В. Т. Придиба, заступник директора з наукової роботи Львівського НДІСЕ, кандидат технічних наук

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ КІЛЬКОСТІ РУХУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ПЕРЕД ЗІТКНЕННЯМ

З урахуванням особливостей судової автотехнічної експертизи проаналізовано можливості застосування закону збереження кількості руху для вирішення завдань з визначення швидкості транспортних засобів перед зіткненням. Наведено рекомендації для випадку, коли під час відкидання автомобіль рухався в стані заносу незагальмованим.

С учетом особенностей судебной автотехнической экспертизы проанализированы возможности использования закона сохранения количества движения для решения задач по определению скорости транспортных средств перед столкновением. Приведены рекомендации для случая, когда во время отбрасывания автомобиль двигался в состоянии заноса незаторможенным.

Одне з важливих питань, які стоять перед експертом при дослідженні механізму зіткнення транспортних засобів (ТЗ), полягає у визначенні швидкості ТЗ безпосередньо перед зіткненням.

Взаємодія ТЗ під час зіткнення являє собою складний процес, що характеризується відносно коротким проміжком часу контактної взаємодії та разом з тим дією протягом цього часу великих зусиль, що спричиняють руйнування й деформації деталей ТЗ, дослідження яких у свою чергу викликає значні труднощі та далеко не завжди може привести до придатного для практики остаточного результату. Саме на ці труднощі експерти зазвичай посилаються в разі неможливості давання висновку на поставлене питання.

Водночас на основі відомих з теоретичної механіки загальних теорем динаміки можна отримати залежності, що встановлюють зв'язок між кінематичними параметрами руху тіл до та після їхньої взаємодії й дають змогу уникнути необхідності в дослідженні самого процесу взаємодії. У цьому плані для вирішення деяких технічних задач, пов'язаних з ударом, широко застосовується теорема про змінення кількості руху, згідно з якою змінення кількості руху механічної системи за час удару дорівнює векторній сумі всіх імпульсів ударних сил, що діють на систему, за той самий проміжок часу[1]:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_k \vec{S}_k \ , \qquad (1)$$

[1] Див.: *Никитин Н. Н.* Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. — М. : Высш. шк., 1990. — 607 с.; Теоретична механіка : навч. посіб. / [І. П. Смерека, І. В. Кузьо, В. Т. Придиба, Я. А. Зінько]. — Львів: НУ «Львівська політехніка», 2004. — 228 с.

© Придиба В. Т., 2011

де $\vec{Q}$, $\vec{Q}_0$ – кількість руху системи відповідно після та перед ударом; $\vec{S}_k$ – ударний імпульс k-ої сили, прикладеної до елементів системи.

Для механічної системи, що складається з двох автомобілів, ударні сили, під дією яких власне й відбувається їхнє пошкодження, є внутрішніми. Унаслідок рівності дії та протидії імпульси цих сил є рівними за величиною й протилежними за напрямком і тому в сумі дають нуль:

$$\sum \vec{S}_k^{(i)} = 0. \qquad (2)$$

Отже, сили ударної взаємодії між автомобілями, що діють під час контактування й зумовлюють їхнє пошкодження, через те, що є внутрішніми, не впливають на змінення кількості руху системи, яка складається з цих автомобілів. Ця особливість дає змогу уникнути необхідності в дослідженні самого процесу взаємодії між автомобілями під час їхнього зіткнення, що значно спрощує вирішення задачі.

Оскільки ніяких інших ударних сил (так званих зовнішніх) до автомобілів не прикладено, то відповідно до рівняння (1) отримуємо:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \overrightarrow{const}. \qquad (3)$$

Цей частковий випадок теореми про змінення кількості руху відомий як закон збереження кількості руху в замкнутій (ізольованій) системі[1]. Стосовно зіткнення автомобілів умова замкнутості системи передбачає тільки відсутність ударних сил, прикладених до автомобілів з боку інших тіл, що не входять до даної системи. У зв'язку з цим слід зауважити, що закон збереження кількості руху не може бути застосований у разі наїзду автомобіля на закріплену перешкоду (стовп електроопори, дерево та ін.), оскільки під час наїзду в місці закріплення перешкоди виникає ударна реакція, яка відносно системи «автомобіль-перешкода» буде зовнішньою, і за таких обставин сумарний імпульс ударних сил, прикладених до елементів системи, не буде рівним нулю.

