

УДК 616.711.6/.728.2-007.29:616-089

ДИБКАЛЮК С.В., ГЕРЦЕН Г.І.

Кафедра ортопедії й травматології № 1 Національної академії післядипломної освіти імені П.Л. Шупика, м. Київ

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРУЖНО-РЕГУЛЯТОРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ХРЕБТОВИХ АРТЕРІЙ У НИЖНЬОМУ ШИЙНОМУ ВІДДІЛІ ХРЕБТА ЛЮДИНИ

Резюме. Обґрунтовано необхідність вирішення важливої наукової проблеми, що стосується визначення кількісних характеристик патології кровообігу в артеріях шийного відділу людини. Вибрані методи досліджень спрямовані на визначення форми артерії, деформованої спіралеподібним м'язом, та визначення патологічних змін гідравлічних характеристик артерії на деформованій ділянці з урахуванням особливостей крові як рідкої субстанції, що включає істотну об'ємну частку еритроцитів.

Наведено результати математичного моделювання методом кінцевих елементів форми ділянки хребтової артерії, деформованої спіралеподібним м'язом. Установлені кількісні характеристики деформованого перерізу артерії.

Ключові слова: хребтова артерія, математичне моделювання, компресія.

Кровоносна система людини, що складається з артерій і вен, тісно контактує з іншими органами, зокрема з м'язами. У деяких випадках це призводить до перетискання артерії та зменшення кровотоку в ній. Тому дослідження, які б дозволили кількісно та якісно оцінити деформацію хребтової артерії, що перекривається м'язом, із подальшим визначенням гідравлічного опору, що при цьому виникає, є актуальними.

Проблема в загальному вигляді полягає у встановленні причин і наслідків негативного впливу розташованих поруч м'язів на артерії середнього розміру.

Проблема пов'язана з важливими науковими й практичними завданнями розробки радикальних методів лікування патології хребтових артерій шийного відділу людини.

У літературних джерелах наявна значна кількість результатів досліджень механіки судин та гідравліки крові [К]. Розглядаються різноманітні характеристики артерій та особливості кровотоку в них [2, 3]. Ряд публікацій присвячено вивченню особливостей зміни форми артерій шийного відділу при їх стисканні спіралеподібним м'язом [4, 5]. Досліджень, направлених на розрахунок пружно-деформованого стану артерій при їх стисканні та відповідних змін гідравлічних характеристик артерій із урахуванням специфіки руху крові, у літературних джерелах не виявлено.

До невирішених раніше частин загальної проблеми належать виявлення пружно-деформованого стану хребтової артерії, що стискається спіралеподібним м'язом, та визначення на цій основі гідравлічного опору

стиснутої артерії з урахуванням специфічних особливостей руху крові.

Артерія при наявності патології являє собою складний об'єкт досліджень, що потребує неординарних методів. Доцільним є проведення міждисциплінарних досліджень фахівцями в галузі медицини та механіки. Ефективним є застосування фундаментальних положень механіки деформованого тіла та методів гідромеханіки [6].

Завданнями досліджень є встановлення особливостей геометричних, механічних та гідравлічних характеристик хребтової артерії при її стисканні спіралеподібним м'язом та визначення зміни параметрів кровотоку у звуженій артерії.

Мета роботи — встановлення напружено-деформованого стану хребтової артерії, що стискається м'язом, та визначення залежності гідравлічного опору від ступеня перекриття хребтової артерії.

Матеріал і методи

Характеристика об'єкта та предмета досліджень

Хребтові артерії належать до артерій середнього розміру. Їх діаметр знаходиться в межах 3,5–4,5 мм. Хребтові артерії розташовані паралельно сонним арте-

© Дибкалюк С.В., Герцен Г.І., 20К4

© «Травма», 20К4

© Заславський О.Ю., 20К4

ріям (рис. К) і забезпечують подачу крові до всіх органів голови.

