

УДК 631.312

РОЗРАХУНОК ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОВЕРХНІ СКРЕБКА ГНОЄПРИБИРАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ ПАРАБОЛИ

С. Пилипака, д-р техн. наук, **Г. Голуб**, д-р техн. наук,
В. Хмельовський, канд. техн. наук,
Національний університет біоресурсів і природокористування України
М. Ікальчик,
Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

Складено диференціальні рівняння руху частинки гною по внутрішній поверхні циліндра з поперечним перерізом у вигляді параболи. Швидкість руху частинки прийнята сталою, рівною швидкості переміщення скребка. Рівняння розв'язані чисельними методами. Побудовано траєкторії руху при заданій швидкості та різних вихідних умовах.

Ключові слова: *гній, рух, траєкторія, парабола, рівняння.*

Актуальність проблеми. При взаємодії технологічного матеріалу із робочими органами частинки останнього змушені ковзати по їх поверхнях, описуючи певні траєкторії. Досить поширеною і найбільш простою поверхнею є площина (горизонтальна або похила). Похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. Однак поверхні робочих органів не обмежуються тільки площинами. Найбільш простими криволінійними поверхнями, які ідуть після площин, є циліндричні. У цьому випадку розрахунок кінематичних характеристик руху частинок ускладнюється, оскільки траєкторією переміщення частинки є просторова крива на відміну від площини, для якої траєкторією руху частинки є плоска крива.

Аналіз останніх досліджень. Задача знаходження траєкторій частинки по похилій площині розглянута в монографіях [1, 2], причому в [2] досить ґрунтовно розглянуто також рух частинки по поверхнях (як стаціонарних, так і рухомих). Дослідження руху частинки по поверхнях обертання з вертикальною віссю при боковій подачі матеріалу розглянуто в працях [3, 4]. В праці [5] розглянуто розрахунок скребка гноєприбиральної установки у вигляді похилої площини, яка рухається в гнойовому каналі під певним кутом атаки.

Формулювання мети статті. Описати аналітично рух частинки гною по циліндричній шорсткій поверхні із поперечним перерізом у вигляді параболи, яка рухається із сталою швидкістю у гнойовому каналі під заданим кутом атаки.

Основна частина. Якщо скребок у вигляді циліндричної поверхні рухається по гнойовому каналу, то частинки гною, попадаючи на нього, змушені будуть під дією сили підпору рухатися по поверхні скребка. Припустимо, що швидкість руху частинки по поверхні є сталою і дорівнює швидкості руху самого скребка. Будемо вважати, що нижня кромка скребка розташована не перпендикулярно напрямку його переміщення, а під певним кутом γ . Тоді в момент вступу частинки на скребок напрям швидкості її руху складатиме кут γ із нижньою прямолінійною кромкою скребка (нижньою твірною його поверхні) (рис. 1,а). При подальшому переміщенні складова сили ваги змусить частинку рухатися вниз по поверхні.

За криву поперечного перерізу скребка приймемо параболу, яка в проєкціях на площину xOz запишеться рівнянням $z=ax^2$. Перейдемо до параметричної форми запису цього рівняння:

$$x = v; \quad z = av^2, \quad (1)$$

де v – незалежна змінна, a – стала.

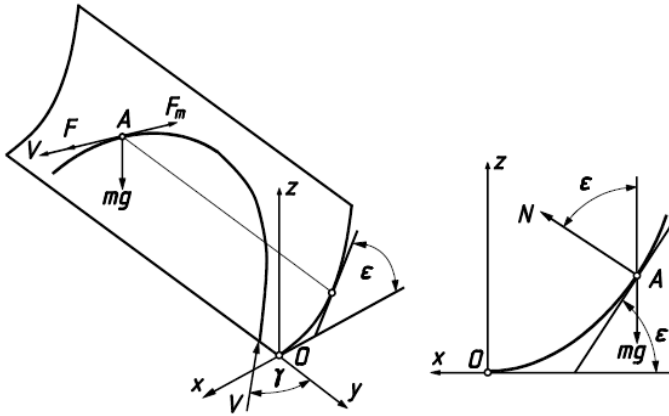


Рисунок 1 – Графічні ілюстрації до розташування поверхні в системі координат $Oxyz$ та руху частинки по ній: а) схема дії сил на частинку в точці A при її русі по циліндричній поверхні; б) до визначення напрямку нормалі N до поверхні в поточній точці A (вісь Oy проєкціюється в точку).