В експертній практиці можна зустріти думку, згідно з якою закон збереження кількості руху «не враховує» деформування ТЗ, які вони отримують під час зіткнення. Зокрема вважається, що дійсні швидкості автомобілів дещо більші за розрахункові, отримані на підставі закону збереження кількості руху, оскільки втрати енергії на деформування деталей не враховувалися[2]. Такі твердження є безпідставними: сумарна кількість руху автомобілів після зіткнення аж ніяк не залежить від міри їхнього де-

[1] Див.: *Никитин Н. Н.* Указ. праця; Теоретична механіка : навч. посіб.

[2] Див.: *Боровский Б. Е.* Безопасность движения автомобильного транспорта / Б. Е. Боровский. — Л. : Лениздат, 1984. — С. 269, 274.

формування та пошко-джень, а отже, й від значення коефіцієнта відновлення, і є рівною сумарній кількості руху автомобілів до їхнього зіткнення.

З огляду на те, що кількість руху автомобіля масою m, центр мас якого рухається зі швидкістю $\vec{V}$, становить $\vec{Q}=m\ \vec{V}$, закон збереження кількості руху (3) для системи, що складається з двох автомобілів, матиме такий вигляд:

$$m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2=m_1\vec{U}_1+m_2\vec{U}_2, \tag{4}$$

де m_1, m_2 – маси автомобілів, що зіткнулися; $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ – вектори швидкостей їхніх центрів мас безпосередньо перед зіткненням (у момент первинного контактування); $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ – вектори швидкостей центрів мас автомобілів після зіткнення (так звані «швидкості відкидання»).

Проектуючи векторне рівняння (4) на осі прямокутної системи координат Oxy, отримаємо два скалярних рівняння:

$$m_1V_1\cos\alpha_1+m_2V_2\cos\alpha_2=m_1U_1\cos\beta_1+m_2U_2\cos\beta_2; \tag{5}$$

$$m_1V_1 sin\alpha_1+m_2V_2\sin\alpha_2=m_1U_1\sin\beta_1+m_2U_2\sin\beta_2; \tag{6}$$

де α_1, α_2 – кути між віссю Ох і векторами швидкості відповідно $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, відраховані від додатного напрямку осі Ох проти ходу годинникової стрілки; β_1, β_2 – кути між віссю Ох і векторами швидкості відповідно $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$.

Наявність двох рівнянь дає можливість визначити тільки дві невідомі величини. Водночас рівняння (5), (6) містять 10 параметрів. Залежно від того, які з них задані, а які необхідно визначити, на основі рівнянь (5), (6) можна вирішувати різного роду задачі. Якщо перед експертом поставлена задача визначити величини швидкостей автомобілів до зіткнення V_1, V_2, то решта вісім параметрів, а саме: маси автомобілів (m_1, m_2), напрямки їхнього переміщення в момент первинного контактування (α_1, α_2) і момент відкидання (β_1, β_2) та величини швидкостей відкидання (U_1, U_2), повинні бути відомими.

Особливість експертних досліджень полягає в тому, що постановка задачі формулюється органами, які призначають експертизу, і вихідні дані до неї задаються на підставі інформації, отриманої в результаті проведеного розслідування. При цьому параметри, які безпосередньо входять до рівнянь (5), (6), у явному вигляді, як правило, не задаються. Натомість наводяться величини, які характеризують остаточне положення ТЗ після зіткнення, місце

зіткнення, пошкодження, отримані внаслідок зіткнення тощо. Це зумовлює необхідність у проведенні додаткових розрахунків і досліджень, на основі яких експерт отримує значення потрібних восьми параметрів.

Маси автомобілів m_1 та m_2 встановлюються експертом на основі довідкової літератури з урахуванням їхнього завантаження.

Величини кутів α_1, α_2, які характеризують напрямок переміщення автомобілів безпосередньо перед зіткненням, у більшості випадків можна встановити на основі результатів транспортно-трасологічних досліджень стосовно місця зіткнення та положення автомобілів у момент первинного контактування (рис. 1).