У нормальному стані в артерії має місце рух крові, близький до ламінарного. Швидкість руху крові в артеріях не перевищує 0,5 м/с. Артерії мають незначну конфузорність, що стабілізує течію крові й зменшує

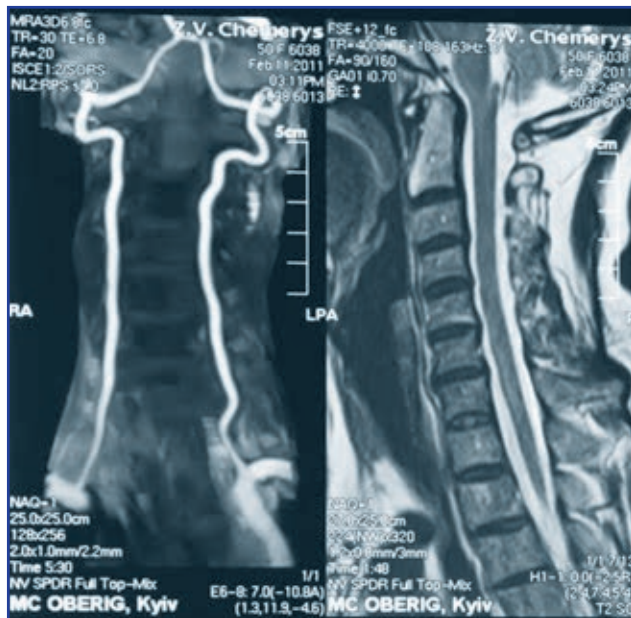


Рисунок 1. Ангіограма артерій шийного відділу (стрілками показано місця звуження хребтових артерій)

ймовірність вихроутворення. При стисненні артерій спіралеподібними м'язами спостерігається їх компресія (зменшення прохідного перетину). Це має місце на початкових ділянках артерій і спостерігається на ангиограмах (показано стрілками на рис. К). Звуження артерій має складний просторовий характер. Для дослідження зміни форми артерії проведено математичне моделювання її напружено-деформованого стану.

Моделювання напружено-деформованого стану артерій

Хребтова артерія контактує з іншими органами, зокрема з м'язами. У випадку хребтової артерії контакт із спіралеподібним м'язом приводить до компресії (перетискання) артерії та зменшення кровотоку в ній.

Визначено напружено-деформований стан артерії, перекритої м'язом. Розрахунки проведені з використанням метода кінцевих елементів (МКЕ) [С].

Метод кінцевих елементів — технологія, що дозволяє провести аналіз напружено-деформованого стану об'єкта за його тривимірною моделлю.

МКЕ дозволяє достатньо точно визначити напрямки та величину деформацій у точках (вузлах) моделі, а також напруження, що виникають у цих точках.

Згідно з методом тривимірної моделі розбивається за допомогою сітки на велику кількість кінцевих елементів. Точність моделювання залежить від кількості елементів: чим їх більше, тим вища точність.