В поточній точці A (рис. 1,б) дотична до параболи складає із віссю Ox кут ε . Через нього можна знайти напрям нормалі N до поверхні, яка нам буде потрібна в подальшому. За відомими формулами знаходимо:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{z'}{v'} = 2av, \quad \text{звідки } v = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2a}. \quad (2)$$

Підстановкою другого виразу (2) в (1) знаходимо параметричні рівняння параболи, для якої незалежною змінною буде кут ε :

$$x = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2a}; \quad z = \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon}{4a}. \quad (3)$$

Запишемо параметричні рівняння циліндричної поверхні, для якої поперечним перерізом є парабола (3). Для прийнятого розташування її в системі $Oxyz$ рівняння запишуться:

$$X = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2a}; \quad Y = -u; \quad Z = \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon}{4a}. \quad (4)$$

В рівняннях (4) через символ “ u ” позначено другу незалежну змінну – довжину прямолінійної твірної поверхні. Знаки “ $-$ ” задають необхідний відсік поверхні відповідно до її розташування в системі $Oxyz$. Якщо дві незалежні змінні ε і u поверхні (4) зв’язати між собою певною залежністю у вигляді $\varepsilon = \varepsilon(u)$ або $u = u(\varepsilon)$, то на поверхні з’явиться відповідна лінія. Її рівняння не відрізнятимуться від рівнянь поверхні (4), якщо, наприклад, залежність $u = u(\varepsilon)$ для спрощення запису показувати без дужок і змінної ε , оскільки вона для лінії є тільки одна. Щоб була різниця між параметричними рівняннями поверхні і лінії на ній, в рівняннях лінії символи “ x ”, “ y ”, “ z ” будемо позначати строчними літерами, а для поверхні – великими. Вважатимемо лінію на поверхні траєкторією частинки, рівняння якої потрібно знайти. Залежність між змінними ε і u встановимо через третю змінну – час t , тобто $\varepsilon = \varepsilon(t)$ і $u = u(t)$. Якщо в рівняннях (4) замінити прописні літери на строчні, то це означатиме рівняння лінії – траєкторії на поверхні з невідомими залежностями $\varepsilon = \varepsilon(t)$ і $u = u(t)$, які потрібно знайти.

Систему диференціальних рівнянь руху частинки розглянемо в проєкціях на осі системи $Oxyz$. Під дією сили підпору F частинка змушена рухатися по поверхні із швидкістю V , яку прийемо рівною швидкості руху скребка. Окрім сили F , спрямованої в напрямі швидкості V (рис. 1,а), на частинку діють інші сили, а саме:

- сила тертя F_m , спрямована в протилежну сторону швидкості V руху частинки;

- сила реакції N поверхні, яка збігається із напрямом нормалі до неї (рис. 1,б);

- сила ваги mg , спрямована вертикально вниз, де m – маса частинки, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Для складання диференціальних рівнянь руху частинки по поверхні скребка потрібно знати напрям дії всіх зазначених сил. Сила підпору F і сила тертя F_m мають спільний напрям дії, але спрямовані в протилежні сторони (рис. 1,а). Цей напрям визначається напрямом швидкості V руху частинки, який є дотичним до траєкторії. Траєкторія описується наступними параметричними рівняннями в силу зазначених вище причин:

$$x = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2a}; \quad y = -u; \quad z = \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon}{4a}. \quad (5)$$