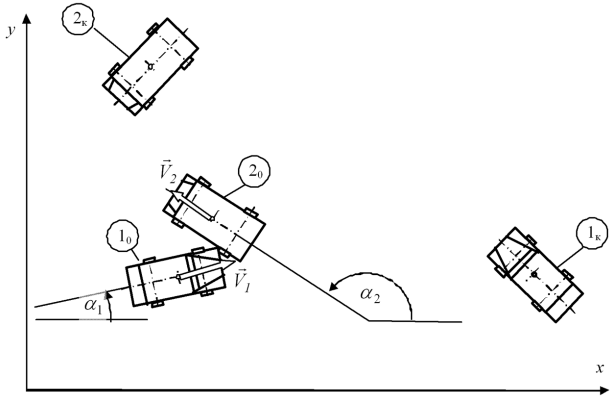

Рис. 1. Положення автомобілів у момент первинного контактування і їхнє остаточне положення після ДТП

Напрямок відкидання автомобілів після зіткнення можна визначити за наявності достатньої слідової інформації, зокрема зафіксованих слідів шин на дорожньому покритті. При цьому слід мати на увазі, що кути β_1, β_2 характеризують переміщення центрів мас автомобілів і можуть відрізнятися від кутів визначених за розташуванням слідів, залишених шинами. Тому ці кути доцільно визначати за масштабною схемою, на якій нанесено положення центра мас для кожного встановленого положення автомобіля. Швидкість відкидання буде спрямована за дотичною до траєкторії переміщення центра мас (рис. 2).

Як свідчить експертна практика, у більшості випадків слідової інформації недостатньо для встановлення проміжних положень автомобіля на шляху його відкидання, що не дає змогу визначити кути відкидання. У таких випадках експерти зазвичай спрямовують вектор швидкості відкидання за прямою, яка з'єднує центр мас автомобіля в момент первинного контактування з його центром мас

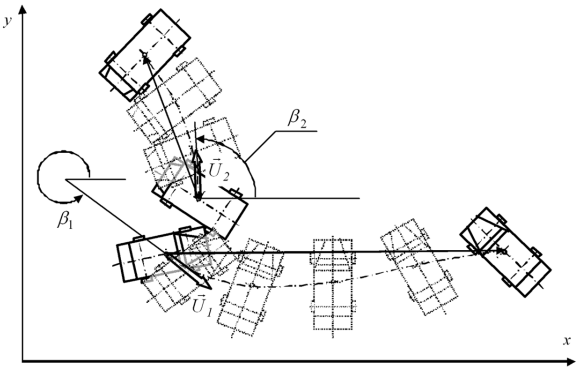

Рис. 2. Визначення кутів β_1, β_2, що характеризують напрямок відкидання автомобілів

в остаточному положенні. Як видно з рис. 2, визначене таким чином значення кута відкидання може значно відрізнятися від дійсного, і це може суттєво вплинути на остаточні результати розрахунків. Такі результати слід сприймати як орієнтовні, і вони не можуть слугувати підставою для категоричних висновків.

Найбільша складність очікує експерта при визначенні величин швидкостей відкидання U_1, U_2. У спеціальній літературі пропонується виходити з того, що кінетична енергія кожного з автомобілів після зіткнення переходить у роботу сил тертя шин по дорозі під час їхнього переміщення до місця зупинки[1]. Такий підхід базується на теоремі про змінення кінетичної енергії твердого тіла, згідно з якою змінення кінетичної енергії твердого тіла на будь-якому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, на відповідних переміщеннях точок прикладання цих сил[2]:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)}, \tag{7}$$

де T_0, T – кінетична енергія тіла відповідно на початку та наприкінці переміщення; $\sum A_k^{(e)}$ – сума робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, на цьому переміщенні.

Оскільки в остаточному після ДТП положенні автомобіль нерухомий, то його кінетична енергія наприкінці переміщення дорівнює нулю ($T = 0$), і рівняння (7) виглядає так:

$$- T_0 = \sum A_k^{(e)}. \tag{8}$$

[1] Див.: *Иларионов В. А.* Экспертиза дорожно-транспортных происшествий / В. А. Иларионов. — М. : Транспорт, 1989. — С. 205.

[2] Див.: *Никитин Н. Н.* Указ. праця; Теоретична механіка : навч. посіб.

Однак подальші підходи, які пропонуються в спеціальній літературі з судової автотехнічної експертизи[1] для визначення компонентів рівняння (8), потребують уточнень і додаткового обґрунтування.

Перш за все це стосується визначення кінетичної енергії автомобіля в момент його відкидання. Унаслідок зіткнення автомобіль у загальному випадку набуває складного руху, який характеризується поступальною складовою зі швидкістю U центра мас і обертальною складовою з деякою кутовою швидкістю ω. Відповідно й кінетична енергія автомобіля складатиметься з кінетичної енергії його поступального руху разом з центром мас і кінетичної енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас перпендикулярно площині переміщення[2]:

$$T_0 = \frac{mU^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{9}$$

де J – момент інерції автомобіля відносно вертикальної осі, що проходить через його центр мас; ω – кутова швидкість обертання, яку автомобіль набув унаслідок зіткнення.

