УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача выпуклого программирования с континуумом ограничений. Решение задачи сводится к решению последовательности минимаксных задач. Описано два приложения метода.

Введение. Первые иследования, связанные с применением чебышевских точек для построения алгоритмов решения задачи выпуклого программирования предложены в [1, 2]. Метод чебышевских центров впервые предложен для отыскания решения игры многих лиц и имеет арифметическую скорость сходимости [3]. В многоточечных методах оптимизации определяемые чебышевские центры непосредственно используются для конструирования минимизирующих последовательностей. В одноточечных методах чебышевские центры используются лишь для формирования направлений движения. Одноточечный вариант метода чебышевских центров в его первоначальной версии [2] – это метод условного градиента.

В статье исследован метод, сводящий решение исходной задачи к решению последовательности негладких задач безусловной оптимизации. Далее, многоточечный метод применяется для нахождения равновесной цены линейной модели чистого обмена [4] и решения одной задачи выпуклого программирования.

Вначале рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$x^* = \arg\min\left\{ f(x) \middle| x \in R^n \right\}.$$

Пусть уже построены точки $x_i, i = \overline{1,k}$, и в них вычислены субградиенты $g_i = g(x_i)$. Из определения субградиента следует, что точка x^* принадлежит области

$$D_k = \left\{ x : (g_i, x - x_i) \le f\left(x^*\right) - f\left(x_i\right),\ i = \overline{1,k} \right\}.$$

Если же в задаче величина $f\left(x^*\right)$ неизвестна, то точка x^* принадлежит более широкой области $D_k = \left\{x : \left(g_i, x - x_i\right) \le 0, i = \overline{1,k}\right\}$.

В качестве следующего приближения x_{k+1} берется, например, чебышевский центр второго многогранника D_k, т. е. точка, максимум расстояния которой от граней D_k минимален (вектор g_i нормирован):

$$\left(x_{k+1}; \zeta_{k+1}\right) = \arg\min\left\{\zeta \,\middle|\, \left(g_i, x - x_i\right) \le \zeta, i = \overline{1,k}\right\}.$$

Условие Хаара обеспечивает единственность чебышевской точки, а при выполнении некоторых условий алгоритм сходится [1].

Далее, пусть $G_1 \subset R^n, G_2 \in R^m$ – ограниченные замкнутые выпуклые множества; $\varphi_0(x)$ – выпуклая функция на G_1; $\varphi(x,y)$ – выпуклая по x на G_1 функция при каждом $y \in G_2$ и непрерывная по совокупности переменных функция на $G_1 \times G_2$. Обозначим допустимую область в G_1 $D = \{x : \varphi(x,y) \le$ $\le 0 \, \forall y \in G_2; x \in G_1\}$.

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования

$$x^* = \arg\min\left\{\varphi_0(x) \middle| x \in D\right\}, \tag{1}$$

для которой выполняется условие Слейтера: существует точка $\tilde{x} \in D$ такая, что $\varphi(\tilde{x}, y) \le \alpha < 0 \, \forall y \in G_2$.

В качестве первого приближения x^1 вектора x^* берем произвольный вектор из D. Пусть уже найдено приближение x^k решения x^* и некоторые векторы $y^1, \ldots, y^q \in G_2$. На общем шаге находим точку в R^{n+1}:

$$\left(z^{k+q+1}; \zeta_{n+1}^{k+q+1}\right) = \arg\min\left\{\zeta_{n+1} \middle| \varphi_0(x) - \varphi_0\left(x^k\right) \le \rho^2 \zeta_{n+1};\right.$$
$$\left.\varphi\left(x, y^i\right) \le \zeta_{n+1}, i = \overline{1,q}; x \in G_1\right\}, \ \rho > 0. \tag{2}$$

Если $z^{k+q+1} \in D$, то полагаем $x^{k+1} = z^{k+q+1}$. Если же $z^{k+q+1} \overline{\in} D$, то выбираем вектор $y^{q+1} \in G_2$ такой, что $\varphi\left(z^{k+q+1}, y^{q+1}\right) \ge \theta \zeta_{n+1}^{k+q+1}$, где произвольный параметр θ выбираем из $[0,1)$.