Зважаючи на те, що $\varepsilon = \varepsilon(t)$ і $u = u(t)$, знайдемо напрям дотичної до траєкторії (напрямок швидкості V) диференціюванням рівнянь (5) за часом t :

$$x' = -\frac{\varepsilon'}{2a \cos^2 \varepsilon}; \quad y' = -u'; \quad z' = \frac{\varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon}{2a \cos^2 \varepsilon} \quad (6)$$

Величину (модуль) швидкості V знайдемо за формулами геометричної суми проєкцій (6):

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}}{2a \cos^3 \varepsilon}. \quad (7)$$

Одиничний вектор або напрямні косинуси дотичної до траєкторії знайдемо діленням проєкцій (6) на модуль швидкості V (7):

$$\left\{ -\frac{\varepsilon' \cos \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}}; \quad -\frac{2au' \cos^3 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}}; \quad \frac{\varepsilon' \sin \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}} \right\} \quad (8)$$

Напрямні косинуси нормалі до поверхні, в напрямі якої діє сила реакції поверхні (рис. 1,б) запишуться:

$$\{\sin \varepsilon; \quad 0; \quad \cos \varepsilon\}. \quad (9)$$

Напрямні косинуси сили ваги mg мають вигляд:

$$\{0; \quad 0; \quad -1\}. \quad (10)$$

Диференціальні рівняння руху частинки в проєкціях на осі системи координат $Oxyz$ запишуться:

$$\begin{aligned} mx'' &= F_x; \\ my'' &= F_y; \\ mz'' &= F_z, \end{aligned} \quad (11)$$

де x'' , y'' , z'' - проєкції прискорення частинки;

F_x , F_y , F_z - суми проєкцій діючих на частинку сил на відповідну вісь.

Підставимо в рівняння (11) всі діючі на частинку сили із врахуванням напрямку їх дії відповідно до напрямних косинусів (8), (9), (10):

$$\begin{aligned} mx'' &= (F_m - F) \frac{\varepsilon' \cos \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}} + N \sin \varepsilon; \\ my'' &= (F_m - F) \frac{2au' \cos^3 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}}; \\ mz'' &= -(F_m - F) \frac{\varepsilon' \sin \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon}} + N \cos \varepsilon - mg. \end{aligned} \quad (12)$$

Вирази прискорення частинки, яке входить до рівнянь (12), одержимо диференціюванням по часу t проєкцій швидкості (6):

$$\begin{aligned}x'' &= -\frac{\varepsilon'' + 2\varepsilon'^2 \operatorname{tg} \varepsilon}{2a \cos^2 \varepsilon}; \\y'' &= -u''; \\z'' &= \frac{\varepsilon'' \operatorname{tg} \varepsilon + \varepsilon'^2 (3 \sec^2 \varepsilon - 2)}{2a \cos^2 \varepsilon}.\end{aligned}\quad (13)$$

Перед тим, як підставити вирази (13) у рівняння (12), зробимо деякі уточнення. Із виразу швидкості руху частинки V (7) знайдемо похідну u' :

$$u' = \frac{\sqrt{4a^2 V^2 \cos^6 \varepsilon - \varepsilon'^2}}{2a \cos^3 \varepsilon}.\quad (14)$$

Другу похідну знайдемо диференціюванням (14) по часу t :

$$u'' = -\frac{\varepsilon'(\varepsilon'' + 3\varepsilon'^2 \operatorname{tg} \varepsilon)}{2a \cos^3 \varepsilon \sqrt{4a^2 V^2 \cos^6 \varepsilon - \varepsilon'^2}}.\quad (15)$$

