ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Уточнено верхню межу орієнтованого роду $\gamma(G)$ простого графа G. Він є φ-образ двох не вироджених графів G_i без спільних ребер орієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототожненні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання X_i, $j = 1, 2, .., |\mathrm{X}_i|$, де під точкою розумітимемо або вершину, або довільну точку ребра графа G.

УДК 519.1

В.І. ПЕТРЕНЮК, Д.А. ПЕТРЕНЮК, І.Е. ШУЛІНОК

ВЕРХНЯ МЕЖА ОРІЄНТОВАНОГО РОДУ СКЛЕЙКИ ПРОСТИХ ГРАФІВ

Вступ. Основні позначення взяті з [1 – 3]. В роботі [4] отримано наступний результат для площинних графів G: якщо граф Λ – φ-образ графа G та простої зірки $St_m(a_0)$ з центром a_0 та m висячими ребрами з кінцевими вершинами a_i, що попарно ототожнюються з точками множини X з числом досяжності t, $t = 3$, то $\gamma(\Lambda) \leq \gamma(G) + t - \theta - 1$, де $\gamma(G) = 0$, $\theta = \theta_G(\mathrm{X})$, $\theta \in \{0,1\}$, змінна θ описує деякі структурні властивості множини точок X, розташованої на границях кліток граней графа G. Задача: 1) узагальнення цього результату [4] для не площинних неорієнтованих графів G та квазізірки з центром-графом без кратних ребер та дуг, що містять множину точок X із числом досяжності t, $t > 0$; 2) узагальнення θ і $\partial\theta$ – характеристик множини X наведених далі та показаних на рис. 1 для орієнтованого роду та на рис. 2 – для неорієнтованого роду. Нехай S – 2 – многовид без країв.

Визначення 1. Нехай задане вкладення f, $f: G \to S$, графа G в S, яке реалізує t, $t_G(\mathrm{X}) = t$, де $S_G(\mathrm{X}) = S \setminus f(G)$, $S_G(\mathrm{X}) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\theta_G(X, f)$, $\theta_G(X, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(\mathrm{X})$, на границях яких множина X розміщується довільним чином, та кожна з яких задовольняє для всіх $i \neq j$ співвідношенню $G^0 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \neq \varnothing$, $i, j = 1, 2, 3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$ і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G, яке реалізує t, $t_G(\mathrm{X}) = t$, де $S_G(\mathrm{X}) = \{s_i\}_1^t$, можливо вироджений в точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$. Множина X матиме характеристику $\theta_G(X)$, якщо $\theta_G(X) = \max \theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізують $t_G(\mathrm{X}) = t$, $\gamma(G) = 0$, $\theta = \theta_G(\mathrm{X})$, $\theta \in \{0, 1\}$, θ – описує деякі структурні властивості множини точок *X*, що розташована на границях граней графа *G*.

Визначення 2. Нехай задане вкладення f, $f: G \to S$, графа G в S, $S_G(\mathrm{X}) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X) = 0$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(\mathrm{X})$, яка задовольняє співвідношенням $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supset \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supset \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1), (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00}. $L(a_1, a_2)$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених в точку, $L_1(a_1, a_{12})$, $L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k, відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}). Клітка s_{00}, $s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(\mathrm{X}) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j. Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X)$, якщо $\partial\theta_G(X) = \max \partial\theta_G(X, f)$, де максимум береться по всім вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізують $t_G(\mathrm{X}) = t$ та $\theta_G(X) = 0$.

Твердження 1. Нехай на множині $S_G(\mathrm{X})$ задано відношення інцидентності наявністю, принаймні однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення: 1) для S – орієнтованого роду визначення 1 виконуються в загальному випадку, а для визначення 2 є два варіанти: а) множина X не має точок на жодному із ребер, які є спільними для двох різних пар кліток включають другу клітку, б) множина X не має точок на тій частині границі другої клітки, що має спільні ребра з двома іншими, та не належить до кожної з них та до $\partial s_0 \cup \partial s_{00}$; 2) для S – неорієнтованого роду визначення 1 не виконуються в загальному випадку, а виконується тільки тоді, коли точки множини X відсутні на трьох ребрах (a_i, a_j) трикутника G', а ланцюжкова кліткова структура не задовольняє визначенню 2 в загальному випадку, але задовольняє тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G, що не належить до $\partial s_i \cap G^1$, $i = 1, 2, 3$;

3) $\theta_G(\mathrm{X}) + \partial\theta_G(\mathrm{X}) \le \left\lceil \frac{t_G(\mathrm{X})-2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t_G(\mathrm{X})-2}{2} \right\rceil < t_G(\mathrm{X}) - 2.$

Доведення. На торі зіркову та трикутну кліткову структуру, що задовольняє визначенню 1, описуватиме $\theta = 1,$, як показано на рис. 1, перший ряд; другий ряд описує ланцюжкову структуру із $\partial\theta = 1$.