Лемма. Справедливо равенство $\lim\limits_{k+q \to \infty} \zeta_{n+1}^{k+q} = 0.$

Доказательство. Поскольку отрицательная неубывающая последовательность $\left\{\zeta_{n+1}^{k+q}\right\}$ ограничена сверху, то ее предел $\bar{\zeta}$ существует и $\bar{\zeta} \le 0$. Предположим, что $\bar{\zeta} < 0$. Тогда последовательность $\left\{x^k\right\}$ конечна, или в противном случае из неравенства $\varphi_0\left(x^k\right) \le \varphi_0\left(x^1\right) + (k-1)\rho^2 \bar{\zeta}$ получаем

$\inf\{\varphi_0(x)|x\in D\}=-\infty$, что противоречит условию. Но тогда бесконечной является последовательность $\{y^q\}$. Пусть $\lim\limits_{q\to\infty} y^q=\bar{y}$, $\lim\limits_{k+q\to\infty} z^{k+q}=\bar{z}$.

С одной стороны, переходя в неравенстве $\varphi\left(z^{k+q+1},y^{q+1}\right)\geq\theta\zeta_{n+1}^{k+q+1}$ к пределу, получаем $\varphi_1(\bar{z},\bar{y})\geq\theta\bar{\zeta}$, а с другой – в силу $\varphi\left(z^{k+q+1},y^q\right)\leq\zeta_{n+1}^{k+q+1}$ имеем $\varphi(\bar{z},\bar{y})\leq\bar{\zeta}$. Полученное противоречие означает, что $\bar{\zeta}=0$. Лемма доказана.

Если вычислительный процесс бесконечен, т. е. решение x^* не достигнуто за конечное число шагов, то в силу леммы последовательность $\{x^k\}$ бесконечна. Далее рассматривается этот случай.

Теорема 1. Если $\rho>0$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_0\left(x^*\right)-\varphi_0(\tilde{x})-\rho\alpha>0, \tag{3}$$

то для достаточно больших k справедлива оценка

$$\varphi_0\left(x^{k+1}\right)-\varphi_0\left(x^*\right)\leq\frac{1}{1+\rho}\left[\varphi_0\left(x^k\right)-\varphi_0\left(x^*\right)\right].$$

Доказательство. Существует седловая точка функции Лагранжа $L_{k+q+1}(Z;U)$ задачи (2) $\left(Z^{k+q+1};U^{k+q+1}\right)=\left(z^{k+q+1},\zeta_{n+1}^{k+q+1};u_0^{k+q+1},u^{k+q+1}\right)$:

$$L_{k+q+1}\left(Z^{k+q+1};U\right)\leq L_{k+q+1}\left(Z^{k+q+1};U^{k+q+1}\right)\leq L_{k+q+1}\left(Z;U^{k+q+1}\right),$$

$$z\in G_1,\ U\geq 0. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует, во-первых, что $\rho^2 u_0^{k+q+1}+\sum\limits_{i=1}^{q}u_i^{k+q+1}=1$, во-вторых, при $z=\tilde{x}$ получаем $\zeta_{n+1}^{k+q+1}\leq u_0^{k+q+1}\left(\varphi_0(\tilde{x})-\varphi_0\left(x^k\right)\right)+\alpha\left(1-\rho^2 u_0^{k+q+1}\right)$. Следовательно,

$$u_0^{k+q+1}\geq\left(-\alpha+\zeta_{n+1}^{k+q+1}\right)\Big/\left[\varphi_0(\tilde{x})-\varphi_0\left(x^*\right)-\alpha\rho^2\right]. \tag{5}$$

Из первого ограничения задачи (2) и правого неравенства в (4), используемого при $z=x^*$, получаем

$$\left[\varphi_0\left(x^{k+1}\right)-\varphi_0\left(x^k\right)\right]/\rho^2\leq\zeta_{n+1}^{k+q+1}\leq u_0^{k+q+1}\left[\varphi_0\left(x^*\right)-\varphi_0\left(x^k\right)\right].$$

Учитывая (5) приходим к оценке

$$\varphi_0\left(x^{k+1}\right)-\varphi_0\left(x^*\right)\leq\alpha(k,q)\left[\varphi_0\left(x^k\right)-\varphi_0\left(x^*\right)\right], \tag{6}$$