Таким чином, першу і другу похідну функції $u=u(t)$ ми замінили виразами (14) і (15), тобто скоротили число невідомих функцій. Сила тертя F_m прямо пропорційна силі тиску N , тобто $F_m = fN$, де f – коефіцієнт тертя. Згідно (7) $\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2 \cos^6 \varepsilon} = 2aV \cos^3 \varepsilon$. Підставивши ці вирази, а також вирази (13) із врахуванням (14), (15) в (12), отримуємо систему диференціальних рівнянь руху частинки по поверхні (4):

$$\begin{aligned}-m \frac{\varepsilon'' + 2\varepsilon'^2 \operatorname{tg} \varepsilon}{2a \cos^2 \varepsilon} &= (fN - F) \frac{\varepsilon'}{2aV \cos^2 \varepsilon} + N \sin \varepsilon; \\m \frac{\varepsilon'(\varepsilon'' + 3\varepsilon'^2 \operatorname{tg} \varepsilon)}{2a \cos^3 \varepsilon \sqrt{4a^2 V^2 \cos^6 \varepsilon - \varepsilon'^2}} &= (fN - F) \frac{\sqrt{4a^2 V^2 \cos^6 \varepsilon - \varepsilon'^2}}{2aV \cos^3 \varepsilon}; \\m \frac{\varepsilon'' \operatorname{tg} \varepsilon + \varepsilon'^2 (3 \sec^2 \varepsilon - 2)}{2a \cos^2 \varepsilon} &= -(fN - F) \frac{\varepsilon' \sin \varepsilon}{2aV \cos^3 \varepsilon} + N \cos \varepsilon - mg.\end{aligned}\quad (16)$$

До системи диференціальних рівнянь (16) входить три невідомих функції: $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $F = F(t)$ і $N = N(t)$. Таким чином, при $V = \text{const}$ до системи (16) із трьох рівнянь входить три невідомих функції, тобто вона може бути розв'язана. “Витягнемо” із (16) ці функції, тобто розв'яжемо систему (16) відносно ε'' , F і N :

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'^2 \sin \varepsilon}{2aV^2 \cos^3 \varepsilon} (g - 6aV^2 \cos^2 \varepsilon) - ag \sin 2\varepsilon \cos^2 \varepsilon\quad (17)$$

$$F = m \frac{4g\varepsilon' \sin \varepsilon + Vf(4\varepsilon'^2 + 4ag \cos 2\varepsilon + ag \cos 4\varepsilon + 3ag)}{8aV \cos^3 \varepsilon}.\quad (18)$$

$$N = m \left(g \cos \varepsilon + \frac{\varepsilon'^2}{2a \cos^3 \varepsilon} \right).\quad (19)$$

Неважко побачити, що диференціальне рівняння (17) є незалежне, тобто воно може бути розв'язане відносно функції $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Щоправда, в аналітичному вигляді це зробити не вдається, тому потрібно застосовувати чисельні методи. Коли ця функція буде знайдена, стають відомими залежності (18) і (19). Для побудови траєкторії частинки гною по циліндричному скребку достатньо знати залежність $\varepsilon = \varepsilon(t)$, яка підставляється в рівняння (5). Залежність $u = u(t)$, яка теж входить до рівнянь (5), знаходиться чисельним інтегруванням виразу (14).

При інтегруванні рівняння (17) потрібно задавати сталі інтегрування: початкове значення кута ε і початкове значення похідної ε' . При початковому значенні кута $\varepsilon = 0$ дотичною до параболи в нижній її точці буде вісь Ox . Від значення похідної ε' залежить початкове значення кута γ (кута вступу частинки на поверхню або кута, під яким траєкторія перетинає твірну циліндра). Для її знаходження розглянемо елементарний прямокутний трикутник, гіпотенузою якого є елемент дуги ds траєкторії (рис. 2). Одним із катетів є елемент прямолінійної твірної du . Таким чином, можна записати:

$$\cos \gamma = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{u'}{s'}. \quad (20)$$

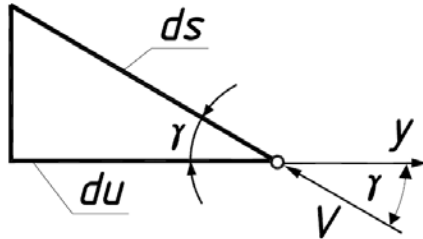


Рисунок 2 – До визначення кута вступу γ частинки на поверхню

Похідна s' рівна модулю швидкості (7). Тому вираз (20) можна переписати наступним чином:

$$\cos \gamma = \frac{2au' \cos^3 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 4a^2 u'^2} \cos^6 \varepsilon}. \quad (21)$$

