УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

МЕРЫ РИСКА ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Описывается использование мер риска в задачах многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности. Меры риска количественно оценивают риски в виде потенциальных потерь, а их конструкция позволяет учитывать разные типы неопределенности. Этот аппарат предлагается для поиска Парето-оптимальных вариантов и компромиссных решений в многокритериальных оптимизационных проблемах.

Введение. Как известно, в теории и практике принятия решений ключевым вопросом является эффективный учет неопределенности в соответствующей оптимизационной проблеме, к которой сводится исходная постановка задачи. Современный аппарат мер риска [1–5] предлагает количественно учитывать условия неопределенности задачи в виде соответствующей меры риска.

В частности, класс полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР) из [5–9] предусматривает такую возможность для различных типов неопределенности: при известных вероятностных распределениях случайных величин (с.в.); при неточных сценарных вероятностях; при неточных сценарных оценках с.в.; при сочетании неточных вероятностей и оценок. С помощью таких мер риска широкий класс задач стохастического программирования и робастной оптимизации сводится к соответствующим (минимаксным) оптимизационным проблемам [9]. В случае линейности задач такой подход позволяет свести их к детерминированным проблемам линейного программирования (ЛП), что существенно упрощает поиск решений. В частности, это оказалось эффективным для задач оптимизации портфеля по соотношению вознаграждение-риск [6–7].

Подобную технику можно использовать и для многокритериальных оптимизационных задач в условиях неопределенности, что и составляет предмет данной работы.

Элементы аппарата ПКМР. В работе [1] для оценки риска случайного финансового потока X было введено понятие когерентной меры риска (КМР) в форме:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in Q\}, \tag{1}$$

где $E_P[.]$ – математическое ожидание по вероятностной мере P, а Q – некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер. Такая мера интерпретирует потенциальные потери потока X, описываемые величиной $(-X)$.

Если с.в. X описывает затраты, убытки, стоимости и прочие величины, характеризуемые предпочтением «чем меньше, тем лучше», то в КМР используется подобное представление без знака «–» при с.в.:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[X] : P \in Q\}. \tag{2}$$

Конструкция (2) применяется в задачах оптимизации, в которых в качестве критериев и ограничений используются функции минимумов, поскольку это означает именно такой порядок предпочтений. При обратном предпочтении целесообразно использовать конструкцию (1).

В работе [5] введено понятие ПКМР. Это такая КМР, для которой в случае дискретно распределенной с.в. X в описании (1) (соответственно (2)) дополнительно постулируется многогранность (полиэдральность) множества Q, т. е. его представление в следующем виде:

$$Q = \{p : Bp \le c, p \ge 0\}, \tag{3}$$

где B и c – матрица и вектор соответствующих размерностей.

Описание множества Q в (3) удобно разделить на стандартную и содержательную части следующего вида. Представим матрицу B и вектор c как

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где B_0 и c_0, описывающие упомянутые неравенства, являются стандартными

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1...1 \\ -1...-1 \end{pmatrix}, c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а B_1 и c_1 представляют содержательную часть в соотношении (4), которая, собственно, и определяет меру риска в виде соотношений (2) – (5).

Наличие стандартной части в виде B_0 и c_0 связано с описанием в (3) стандартного условия для сценарных вероятностей: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, представленного в (5) в виде двух неравенств: $\sum_{i=1}^n p_i \le 1$ и $-\sum_{i=1}^n p_i \le -1$.

Приведем примеры ПКМР:

П1. Средние потери: $E_{P_0}[X] : Q = \{p_0\}$, или формально $B_1 = I$, $c_1 = p_0$.

П2. Максимальные потери: Q – множество всех возможных вероятностных мер, поэтому в его описании отсутствует содержательная часть в виде B_1 и c_1.

П3. Conditional value-at-risk ($CVaR_\alpha$) [2]:

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{1}{1-\alpha} p_0,$$

где I – единичная матрица, p_0 – вектор сценарных вероятностей.

П4. Спектральная когерентная мера риска (SCRM) [3]:

$$B_1 = I, c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0,$$

где λ_i и α_i для сценариев $i = 1,\dots,n$ и определяются из некоторых соотношений [7].