где

$$\alpha(k,q)=\left[\varphi_0(\tilde{x})-\varphi_0\left(x^*\right)-\rho^2\zeta_{n+1}^{k+q+1}\right]\Big/\left[\varphi_0(\tilde{x})-\varphi_0\left(x^*\right)-\alpha\rho^2\right].$$

Для достаточно больших $k+q$ с учетом условия (3) приходим к неравенству $-\xi_{n+1}^{k+q+1}\leq\left[-\rho\alpha+\varphi_0\left(x^*\right)-\varphi_0(\tilde{x})\right]\Big/\rho(1+\rho)$, поэтому для них справедливо неравенство $\alpha(k,q)\leq 1/(1+\rho)$. Отсюда и из неравенства (6) приходим к требуемой в теореме оценке.

Замечание 1. Без потери скорости сходимости метода неравенства $\varphi\left(x, y^i\right) \leq \zeta_{n+1}$ в задаче (2) можно заменить их линеаризациями в соответствующих точках. Вектор y^{q+1} можно выбирать также из условия $y^{q+1} = \arg\max\left\{\varphi\left(z^{k+q+1}, y\right) \middle|\, y \in G_2\right\}$.

Замечание 2. Основной особенностью предложенного метода является введение параметра ρ, определяющего знаменатель геометрической прогрессии, характеризующий скорость сходимости метода. Следует ожидать, что для достижения одной и той же точности при большем ρ потребуется меньшее количество членов основной последовательности $\left\{x^k\right\}$, что должно сопровождаться увеличением количества членов вспомогательной последовательности $\left\{y^q\right\}$.

Далее, применим метод чебышевских точек для отыскания приближения равновесной цены линейной модели чистого обмена.

Векторы из R^n $p^* > 0, x_i^* \geq 0, i = \overline{1,m}$, являются решением линейной модели чистого обмена, если выполнены равенства

$$x_i^* = \arg\max\left\{\left(a_i, x_i\right) \middle|\, x_i \geq 0, \left(p^*, x_i\right) \leq \left(p^*, b_i\right)\right\},\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\ , \tag{7}$$

где $\left(a_i, x_i\right)$ – функция полезности, а $b_i > 0$ – фиксированный запас продуктов i-го участника. Существование равновесных векторов p^* для этой модели установлено в [4]. В задаче (7) заменим запасы продуктов b_i на $b_i + \varepsilon c_i$, где $\varepsilon_i > 0$ достаточно мало, а вектор c_i положительный. Тогда для модифицированной
модели также существует равновесная цена $p_\varepsilon^* \in S$, S – стандартный $(n-1)$ симплекс.

Пусть построены приближения вектора равновесных цен $p^1, \ldots, p^s$. Тогда следующее приближение определяется так:

$$p^{s+1} = \arg\max\left\{f_s(p) \middle|\, p \in S\right\},\ p = \left(\Pi_1, \ldots, \Pi_n\right),$$

где $f_s(p) = \min\left\{\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \left(p, z^1\right), \ldots \left(p, z^s\right)\right\}$, $z^j \in Z_\varepsilon\left(p^j\right) \neq \varnothing$, $j = \overline{1,s}$, $Z_\varepsilon(p)$ – функция избыточного спроса модифицированной модели.

Теорема 2. Последовательность $\left\{p^s\right\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к p_ε^*.

Доказательство этой теоремы основано на сходимости убывающей последовательности $\left\{f_s\left(p^{s+1}\right)\right\}$ к нулю, выполнении закона Вальраса и условия выявленного предпочтения для функции избыточного спроса $Z_\varepsilon(p)$ [5]. Построенный алгоритм обеспечивает при достаточно малом ε нахождение хорошего приближения равновесной цены исходной модели.

Далее, расмотрим применение построенного варианта метода чебышевских центров к решению задачи:

$$\min\left\{\varphi_0(x) \middle| x \in D\right\} = \varphi_0\left(x^*\right),$$

где $\varphi_0(x)$ – выпуклая функция, имеющая на выпуклом многограннике D ограниченный субградиент $g(x), x \in R^n$.