У методичній літературі друга складова кінетичної енергії, яка відображає наявність обертального руху автомобіля, зазвичай ігнорується. Унасдідок цього вся робота сил опору на переміщенні автомобіля від місця зіткнення до місця зупинки, яка визначається як сума роботи сил тертя шин при поступальному переміщенні автомобіля на віддаль $S_{пн}$ та роботи цих сил при його розвертанні навколо центра мас на кут ε, «приписується» тільки поступальній складовій швидкості U[3]:

$$A' + A'' = mg(S_{пн}\varphi_y + 2ab\varepsilon\varphi_y / L) = \frac{mU^2}{2}, \tag{10}$$

де g – прискорення вільного падіння; A', A'' – робота сил тертя шин відповідно при поступальному переміщенні автомобіля на відстань $S_{пн}$ і його обертанні навколо центра мас на кут ε; φ_y – коефіцієнт тертя ковзання шин у поперечному напрямку; a, b – відстані від переднього та заднього мостів автомобіля до його центра мас; L – база автомобіля.

Такий підхід зумовлює отримання завідомо завищеного значення швидкості відкидання[4]:

---

[1] Див.: *Иларионов В. А.* Указ. праця; *Боровский Б. Е.* Указ. праця.

[2] Див.: *Никитин Н. Н.* Указ. праця; Теоретична механіка : навч. посіб.

[3] Див.: *Иларионов В. А.* Указ. праця. — С. 205.

[4] Див.: Там само. — С. 205, формула 7.20.

$$U=\sqrt{2g\varphi_y(S_{пн}+2ab\varepsilon/L)}\,. \qquad (11)$$

Як наслідок отримане в остаточному результаті значення швидкості V автомобіля до зіткнення також буде завищеним.

Якщо робота сил опору на відкидання автомобіля визначається як сума роботи сил тертя шин при поступальному переміщенні $S_{пн}$ і роботи при розвертанні на кут ε, то логічно вважати, що поступальна складова кінетичної енергії перетворюється на роботу поступального переміщення автомобіля:

$$\frac{mU^2}{2}=A'=mgS_{пн}\varphi_y\,, \qquad (12)$$

а енергія обертального руху перетворюється на роботу моменту сил опору на його розвертання:

$$\frac{J\omega^2}{2}=A''=2\,mg\,ab\varepsilon\varphi_y/L\,. \qquad (13)$$

За таких обставин при визначенні швидкості відкидання U немає підстав ураховувати роботу, яку виконують сили опору при розвертанні автомобіля і яка витрачається на «погашення» кутової швидкості ω обертання ТЗ, а для швидкості відкидання U матимемо:

$$U=\sqrt{2g\varphi_y S_{пн}}\,. \qquad (14)$$

Наведені формули часто застосовуються в експертній практиці для визначення роботи сил опору на переміщенні автомобіля від місця зіткнення до місця зупинки. Однак слід мати на увазі, що вони є слушними лише за певних обставин, а отримані на їхній основі результати є наближеними.

У загальному вигляді робота сили $\vec{F}$ на переміщенні M_0M_1 точки її прикладання дорівнює[1]:

$$A=\int_{M_0}^{M_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{M_0}^{M_1}F_\tau ds\,, \qquad (15)$$

де $ds=|d\vec{r}|$ – елементарне переміщення точки прикладання сили F; F_t – проекція сили на напрямок переміщення точки її прикладання.

Отже, для визначення роботи сил опору на певному переміщенні автомобіля необхідно знати не тільки траєкторію руху кожного з коліс, а й силу взаємодії кожного колеса з дорогою (як за величиною, так і за напрямком) у кожній точці його переміщення. І лише в окремих випадках, коли результуючу сил опору на всьому переміщенні автомобіля можна вважати постійною за величиною

[1] Див.: *Никитин Н. Н.* Указ. праця; Теоретична механіка : навч. посіб.

та протилежною до напрямку його переміщення, згідно із залежністю (15) робота рівнятиметься добутку цієї сили на величину переміщення:

$$A = -F\,S\,. \tag{16}$$

Від'ємний знак у правій частині є наслідком того, що сила опору і сила переміщення мають протилежний напрямок.