На проективній площині зіркову структуру описуватиме $\theta = 1,$ що показана на першій карті верхнього ряду рис. 2, на інших парах карт цього ряду показано, що трикутна кліткова структура, як узагальнена незіркова структура, не задовольняє визначенню 1 навіть у випадку, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не входять до $L = \bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i,$ а ланцюжкова кліткова структура задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніми гранями будуть тільки клітки з $\{\partial s_i\}_{i=0}^{3}$, на ∂s_0 є ребро, можливо 1-підрозділене, графа G , що не належить до L.

Оскільки 2-многовид S – орієнтованого роду $\gamma(S),$ то являтиме собою тор із приклеєною $\gamma(S)-1$ 2-ручкою. Співвідношення 1 випливає з того, що на торі перетворення зіркової та циклічної кліткових структур описуватиме перший ряд рис. 1 (для $\theta = 1$), а другий ряд цього ж рисунка для перетворення на торі ланцюжкової структури із $\partial\theta = 1.$ 2-многовид S – неорієнтованого роду $\gamma(S)$ являтиме собою проективну площину із приклеєними лентами Мебіуса у кількості $\gamma(S)-1.$ Співвідношення 2 випливає з того, що на проективній площині зіркову структуру $\theta = 1$ описуватимуть перші дві карти верхнього ряду рис. 2, а на двох інших парах карт цього ряду показано, що циклічна кліткова структура задовольняє визначенню 1 тільки тоді, коли три ребра (a_i, a_j) трикутника G' не входять до $\bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i,$ то $\bigcup_{\forall i \ne j, i, j = 1}^{3} f(a_i, a_j) \cap (\bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i \cap X),$ а ланцюжкова кліткова структура задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^{3}$ не буде, а на ∂s_0 є ребро графа, можливо 1-підрозділене, графа $G,$ що не належить до $\bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i,$ коли клітка s має на ∂s тільки одне ребро графа $G,$ яке не належить до $\bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i,$ та на спільних ребрах немає точок множини X. Доведення співвідношень 1) та 2) закінчене.

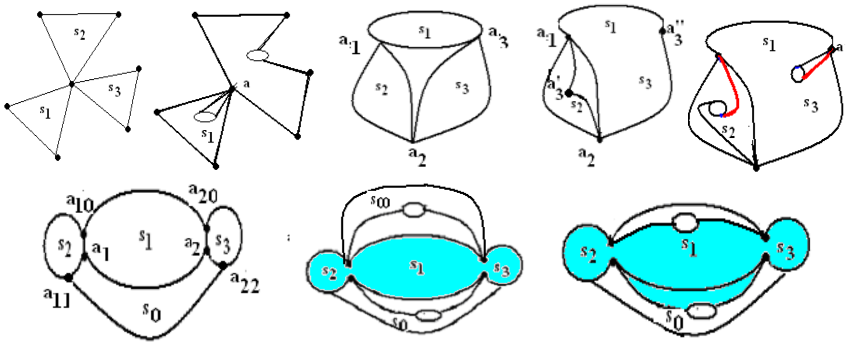

РИС. 1

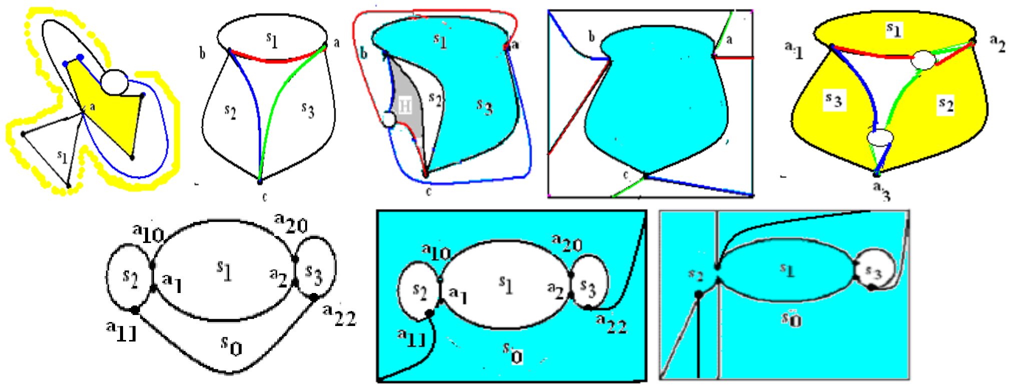

РИС. 2

Наслідок. Перетворення множини кліток-граней графа G, вкладеного до 2-многовида S, виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ не змінюючи сусідні з ними клітки; клітки задіяні в деяких випадках.