Очевидно, что данная задача путем введения дополнительной переменной ξ_0 сводится к решению следующей задачи:

$$\min\left\{\xi_0 \,\middle|\, (g(y), x-y) + \varphi_0(y) \le \xi_0, \forall\, y, x \in D\right\}.$$

Применительно к этой задаче решаемая на общем шаге задача линейного программирования типа (2) имеет вид:

$$\min\left\{\xi_{n+1} \,\middle|\, \xi_0 - \xi_0^k \le \rho^2 \xi_{n+1}; (g(y_i), x - y_i) + \varphi_0(y_i) - \xi_0 \le \xi_{n+1}, i = \overline{1,q}; x \in D\right\}. \quad (8)$$

Если обозначить множители Лагранжа для ограничений данной задачи $u_0, u_i,\ i = \overline{1,q}$, выписать необходимые и достаточные условия минимума для нее, то $u_0 = \sum_{i=1}^{q} u_i = 1\big/\left(1+\rho^2\right) > 0$. Следовательно, в решении задачи (8) первое ограничение выполняется как равенство. Для отыскания этого решения необходимо найти

$$\varphi_{k+q+1}\left(z^{k+q+1}\right) = \min\left\{\max_{1 \le i \le q}\left[\left(g(y_i), x - y_i\right) + \varphi_0(y_i)\right] \middle| x \in D\right\},$$

$$\xi_0^{k+q+1} = \frac{1}{1+\rho^2}\xi_0^k + \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\varphi_{k+q+1}\left(z^{k+q+1}\right).$$

Так как по построению функции φ_{k+q+1} выполняется неравенство $\varphi_{k+q+1}\left(z^{k+q+1}\right) \le \varphi_0\left(x^*\right)$, то из последнего равенства следует оценка

$$\xi_0^{k+1} \le \frac{1}{1+\rho^2}\xi_0^k + \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\varphi_0\left(x^*\right). \quad (9)$$

В нашем случае множество G_2 совпадает с R^n, поэтому $\varphi_0\left(x^{k+1}\right) \le \xi_0^{k+1}$. Учитывая оценку (9), получаем

$$0 \le \xi_0^{k+1} - \varphi_0\left(x^*\right) \le \frac{1}{1+\rho^2}\left(\xi_0^k - \varphi_0\left(x^*\right)\right).$$

Следовательно,

$$0 \le \varphi_0\left(x^{k+1}\right) - \varphi_0\left(x^*\right) \le \xi_0^{k+1} - \varphi_0\left(x^*\right) \le \frac{1}{1+\rho^2}\left(\xi_0^k - \varphi_0\left(x^*\right)\right) \le \gamma \Big/ \left(1+\rho^2\right)^k,\ \gamma > 0.$$

Итак, локализация решения исходной задачи по целевой функции определяется формулой

$$\varphi_0\left(x^{k+1}\right) - \varphi_0\left(x^*\right) \le \gamma \Big/ \left(1+\rho^2\right)^k,\ \gamma > 0.$$

Выводы. Особенность рассмотренного метода – это введение параметра, определяющего знаменатель геометрической прогрессии, характеризующей его скорость сходимости (независимо от размерности пространства).

Отыскание решения модели чистого обмена с линейными функциями предпочтения может быть также сведено к решению системы выпуклых неравенств.

Е.І. Ненахов

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглядається задача опуклого програмування з континуумом обмежень. Розв’язування задачі зводиться до розв’язування послідовності мінімаксних задач. Описано два застосування методу.

E.I. Nenakhov

ON METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF CONVEX PROGRAMMING

The problem of convex programming with a continium of constraints is considered. The solution of the problem reduces to solving a sequence of minimax problems. Two application methods are described.

Список литературы

1. Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1977. 177 с.
2. Зуховицкий С.И., Примак М.Е. О сходимости метода чебышевских центров и метода центрированных сечений для решения задачи выпуклого программирования. *Докл. АН СССР*. 1975. **222,** № 2. С. 273 – 276.
3. Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е. Два метода отыскания точек равновесия вогнутых игр n лиц. Докл. АН СССР. 1969. **185,** № 1. С. 24 – 27.
4. Питтель Б.Г. Об одной модели обмена. *Экономика и математические методы*. 1967. **3,** № 3. С. 407 – 414.
5. Полтерович В.М., Спивак В.А. Отображения с валовой заменимостью в теории экономического равновесия. *Итоги науки и техники.* Сер. математики. 1982. **19,** № 1. С. 111 – 154.

Получено 19.03.2018