Під час руху автомобіля із заблокованими колесами результуючу сил опору з достатньою точністю можна вважати постійною й рівною $F=mg\varphi_y$. Тоді на основі рівняння (8) з урахуванням (16) для величини швидкості відкидання отримаємо вираз (14).

У разі, коли автомобіль після зіткнення рухався в стані заносу незагальмованим, визначення роботи сил опору на його лінійному переміщенні до місця зупинки ускладнюється. У міру розвороту автомобіля сили опору на колесах змінюються від мінімального значення, рівного опору кочення, коли колеса рухаються без бокового проковзування, до максимального, коли автомобіль переміщується перпендикулярно до своєї повздовжньої осі. На елементарному переміщенні ds центра мас автомобіля для елементарної роботи сил опору можна записати (рис. 3):

$$dA = F_\tau \cdot ds = -\,m\,g\,\varphi_y\,sin\gamma \cdot ds, \tag{17}$$

де $F_\tau = -F\,sin\gamma = -\,m\,g\,\varphi_y\,sin\gamma$ – складова сумарної сили опору, яка діє на автомобіль у напрямку, протилежному до переміщення його центра мас; γ – кут між повздовжньою віссю автомобіля та напрямком переміщення його центра мас у певний момент часу.

Уважаючи, що розворот автомобіля відбувався рівномірно, для кута γ на деякому переміщенні s автомобіля матимемо:

$$\gamma = \frac{\gamma_k - \gamma_0}{S_{пн}}\,s\,, \tag{18}$$

де γ_0, γ_k – кут між повздовжньою віссю автомобіля та напрямком переміщення його центра мас відповідно в початковий момент відкидання й безпосередньо перед зупинкою автомобіля.

З урахуванням залежності (18) формула (17) для роботи сил опору на елементарному переміщенні матиме вигляд:

$$dA = -\,m\,g\,\varphi_y\,sin(\frac{\gamma_k - \gamma_0}{S_{пн}}\,s) \cdot ds. \tag{19}$$

Інтегруючи вираз (19) на ділянці від $s = 0$ до $s = S_{пн}$, для роботи сил опору на лінійному переміщенні автомобіля від місця зіткнення до місця зупинки отримаємо:

$$A = -\int_0^{S_{пн}} mg\varphi_y \sin(\frac{\gamma_k - \gamma_0}{S_{пн}}s)ds = \frac{cos(\gamma_k - \gamma_0) - 1}{\gamma_k - \gamma_0} S_{пн} mg\varphi_y\,. \tag{20}$$

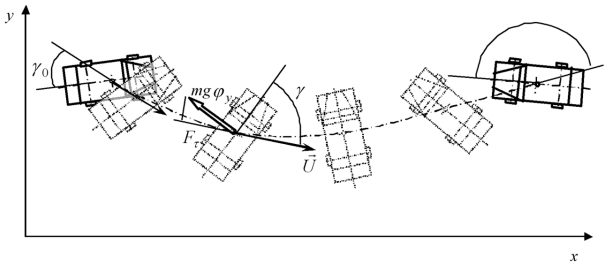

Рис. 3. Визначення роботи сил опору на переміщенні незагальмованого автомобіля, який рухається в стані заносу

Дорівнюючи кінетичну енергію поступального руху автомобіля з роботою сил опору на цьому самому переміщенні, для швидкості відкидання матимемо:

$$U = \sqrt{2g\frac{1 - cos(\gamma_k - \gamma_0)}{\gamma_k - \gamma_0} S_{пн}\varphi_y}\,. \qquad (21)$$

У процесі відкидання автомобіль може подолати певну відстань $S_{пн}$ у стані заносу, розвертаючись на кут $\Delta\gamma = \gamma_k - \gamma_0$, після чого ще деяку віддаль S_k подолати в режимі вільного кочення. Володіючи такою інформацією, експерт у формулі (21) повинен також урахувати й роботу сил опору коченню на переміщенні S_k.

Підсумовуючи викладене, слід відзначити, що закон збереження кількості руху може бути успішно застосований для визначення швидкості ТЗ до зіткнення за наявності даних щодо швидкостей їхнього відкидання (як за напрямком, так і величиною). Визначення величин цих швидкостей за затратами кінетичної енергії на шляху переміщення ТЗ до місця зупинки потребує достатнього обсягу інформації про характер руху ТЗ і дає змогу отримати лише наближені значення, на основі яких можна робити тільки ймовірні висновки. У зв'язку з цим особливої актуальності набувають розроблення та впровадження в експертну практику нових ефективних методів щодо визначення швидкостей відкидання ТЗ.