Алгоритм_О

Вхід. До 2-многовида S орієнтованого роду вкладено граф G мінімальним вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізує $t_G(\mathrm{X}) = t$ та $\theta_G(\mathrm{X}) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(\mathrm{X})$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$. Вважатимемо заданими функції θ(M) та ∂θ(M), які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, для M – множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M.

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3, інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії: початок циклу 1.

Крок 1. Для $S_G(\mathrm{X})$ використання характеристики θ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, що мають, принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup\limits_1^3 \partial s_i$, $S := S + h$.

Крок 2. $S_G(\mathrm{X}) := (S_G(\mathrm{X}) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\theta :=$ функція_$\theta(S_G(\mathrm{X}))$, $\theta := \theta - 1$; перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(\mathrm{X})$ так, щоб перші три клітки з $S_G(\mathrm{X})$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1, 2, 3; кінець циклу 1.

Крок 3. $\partial\theta :=$ функція_$\partial\theta(S_G(X))$, де $S_G(\mathrm{X})$ побудована циклом 1 множина кліток. Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток $S_G(\mathrm{X})$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0. Якщо $\partial\theta = 0$, то переходимо до кроку 6, інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії: початок циклу 2.

Крок 4. Для $S_G(\mathrm{X})$ використання характеристики $\partial\theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертої клітки s_0, $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(\mathrm{X})$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup\limits_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без точок з множини X, або з тієї частини границі ∂s_2, що не належить до границь $\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1$.

Крок 5. $S_G(\mathrm{X}) := (S_G(\mathrm{X}) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta :=$ функція_$\partial\theta(S_G(\mathrm{X}))$ $\partial\theta := \partial\theta - 1$. Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(\mathrm{X})$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0, для яких має місце визначення 2, мали номери 1, 2, 3. Кінець циклу 2.

Крок 6. Виводимо $S_G(\mathrm{X})$ та «Множина X розташована на границях кліток-граней з множини $S_G(\mathrm{X})$, перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида орієнтованого роду $\gamma(S)$», кінець алгоритму.

Твердження 2. Алгоритм_О коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f : G \to S$ графа G в S, де $\gamma(G) = \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f' : G \to S'$ графа G в S', де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, одна з яких має бути нульовою, множини точок X графа *G* та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Алгоритм перетворення орієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в орієнтований 2-многовид S', де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання нових 2-ручок до S спирається на використання характеристики θ множини точок Х графа G. Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначатимемо її $h(s', s'')$, якщо задано φ – перетворення φ' в такий спосіб: $\varphi'\left(\left(s' \bigcup s''\right) \setminus \left(\tau' + \tau''\right), \partial\tau' + \partial\tau''\right) = \left(h, \tau^*\right)$, де τ', τ'' – такі регулярні двоклітки, що задовольняють $\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \bigcap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \bigcap s'' = \varnothing$. Вважатимемо заданими функції_θ(М) та ∂ θ(М), які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток *М*, що впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з *М*, то якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні. Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням f, $f : G \to S$, що реалізує $t_G(\mathrm{X}) = t$ та $\theta_G(\mathrm{X}) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(\mathrm{X})$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо G' найменший по включенню підграф графа G, можливо вироджений у точку, який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$, $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε, який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G', що інциденті вершини a_1, у внутрішніх точках a_{1j}, де $j = 1, 2, \ldots k$. Розщепимо кожну вершину a_{1j} на a'_{1j}, a'_{2j}, де $j = 1, 2, \ldots k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частини G'_i, $i = 1, 2$, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}), G'_2 містить a'_{2j}. Відображенням ϕ перевернемо на 180° підграф $f(G'_1)$ як множину образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, що проходить через точки a_2, a_3 та задовольняє умові: $f(G'_2) \cap \partial s_3 = {} = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\phi f(G'_2)$ вкладений до $\overline{s_3}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням ϕ' вигнемо за часовою стрілкою на 180° всі висячі ребра інциденті a'_{2j}, де $j = 1, 2, \ldots k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині границі регулярної підклітки τ', де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \phi f(G'_2)$. В підграфі $f(G'_2)$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням ϕ'' поміняємо місцями ребра в парах виду (a'_{1j}, a_1), $(a'_{1(k-j+1)}, a_1)$ для всіх j, $j = 1, 2, \ldots k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної підклітки τ'', де $\tau'' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G'_1)$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин (a'_{1j}, a'_{2j}) у внутрішню точку a'_j деякого j-го ребра (a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}), для всіх j, $j = 1, 2, \ldots k$. Приклеєна ручка h до кліток $s' = \overline{s_3}$, $s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, $s', s'' \in S(G, f')$, позначена $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням φ''' склеєні половинки ребра $\varphi''\varphi'\varphi f((a'_{1j}, a'_j, a'_{2j}))$, які розрізають її на клітки, де $j = 1, 2, \ldots k$. В результаті суперпозиції $\varphi'''\varphi''\varphi'\varphi f$ вищенаведених відображень отримаємо вкладення f', $f' : G \to S'$, $f' = \varphi'''\varphi''\varphi'\varphi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому $S'(G, f') =$ $= S'(G, f') = (S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(a'_{1j}, a'_j, a'_{2j})$, тобто ті ж самі клітки, тільки замість s_1, s_2, s_3 буде клітка s, $s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(a'_{1j}, a'_j, a'_{2j})$, така, що $\partial s = \bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i$. Крім цього множина $f'(X)$ на S' буде розміщуватися на границях $t_G(X) - 2$ та матиме характеристику $\theta_G(X)$. Тим самим виконані всі дії однієї ітерації циклу 1 алгоритма_О. Нехай до 2-многовиду S орієнтованого роду $\gamma(G)$ вкладено граф G вкладенням f, $f : G \to S$, що реалізує $t_G(X) = t$, $\theta_G(X) = 0$ та $\partial\theta_G(X) = \partial\theta$, $\partial\theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h, $h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h\ldots(s_1, s_{00})$, на заміну чотирьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$, s_0, де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з s_3, s_2 та клітки s_0, $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, на нову клітку-грань s з границею $\partial s = \bigcup_{1}^{3} \partial s_i \setminus R$, де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією частиною границі ∂s_1, що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо $h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00}, що множина точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1$, $e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i вкладенням f', $f' : G \to S'$, $f' | G \setminus \{e_2, e_2\} = f | G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G) + 1$, причому множина