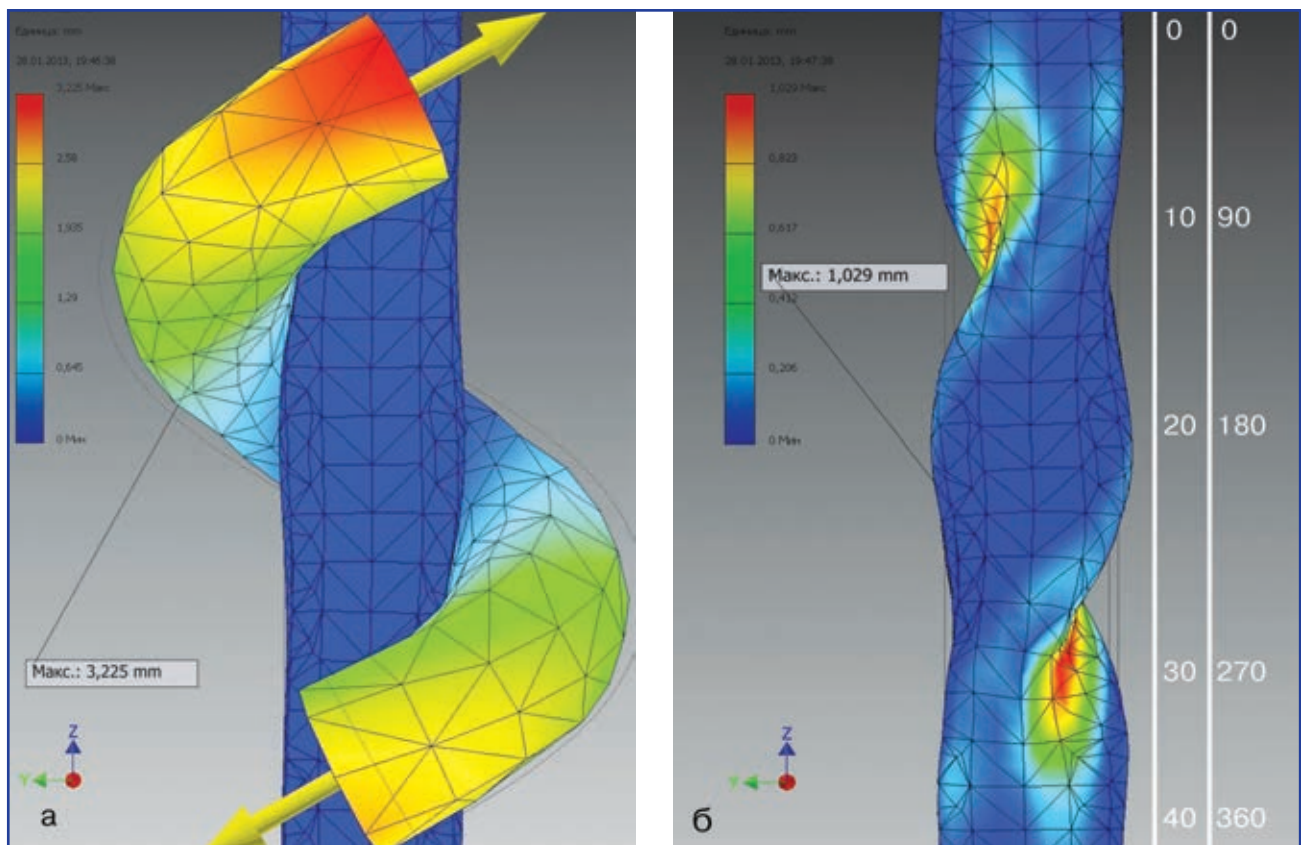


Рисунок 2. Схема навантаження (а) та типова деформація хребтової артерії (б)

У процесі моделювання програмний комплекс розв'язує рівняння, що описують напружено-деформований стан для кожного кінцевого елемента моделі. Результати розрахунків у більшості випадків візуалізуються.

Важливо було правильно встановити форму м'яза, що взаємодіє із артерією, схему, за якою він навантажується, а також те, яким чином він контактує з артерією. Згідно із літературними джерелами [3, 4], м'яз має спіралеподібну форму і по всій довжині прилягає до артерії та навантажується аксіально.

Для даної схеми навантаження проведено розрахунок напружено-деформованого стану артерії, що перетискається (рис. 2а).

Навантаження, що створюється м'язом, є досить значним і лежить у широких межах [3]. Воно є достатньо великим порівняно із силами жорсткості стінок артерії. Тому оцінювалися насамперед форма стінки навантаженої артерії та визначалися ділянки максимальних деформацій при різних величинах навантаження. Прийняті пружні властивості