Підставивши в (21) вираз u' із (14) і розв'язавши отримане рівняння відносно ε' , одержимо:

$$\varepsilon' = 2aV \cos^3 \varepsilon \sin \gamma. \quad (22)$$

Вираз (22) дає можливість знайти значення сталої інтегрування ε' при чисельному інтегруванні рівняння (17) за заданими швидкістю V і кутом γ вступу частинки на поверхню.

Слід зауважити, що до рівняння (17), яке по суті визначає траєкторію руху частинки по поверхні, не входить коефіцієнт тертя f . Це означає, що форма траєкторії не залежить від його значення. Коефіцієнт тертя впливає на величину сили підпору (18), яка змушує частинку рухатися по поверхні.

На рис. 3 зображено циліндричний скребок з поперечним перерізом у вигляді параболи при $a=3$ і побудовано траєкторії руху частинок по ньому, які вступають під різним кутом γ на поверхню.

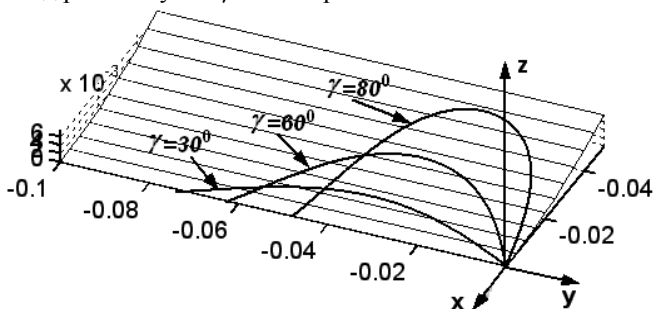


Рисунок 3 – Траєкторії руху частинки по скребку при різних кутах γ її вступу на поверхню і прийнятій швидкості $V=0,18$ м/с

Початкове значення кута ε прийнято рівним $\varepsilon_0=0$, значення швидкості $V=0,18$ м/с взято прийнятною для переміщення скребка згідно з існуючими вимогами.

На рис. 4 показано, як змінюється траєкторія в залежності від зміни швидкості руху скребка. Кут вступу γ частинки взято рівним 60° , $f=0,3$, тривалість руху рівна $0,5$ с для всіх траєкторій.

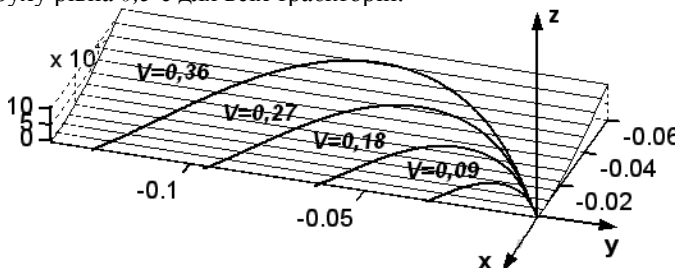


Рисунок 4 – Траєкторії руху частинки по скребку при прийнятих значеннях $a=3$, $\gamma=60^\circ$ і різних швидкостях V

Від значення сталої a залежить форма поверхні скребка. При її збільшенні інтенсивніше зростає кут ε , тобто в порівнянні із площиною поверхня більше від неї відрізняється. На рис. 5 побудовані траєкторії для кутів вступу $\gamma=60^\circ$ і $\gamma=80^\circ$ при взятому значенні $a=100$. Траєкторії побудовані при тривалому часі t , що дає можливість прослідкувати рух частинки після підйому і опускання. Як видно із рис. 5, частинка після опускання знову

починає підйом по симетричній частині поверхні, яка не показана. В цьому випадку працює математична модель за заданими умовами руху частинки по поверхні із сталою швидкістю незалежно від сили, яка її спричинює.

