысле, что функция цели в этом случае выражает минимизацию средней прибыли данного предприятия. Следовательно, формально рассматривается математическое ожидание, относительно вектора Y, вида:

$$\overline{R}(y, x) = M_Y\left[R\left(y, Y, x\right)\right] =$$

$$= M_Y\left[\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(\bullet) * \min\left\{y_j; Y_j\right\} - p_j * \max\left\{0; y_j - Y_j\right\}\right]\right] - \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \to \max_{(y,x)}. \quad (17)$$

То есть модель принятия решения в стохастическом случае определяется через функцию цели (17), и с такими же ограничениями как в детерминированной модели (9) – (13), (6), (7). Сложность оптимизации стохастической модели происходит из-за практически невозможности вычисления значений функции $\overline{R}(y, x)$, тем более компонент ее обобщенных градиентов. В работе [8] предлагаются алгоритмы, которые обходят такие трудности и они называются прямыми методами стохастического программирования.

Таким образом, согласно [1], можно рассматривать алгоритм, аналогичный алгоритму 1 с той лишь разницей, что в реализации используются генерируемые независимые величины спроса $Y^0, Y^1, ..., Y^k, ...$, получаемые согласно закону распределения $P(dY)$. Вектор g^k, который будет определять направление сдвига на k-ой итерации также является случайным вектором, и вычисляется аналогично (15)

$$g^k = \begin{cases} -Ggrad\, R(y, Y^k, x) \text{ для } (y,x) = (y^k, x^k) \text{ если } \varphi(y^k, x^k) \le 0, \\ Ggrad\, \varphi(y,x) \text{ для } (y,x) = (y^k, x^k) \text{ если } \varphi(y^k, x^k) > 0. \end{cases}$$

Безусловно, в формулах (16) необходимо заменить Y_j на Y_j^k, это влечет за собой то, что последовательность векторов (y^k, x^k) имеет случайный характер. С практической точки зрения, представляет интерес сходимость этой последовательности с вероятностью 1 к оптимальному решению (y^*, x^*). Исходя из свойства модели (17), (9) – (13), (6), (7), и из правил выбора шага h_k, например, $h_k = \frac{H}{(k+1)^{\alpha}}, H > 0,\ 0 < \alpha \le 1,$ обеспечивается такая сходимость последовательности $\{(y^k, x^k)\}$ к точке (y^*, x^*) с вероятностью 1.

Для оценки средней прибыли на итерации k можно использовать стохастические оценки следующего вида:

$$\tilde{Y}\overline{R}(y^k, x^k) \approx \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} R(y^k,\ \tilde{Y}^l,\ x^k),$$

где $\tilde{Y}^1, \tilde{Y}^2, ..., \tilde{Y}^l, ..., \tilde{Y}^L$ представляет собой серию независимых наблюдений случайного вектора спроса.

Алгоритм 3 (случай неопределенности).

В данном случае соответствующая задача может быть решена, запуская такой же итеративный процесс как в алгоритме 2. Следует отметить, что в данном случае используется критерий $\max\limits_{(y,x)} \min\limits_{Y}$. При этом на итерации k генерируется последовательность $\tilde{Y}^k$ с конкретным распределением [5], например, равномерным распределением таким, что $\underline{Y} \le \tilde{Y}^k \le \overline{Y}$. Вектор g^k определяется, как и в стохастическом случае, причем Y^k определяется по принципу:

$$Y^k = \begin{cases} Y^{k-1}, \text{ для } R(y^k, Y^{k-1}, x^k) \le R(y^k, \tilde{Y}^k, x^k), \\ \tilde{Y}^k, \quad \text{для } R(y^k, Y^{k-1}, x^k) > R(y^k, \tilde{Y}^k, x^k). \end{cases}$$

Выводы. Модели, представленные в этой статье, описывают более широко процессы принятия решений в сфере производства, характерные монопольному предприятию, по сравнению с обычными моделями. Описанные модели могут быть использованы в процессе принятия решений в условиях определенности, риска или неопределенности и дают желаемые объемы производства в зависимости от того, как проявляются величины спроса. Для решения соответствующих моделей и достижения результатов в реальном времени, представлены три алгоритма разработанные на основе метода проекции обобщенного градиента. Для каждого численного алгоритма были проведены опыты, которые подтвердили их эффективность.

А.Ф. Годонога, А.А. Барактарь, Б.М. Чумаков

МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ МОНОПОЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

Аналізуються деякі моделі прийняття рішень для оптимізації діяльності підприємства в умовах монопольного виробництва з метою отримання максимального прибутку. Рішення визначаються шляхом врахування різноманітних факторів виробництва, величини попиту і пропозиції, ціни і т. д. Для різних моделей попиту (детермінований, ризик, невизначеність) пропонуються три алгоритми рішення відповідних моделей. Досліджувані математичні моделі містять недиференційовані функції і чисельні алгоритми для вирішення побудовані на методі узагальненого градієнта.

A.F. Godonoga, A.A. Baractar, B.M. Chumakov

MODEL DECISION MAKING UNDER PRODUCTION MONOPOLY

In this paper, are analyzed some decisional models for optimization of production activity for a monopolistic enterprise in order to obtain the maximum profit. Decisions are determined by input of factors of production, values of demand and supply, prices etc. For different behaviors of the demand (deterministic, risk, uncertain) propound three algorithm for corresponding model's solving. The researched mathematical models contain non-differentiable functions, and the numerical algorithms for solving are built on method of generalized gradient.

1. *Intriligator Michael D.* Econometric Models, Techniques, and Applications. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971. 638 p.
2. *Taha Hamdy* A. Operations Research an Introduction Third Edition, New York, London. 1982.
3. *Godonoagă A., Baractari A*. Modele economice nediferenţiabile. Aspecte decizionale. Chişinău: ASEM, 2011. 275 p.
4. *Tuceac A.* "Unele aspecte în modelarea comportamentului producătorului monopolist" Simpozionul Internaţional al Tinerilor Cercetători" Ediţia a VIII-a, 28–29 aprilie 2010, ASEM, Editura ASEM. P. 359 – 362.
5. *Godonoagă A., Baractari A., Bălan P*. Unele aspecte în evoluţia metodei gradientului generalizat. Materialele Conferinţei Internaţionale (ATIC, 24–26 martie 2010) „Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaţionale", Chişinău, Evrica. P. 74 – 87.
6. *Поляк Б.Т.* Один общий метод решения экстремальных задач. ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 1. С. 33 – 36.
7. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston, Kluwer Academic Publisher. 1998. 396 p.
8. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М: Наука, 1976. 240 с.

Получено 14.03.2017