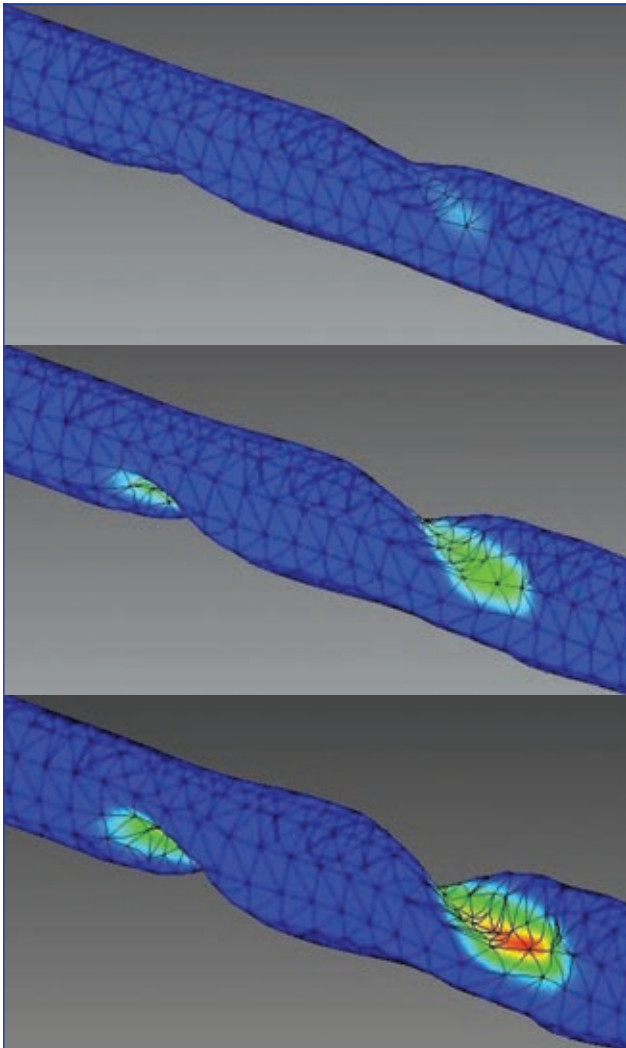


Рисунок 3. Послідовні кадри компресії артерії при збільшенні напруження спіралеподібного м'яза

матеріалів артерії та м'яза отримані з літературних джерел [6].

При проведенні моделювання за допомогою МКЕ навантаження, що прикладалися до артерії, варіювалися. У результаті дії зовнішніх зусиль артерія набувала форми, близької до спіралеподібної, на навантаженій ділянці (рис. 2б).

Стискання артерії має місце на довжині $x \leq 40$ мм. При цьому стиснений перетин повертається по гвинтовій лінії на кут $\phi \leq 200^\circ$. Стискання артерії залежить від величини напруження спіралеподібного м'яза (рис. 3).

Математична обробка даних моделювання показала, яким чином змінюється форма поперечного перетину артерії залежно від навантаження. Визначено, яким чином змінюється форма поперечного перетину по довжині, та чисельно визначено цю зміну.

Форма поперечного перетину артерії при навантаженні змінюється від кругової до серпоподібної (рис. 4).

Встановлено, що найбільше відношення площ поперечного перетину нормальної артерії та зі звуженням чисельно дорівнює восьми. Довжина ділянки з максимальним звуженням становить 20 мм при загальній довжині артерії 200 мм.

Проведені дослідження дали змогу встановити, що форма поперечного перетину каналу перетиснутої артерії може бути апроксимована деформованим еліпсом серпоподібного вигляду (рис. 5).

Довжина великої осі еліпса є сталою при різних зовнішніх навантаженнях. Розмір малої осі змінюється, причому ця зміна є пропорційною до зміни площі поперечного перетину артерії.

На основі одержаних даних були проведені розрахунки гідравлічних характеристик перетиснутої артерії.