$S'(G,f')$ для варіанту 2) матиме вид $(S(G,f)\setminus\{\bigcup_{i=0}^{3} s_i \cup s_{00}\})\cup(h(s_{00},s_0)\setminus\sum_{j=1}^{k} f'(e_1,e_2))$, для варіанту 1) є $(S(G,f)\setminus\{\bigcup_{i=0}^{3} s_i\})\cup(h(s_1,s_0)\setminus\sum_{j=1}^{k} f'(e_1,e_2))$. Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2 алгоритму_0 виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме $\theta_G(\mathrm{X})+\partial\theta_G(\mathrm{X})$. Оскільки $\theta_G(\mathrm{X})+\partial\theta_G(\mathrm{X})<t_G(\mathrm{X})-2$ і $t_G(\mathrm{X})$ не перевищує числа кліток – граней графа G орієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину кліток поки не отримає перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta,\partial\theta$. Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме $2(2-2\gamma(G)-|G^0|+|G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено.

Теорема. Якщо задано наступне φ-перетворення зв'язних графів G_i та $St_m(G_2)$ орієнтованого роду $\gamma(G_i)$: $\phi:(G_1+St_m(G_2),\sum_{j=1}^{m}(x_{1j}\dot{+}x_{2j})\to(G,\{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ – квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_{2i}, X_i множина точок графа G_i, $\mathrm{X}_i=\{x_{ij}\}_1^m$, матиме характеристики t_i. $\theta_i,\partial\theta_i$, то $\gamma(G)\le\sum_{i=1}^{2}\gamma(G_i)+t_i-1-(\theta_i+\partial\theta_i)+k4-st$, де $st=\sum_{j=1}^{t_1}st(X_{1j},G_1)$, $k4=\sum_{j=1}^{t_1}k4(X_{1j},X_{2j})$, $k4-st$ – число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1}\setminus f(G_1)$, $k4-st\ge 0$ f – мінімальне вкладення $f:G_1\to\sigma_{r_1}$, $r_i=\gamma(G_i)+t_i-1-(\theta_i+\partial\theta_i)$, із st – стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s, до якої приклеєно r_2 2-ручки і вкладено граф G_2, що при ототодженні пар точок приєднання (x_{1j},x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних $K_4, K_{2,3}$.