П5. Преставление Кусуоки КМР (KRRM) [4]:

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0.$$

Рассмотрим теперь случай неточных сценарных вероятностей, когда мы не может идентифицировать вектор сценарных вероятностей p_0, а лишь оцениваем его сверху и снизу в следующем виде:

$$p_0 \in U_P = \left\{ p : p \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_l \le p \le p_u \right\}.$$

Для таких ситуаций аппарат ПКМР предлагает так называемые робастные конструкции мер [7], которые строятся с учетом неопределенности, описываемой множеством U_p. Робастные конструкции для мер из примеров П1 – П5 описываются в форме (2) – 3) (соответственно (1), (3)) со следующими параметрами.

П1'. Для средних потерь:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}.$$

П2'. Для максимальных потерь: B_1 и c_1 отсутствуют.

П3'. Для $CVaR_\alpha$:

$$B_1 = I, c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha}.$$

П4'. Для SCRM:

$$B_1 = I, c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u,$$

где λ_i и α_i определяются из набора соответствующих соотношений [7].

П5'. Для KRRM:

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u.$$

В работах [5 – 9] описаны возможности применения аппарата ПКМР для проблем оптимизации при неопределенности. В частности, в [9] показано, как широкий класс проблем стохастического программирования и робастной оптимизации с использованием ПКМР сводится к детерминированным оптимизационным задачам. Продемонстрируем далее применение подобной техники к задачам многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности.

Многокритериальная оптимизация с использованием ПКМР. Рассмотрим теперь следующую многокритериальную задачу стохастической оптимизации:

$$(f_1(x,\omega),..., f_n(x,\omega)) \to \text{"min"},$$

$$g_j(x,\omega) \le 0,\ j = 1,...,m,$$

$$x \in M, \omega \in \Omega. \tag{6}$$

Как и для однокритериальной проблемы, вводя разные статистические критерии для целевого вектора и ограничений, для нее можно сформулировать различные постановки задач стохастического программирования (СП).

По сути, для получения решения необходимо, во-первых, с помощью некоторых критериев трансформировать случайные критерии и ограничения в детерминированные. Во-вторых, нужно избежать многомерности задачи, вводя правила для выбора решений из соответствующего Парето-оптимального множества.

В соответствии с [9] перейдем со стохастической постановки к детерминированному эквиваленту с использованием аппарата ПКМР. А именно, трансформируем задачу (6) в следующую:

$$(\rho_1^0(f_1(x,.)),...,\rho_n^0(f_n(x,.))) \to \text{"min"},$$

$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,...,m,$$

$$x \in M, \tag{7}$$

в которой в каждой из функций критериев и ограничений может использоваться своя ПКМР. Чтоб различать индексы мы обозначили $\rho_i^0(.)$ – меры риска для критериев $f_i(.)$ и $\rho_j(.)$ – меры риска для ограничений $g_j(.)$.

Такая постановка позволяет обобщить широкий класс задач СП, в которых для подобной трансформации применяются функционалы математического ожидания, *CVaR*, наихудшие сценарные значения. В случае использования *VaR* и вероятностей для компонент целевого вектора и ограничений эти критерии можно аппроксимировать соответствующими *CVaR* (см. необходимые соображения в [9]). Остается только указать, каким образом работать с многокритериальностью задачи (7). Для этого рассмотрим несколько возможных вариантов постановок задач.

Например, сворачивание критериев в скаляр с помощью весовых коэффициентов $\lambda_i \ge 0, \sum_1^n \lambda_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i^0 (f_i(x,.)) \to \min,$$
$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,...,m,$$
$$x \in M. \tag{8}$$

Или поиск минимумов для каждого из $i = 1,...,n$ частичных критериев:

$$\rho_i^0 (f_i(x,.)) \to \min,$$
$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,...,m,$$
$$x \in M. \tag{9}$$