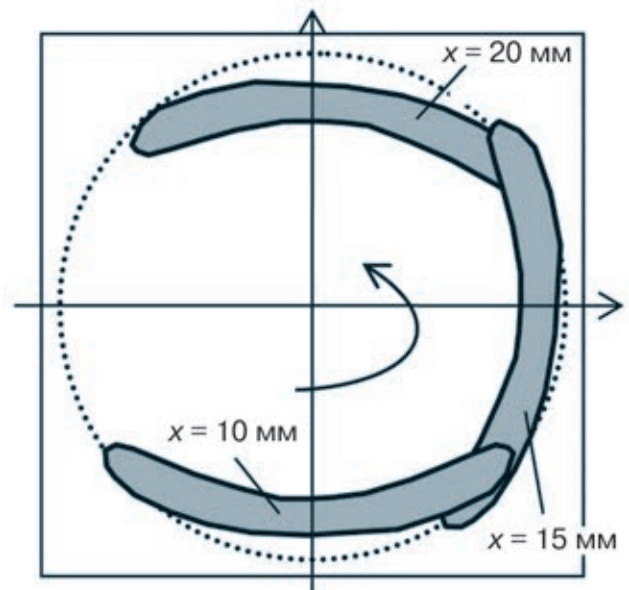


Рисунок 4. Форма поперечного перетину артерії при її компресії та зміни положення перетину по довжині артерії

Визначення перепаду тиску в місці звуження артерії

При стисненні артерії еритроцити, що рухаються по артерії, будуть деформованими (рис. 6).

Поперечний перетин апроксимовано еліпсом із пів-осями a та b . Раніше показано, що при максимальному стисненні артерії площа перетину артерії зменшується у вісім разів. Тому визначити a та b можна з такої залежності

$$\pi d^2 \Pi_4 = 0\pi ab. \quad (К)$$

Враховуючи, що $d = 3,6$ мм, знаходимо

$$b = 0,23 \text{ мм}; a = 0,5 \text{ мм}. \quad (2)$$

Для еліптичного каналу середня швидкість вираховується за такою залежністю

$$V_{\text{сеп}} = \frac{\Delta p}{4\mu l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad (3)$$

де l — довжина каналу.

Для стаціонарного руху рідини при відсутності джерел маси в об'ємі рівняння збереження мас в інтегральній формі має вигляд

$$\iint_S V_n d\sigma = 0. \quad (4)$$

Дане рівняння відповідає рівнянню нерозривності. Для еліптичного каналу з даного рівняння знаходимо витрату крові

$$Q = \pi ab V_{\text{сеп}}. \quad (5)$$

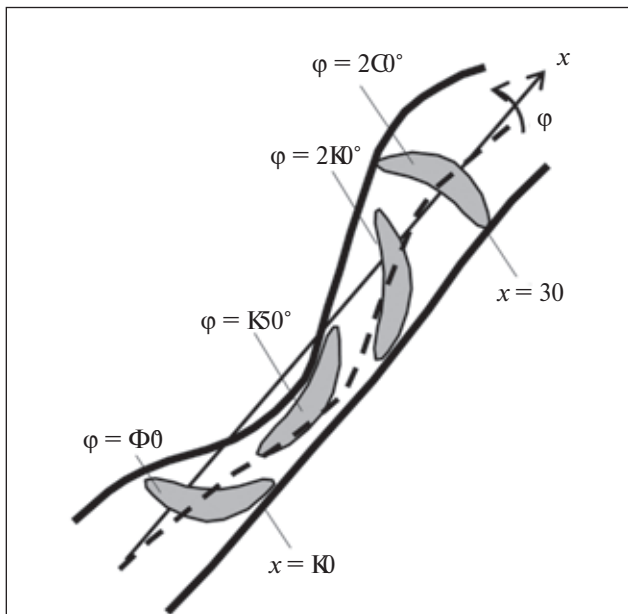


Рисунок 5. Зміна положення перетину артерії на ділянці звуження

Втрати тиску на ділянці з максимальним звуженням

$$\Delta p = \frac{4\mu l Q (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^2}. \quad (6)$$

Розрахунок згідно з формулою (6) для значень параметрів (2) дає значення перепаду тиску на деформованій ділянці артерії

$$\Delta p = 5237 \text{ Па} = 39 \text{ мм рт.ст.}$$

Втрати напору при звуженні та розширенні каналу є незначними. Порівнявши знайдене значення втрат напору для звуженої артерії із втратами напору по довжині в артерії без компресії, що не перевищують 2–3 мм рт.ст., згідно з літературними джерелами [2], а також із проведеними попередніми розрахунками, можна зробити висновок, що гідравлічні втрати значно стиснутої артерії збільшуються в 10–20 разів.