Наслідок. Нехай $\phi:(G_1+St_m(G_2),\sum_{j=1}^{m}(x_{1j}\dot{+}x_{2j})\to(G,\{a_j^*\}_1^m)$ та виконується умова теореми 1 і рівності: $\theta_i=0,\partial\theta_i=0$, $s=0$, $t_1=t_1=m$. Тоді $\gamma(G)\le\sum_{i=1}^{2}\gamma(G_i)+m^2+m-2$. Доведення випливатиме із наведеної в теоремі 1 нерівності та умови $t_i=m$ за якою всі $\theta_i=0,\partial\theta_i=0$, $s=0$, а число $k4$ є числом всіх різних пар перехрещених ребер на множині всіх висячих ребер квазізірки $St_m(G_2)$, то $\gamma(G)\le\sum_{i=1}^{2}\gamma(G_i)+2k-2+k(k-1)$.

На рис. 3 на першій карті показано вкладення в 2-тор графа H_1 із $k4 = st = 0$, на другій карті вкладення графа G_4 із $k4 = 0$, $st = 1$ в 2-тор, відповідно, на третій карті вкладення в тор графа $\overline{G_4} = G_4 \setminus e$ із $k4 = st = 2$, четверта та п'ята карти – вкладення в 2-тор графів G_8 із $k4 = 0, st = 2$, G_{14} із $k4 = 0, st = 2$, відповідно.

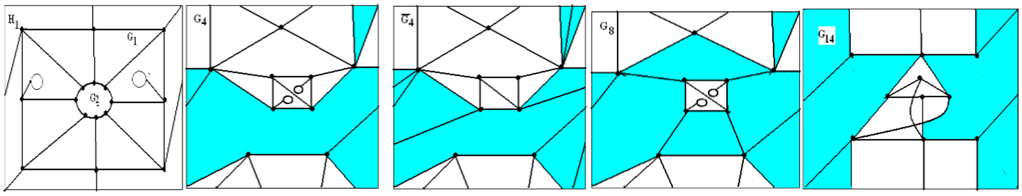

РИС. 3

Приклад. Точна верхня оцінка роду та роль двостороннього доступу видні на графі G з другої карти рис. 3, де $G_1 = K_{3,3}$, $G_2 = K_3$, $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$, $St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$, $st_1(\{a,b\}) = 2$, $st_2 = 0$, $k4 = 2$, тоді $\gamma(G) \le 1$, та на третій карті рис. 3, де $G_1 = K_5$, $G_2 = K_3$, $m = 2$, $St_2^1(G_2) = K_3^1 \cup \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$, $t_1 = t_2 = 1$, $\theta_i = \partial\theta_i = 0$, $st_1(\{a,b\}) = 1$, $st_2(\{a,b\}) = 0$, $k4 = 2$, тоді $\gamma(G) \le 2$.

В.И. Петренюк, Д.А. Петренюк, И.Э. Шулинок

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ОРИЕНТИРОВАННОГО РОДА СКЛЕЙКИ ПРОСТЫХ ГРАФОВ

Уточнена верхняя граница ориентированного рода $\gamma(G)$ простого графа G. Он является φ-образом двух невырожденных графов G_i без общих ребер ориентированного рода $\gamma(G_i)$ при отождествлении пар точек (x_{1j}, x_{2j}) из множеств точек присоединения X*j*, $j = 1,2,..,|X_i|$, где под точкой понимаем либо вершину, либо произвольную точку ребра графа G.

V.I. Petrenjuk, D.A. Petrenjuk, I.E. Shulinok

UPPER BOUND OF ORIENTED GENUS OF A SIMPLE GRAPH GLUING

Upper bound of oriented genus $\gamma(G)$ of a simple graph G is estimated. The graph is a φ-image of two двух no-degenerate graphs G_i without common edges of orientable genus, with identifying pairs of points (x_{1j}, x_{2j}) from the set of joint points X$_j$, $j = 1,2,..,|X_i|$, where a point is either a vertex or and arbitrary point of an edge of graph G.

Список літератури

1. Хоменко М.П. φ-перетворення графів. Киев, 1973. (Препринт ІМ АНУ 73).
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Киев, 1970. (Препринт ИМ АНУ 70).
3. Хоменко Н.П. Островерхий Е.Б. Существенные элементы и род графа. Киев, 1972. (Препринт «Минимальные вложения графов» ИМ АНУ 72).
4. Петренюк В.І. Об оценке рода специальних графов. Деп. рукопись в УкрНИИТИ № 2259-Ук86 22.09.1986.
5. Петренюк В.І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. Деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.
6. Bodendiek R., Wagner K. A characterization of the minimal basis of the torus. *Combinatorica* 6, 3, 1986. P. 245 – 260.

Одержано 23.03.2018