Решение каждой из задач (9) является Парето-оптимальным в смысле задачи (8), однако, как известно, в задачах многокритериальной оптимизации важно найти компромиссное решение. Для этого можно использовать подход целевого программирования. А именно, решая задачи (9) для $i = 1,...,n$, находим опорную точку $(y_1^*,...,y_n^*)$, где y_i^* – решение i-й задачи, а затем решаем следующую проблему:

$$| \rho_1^0 (f_1(x,.)) - y_1^*,...,\rho_n^0 (f_n(x,.)) - y_n^* \|_w^p \to \min,$$
$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,...,m,$$
$$x \in M, \tag{10}$$

где $\| . \|_w^p$ – одна из следующих взвешенных норм:

$$\| z \|_w^p = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i |z_i|^p \right]^{1/p},\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \ge 0, i = 1,2,...,n;\ p = 1,2,...,+\infty \cdot \tag{11}$$

Для $p = +\infty, 1, 2$ это так называемые взвешенные нормы Чебышева, Хэмминга и Евклида соответственно.

В случае, когда имеем лексикографическое упорядочивание критериев, например, начиная с самого важного, вполне логичным выглядит следующий процесс. Сначала решаем первую из задач (9) и подставляем получаемое значение
в решении $y_1^* = \rho_1(f_1(x_1^*,.)$ в качестве ограничений в следующую:

$$\rho_2^0 (f_2(x,.)) \to \min,$$
$$\rho_1^0 (f_1(x,.)) \le y_1^*,$$
$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,...,m,$$
$$x \in M. \tag{12}$$

Затем решаем задачу (12), а значение в решении $y_2^* = \rho_2(f_2(x_2^*,.)$ используем в ограничениях последующей проблемы. Процесс продолжается.

Последней задачей, приводящей к окончательному решению, есть

$$\rho_n^0 (f_n(x,.)) \to \min,$$

$$\rho_i^0(f_i(x,.)) \le y_i^*, i = 1,\dots,n-1,$$
$$\rho_j(g_j(x,.)) \le 0,\ j = 1,\dots,m,$$
$$x \in M. \tag{13}$$

Подобные задачи с использованием ПКМР представляют собой сложные минимаксные проблемы, которые значительно упрощаются в случае линейности по x критериев f_i и ограничений g_j. Например, задачи (9), (12), (13), а также (10) для нормы Чебышева можно свести к детерминированным проблемам ЛП.

Таким образом, аппарат ПКМР может эффективно применяться и для многокритериальных постановок задач в условиях неопределенности.

В.С. Кирилюк

МІРИ РИЗИКУ ДЛЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Описується використання мір ризику в задачах багатокритеріальної оптимізації в умовах невизначеності. Міри ризику кількісно оцінюють ризики у вигляді потенційних втрат, а їх конструкція дозволяє враховувати різні типи невизначеності. Цей апарат пропонується для пошуку Парето-оптимальних варіантів і компромісних рішень у багатокритеріальних оптимізаційних проблемах.

V.S. Kirilyuk

RISK MEASURES FOR MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY

The use of risk measures in multicriteria optimization problems under uncertainty is described. Risk measures quantify risks in a form of potential losses, and their constructions allow taking into account different types of uncertainty. This apparatus is proposed for searching Pareto-optimal variants and compromise solutions in multicriteria optimization problems.

Список литературы

1. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. Math. Finance. 1999. Vol. 9, N 3. P. 203 – 228.
2. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk. *J. Risk*. 2000. Vol. 2, N 3. P. 21 – 41.
3. Acerbi C. Spectral measurers of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. *J. Banking & Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1505 – 1518.
4. Kusuoka S., Maruyama T. (eds.). On law invariant coherent risk measures. *Advances in Mathematical Economics.* Tokyo: Springer, 2001. Vol. 3. P. 83 – 95.
5. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 4. С. 155 – 167.
6. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 120 – 133.
7. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение-риск. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. **50**, № 5. С. 85 – 103.
8. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска. Кибернетика и системный анализ. 2014. **50**, № 6. С. 63 – 72.
9. Кирилюк В.С. Меры риска в задачах стохастической и робастной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. **51**, № 6. – С. 46 – 59.

Получено 20.02.2018