Проведено порівняння отриманих результатів із наявними в літературних джерелах [0], що підтвердило вірогідність проведених розрахунків.

Розрахунки проведено для артерій із різними площами поперечного перетину. Результати подані у вигляді залежності втрат напору від площі поперечного перетину каналу (крива К на рис. 0).

Результати гідравлічних розрахунків підтверджують значне зростання гідравлічного опору при зменшенні площі поперечного перетину артерії в 5–10 разів.

Гідравлічні втрати в основному обумовлюються звуженою ділянкою артерії, що апроксимована еліп-

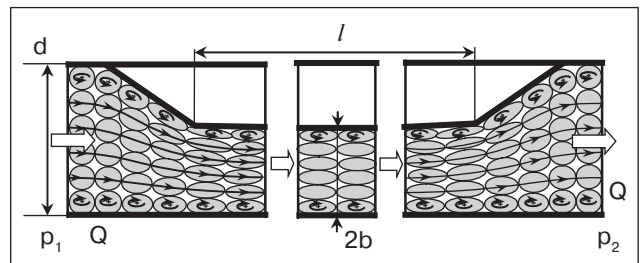


Рисунок 6. Рух компактно розміщених еритроцитів на ділянці звуження артерії без урахування гвинтового руху крові

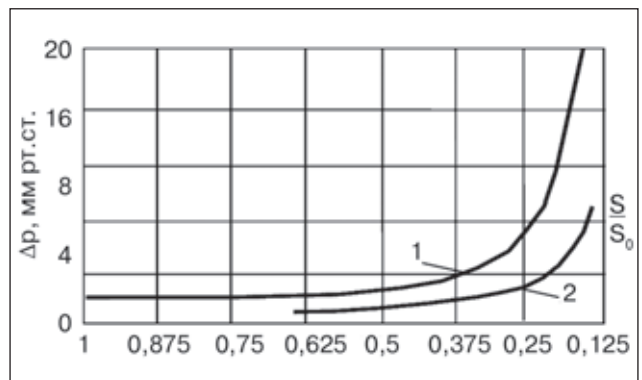


Рисунок 7. Залежність втрат напору від площі поперечного перетину стисненої ділянки артерії

сом або щілиною, й набагато меншою мірою — звуженням і розширенням потоку та ін.

Розрахунки гідравлічного опору проведені на основі геометричних параметрів, отриманих МКЕ. Це насамперед форма поперечного перетину у місцях із середнім та максимальним стисненням артерії та закрутка криволінійного каналу по довжині артерії.

Ж показано раніше (рис. 5), звужена ділянка артерії має вигляд гвинтового каналу. Тому в артерії має місце гвинтовий рух крові, що збільшує гідравлічний опір стисненої ділянки. Кручення каналу визначене в результаті розрахунку напружено-деформованого стану артерії. У гвинтовому каналі має місце переміщення еритроцитів із набуттям ними обертового руху (рис. 0).

Для визначення додаткового перепаду тиску, обумовленого гвинтовим рухом крові, використаємо рівняння зміни моменту кількості руху. Воно встановлює співвідношення між моментами кількості руху елементів рідкого середовища й має такий вигляд [Ф5]

$$\iint_W \rho \frac{dV}{dt} dW = \iint_S \rho P d\sigma, \quad (C)$$

де знак \times означає векторний добуток векторів; r — радіус-вектор довільної точки в середині контрольного об'єму W ; ρ — середня густина крові.

Інтеграл у правій частині формули (C) обчислено наближено. Прийнято, що стиснутий перетин артерії має невелику товщину. Для контрольного об'єму одичної довжини маємо5

$$\iint_S \rho P d\sigma = R \cdot \frac{\Delta P \cdot S}{\cos \gamma} i, \quad (0)$$

де R — середній радіус стисненого перетину відносно осі артерії, S — площа стисненого перетину; γ — кут нахилу гвинтової траєкторії руху крові в стисненому перетині; i — орт дотичної в циліндричній системі координат.

Для обчислення інтеграла в лівій частині рівняння визначимо похідну швидкості у вигляді [Ю5]

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V,$$

де ∇ — оператор Набла.

Для стаціонарного руху $\partial V / \partial t = 0$.

Проекція інтеграла в правій частині (0) на напрямки дотичної5

$$\iint_W \rho \frac{dV}{dt} = \rho V_n^2 \operatorname{tg} \gamma \cdot S_{i\varphi}. \quad (\Phi)$$

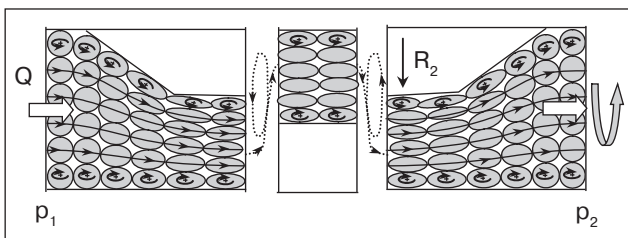


Рисунок 8. Набуття потоком крові гвинтового руху на стисненій ділянці артерії

Прирівнявши праві частини (0) і (Ф), визначимо перепад тиску, обумовлений гвинтовим рухом крові залежно від витрати5

$$\Delta p = \rho \frac{Q^2 \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \gamma l}{S^2 R}. \quad (Ю)$$

Розрахунки за формулою (Ю) наведені в графічному вигляді (крива 2 на рис. C). Із порівняння графіків випливає, що гвинтовий рух потоку крові дещо підвищує втрати напору. Особливо це проявляється при значних стисненнях артерії. При помірному стисненні гвинтовий рух підвищує перепад тиску на Ю–К5 3.

Висновки

К У результаті розрахунку напружено-деформованого стану ділянки хребтової артерії, деформованої спіралеподібним м'язом, встановлено, що перетин артерії набуває серпоподібної форми довжиною близько 4 мм та шириною близько 0,5 мм, а сама артерія утворює гвинтовий криволінійний канал довжиною Ю–22 мм, що відповідає кроку гвинтової лінії та має вхідну ділянку звуження (конфузорності) та вихідну ділянку розширення (дифузорності) довжиною близько Ю мм кожна.

2. На основі розрахунку основних параметрів еритроцита встановлено, що він має три рівні за об'ємом та площею мембрани конфігурації5 двояковігнутий диск, сплюснутий та витягнутий еліпсоїди обертання. При цьому при незначних напруженнях зсуву в рухчій крові, що характерні для течії в артерії без стиснення, еритроцит набуває форми, близької до сплюснутого еліпсоїду, а при великих напруженнях зсуву, що характерні для місця звуження артерії, його форма буде близькою до витягнутого еліпсоїду обертання.

3. Показано, що при невеликих напруженнях зсуву еритроцит обертається, а при значних напруженнях він перепадає обертатися, а його мембрана здійснює інтенсивний циркуляційний рух відносно малорухомого рідкого вмісту еритроцита. Цим забезпечується рух крові з характеристиками, близькими до ламінарного, та стабілізується течія в пристінному шарі, унеможливаючи вихроутворення та відрив потоку крові від стінки артерії на дифузорній ділянці звуження.

4. Визначено, що при деформації артерії, що відповідає зменшенню її площі в 5–0 разів, різко зростає перепад тиску на стиснутій ділянці. При цьому перепад тиску може сягати 20 мм рт.ст. і вище, що в десятки раз перевищує перепад тиску в артерії без стиснення. Наявність гвинтового каналу при стисненні підвищує перепад тиску на Ю–К5 3.

5. Як напрямок подальших досліджень рекомендується визначити гідравлічні характеристики всього комплексу артерій шийного відділу людини, врахувавши при цьому можливість компресії обох хребтових артерій.

Список літератури

1. Черняк В.А. *Современные аспекты хирургической профилактики ишемического инсульта // Практична ангіологія.* — 2012. — № 2/1. — С. 21-29.

2. Скобцов Ю.А., Родин Ю.В., Оверко В.С. Моделирование и визуализация поведения потоков крови при патологических процессах. — Донецк: Издатель Заславский А.Ю., 2008. — 212 с.
3. Аналіз клінічних варіантів та форм синдрому хребтової артерії у хворих із екстравазальною компресією в сегментах V1-V2 залежно від віку / В.Г. Мішалов, Л.М. Яковенко, В.А. Черняк, В.В. Сулік, С.В. Дибкалюк, Р.В. Сулік, В.Ю. Зоргач, К.М. Зозуля // Серце і судини. — 2011. — № 2(34). — С. 57-64.
4. Клініко-доплерографічні кореляції та результати інструментальних методів діагностики синдрому хребтової артерії у хворих з екстравазальною компресією в сегменті V1-V2 / В.Г. Мішалов, В.А. Черняк, В.В. Сулік, С.В. Дибкалюк, Р.В. Сулік, В.Ю. Зоргач // Серце і судини. — 2011. — № 4(36). — С. 9-16
5. Пат. на корисну модель № 54580 (UA) МПКА 61 В 17/00. Спосіб відновлення кровотоку в басейні хребтової артерії людини / Мішалов В.Г., Черняк В.А., Сулік В.В., Дибкалюк С.В., Сулік Р.В., Сулік В.К., Сулік С.І.; заявник і патентоутримувач Національний медичний університет ім. О.О. Богомольця. — № u201008493; заявл. 07.07.10; опубл. 10.11.10. Бюл. № 21.
6. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. — М.: МИР, 1981. — 623 с.
7. Рон К.С. Чен. Autodesk Inventor. — М.: Лори, 2002. — 568 с.
8. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. — М.: МИР, 1983. — 400 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

Отримано 22.04.14 ■

Дыбкалюк С.В., Герцен Г.И.
Кафедра ортопедии и травматологии № 1
Национальной академии последипломного образования
имени П.Л. Шупика, г. Киев

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГО-РЕГУЛЯТОРНЫХ
И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОЗВОНОЧНЫХ АРТЕРИЙ В НИЖНЕМ ШЕЙНОМ
ОТДЕЛЕ ПОЗВОНОЧНИКА ЧЕЛОВЕКА**

Резюме. Обоснована необходимость решения важной научной проблемы, которая касается определения количественных характеристик патологии кровообращения в артериях шейного отдела человека. Выбранные методы исследований направлены на определение формы артерии, деформированной спиралевидной мышцей, и определение патологических изменений гидравлических характеристик артерии на деформированном участке с учетом особенностей крови как жидкой субстанции, которая включает существенную объемную долю эритроцитов.

Приведены результаты математического моделирования методом конечных элементов формы участка позвоночной артерии, деформированной спиралевидной мышцей. Установлены количественные характеристики деформированного сечения артерии.

Ключевые слова: позвоночная артерия, математическое моделирование, компрессия.

Dybkałyuk S.V., Gertsen G.I.
Department of Orthopedics and Traumatology № 1
of the National Academy of Postgraduate Education
named after P.L. Shupyk, Kyiv, Ukraine

**USING MATHEMATICAL MODELING
BY FINITE ELEMENT METHOD
OF ELASTIC-REGULATORY
AND HYDRAULIC CHARACTERISTICS
OF VERTEBRAL ARTERIES
IN THE LOWER CERVICAL SPINE OF HUMAN**

Summary. The necessity of solving important scientific problem, which concerns the determination of the quantitative characteristics of the pathology of blood circulation in the arteries of the human cervical spine, is justified. Selected methods of research aimed at determining the shape of artery, deformed by spiral muscle, and determining pathological changes on the hydraulic characteristics of the artery on the deformed portion taking into account the blood features as a liquid substance, which includes a significant volume fraction of erythrocytes.

The results of mathematical modeling using finite element method of the shape of vertebral artery portion, deformed by spiral muscle are given. The quantitative characteristics of the deformed section of the artery are defined.

Key words: vertebral artery, mathematical modeling, compression.