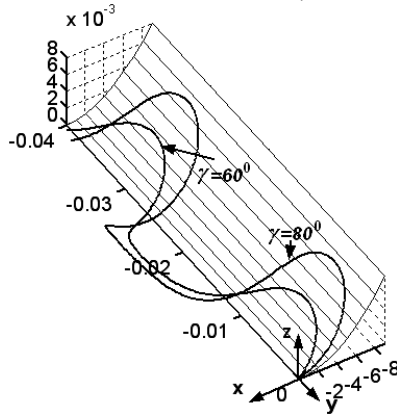


Рисунок 5 – Траєкторії частинки, побудовані для вихідних даних:
 $\varepsilon_0=0$; $a=100$; $V=0,18$ м/с

Рівняння (18), (19) дають можливість побудувати графіки сили підпору $F_n=F(t)$, тиску $N=N(t)$ і сили тертя $F_m=fN(t)$. На рис. 6 ці сили побудовані в залежності від довжини u скребка, що є більш наочним для траєкторії, показаної на рис. 5 при $\gamma=60^\circ$. Маса частинки взята рівною $m=0,001$ кг. Найбільший тиск частинка чинить у найнижчій точці скребка, а найменший – у найвищій. Відповідно змінюється і сила тертя. Що стосується сили підпору, то в певний момент часу вона змінює знак. Це означає, що в цей момент (коли частинка опускається вниз по поверхні) вона має грати роль гальмуючої сили для забезпечення сталої швидкості частинки. Звісно, що при роботі скребка так відбуватися не буде, тому що математична модель не може точно відобразити реальний процес. В реальних умовах на зазначеній ділянці траєкторії частинка, очевидно буде рухатися з деяким прискоренням.

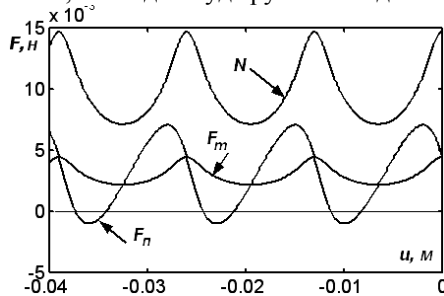


Рисунок 6 – Графіки зміни сил підпору $F_n=F(u)$, тиску $N=N(u)$ і сили тертя $F_m=fN(u)$.

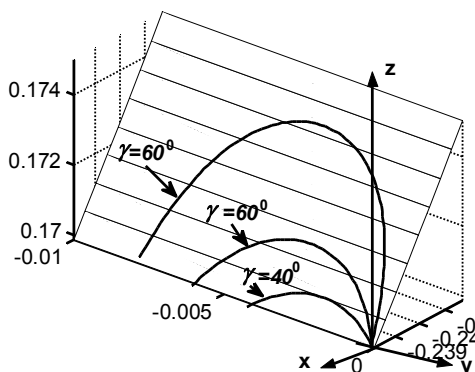


Рисунок 7 – Траєкторії частинки, побудовані для вихідних даних: $\varepsilon_0=55^\circ$; $a=3$; $V=0,15$ м/с.

Скребки для збирання гною встановлюють під певним початковим кутом ε_0 . Експериментальним шляхом було встановлено, що його значення повинно бути рівним $\varepsilon_0=55^\circ$, величина швидкості переміщення скребка $V=0,15$ м/с, кут вступу $\gamma=60^\circ$. На рис. 7 побудовано траєкторії частинки при зазначених вихідних умовах. При цьому частинка піднімається на незначну висоту (до 4 мм), тому в цих межах ділянка поверхні скребка практично є площиною.

Висновки. Розроблена теоретична модель руху частинки гною по поверхні скребка передбачає швидкість переміщення частинки сталою і рівною швидкості переміщення самого скребка у гноєвому каналі. Дослідження показали, що для забезпечення сталої швидкості сила підпору на ділянках опускання частинки вниз має відігравати роль гальмівної сили, оскільки сили тертя недостатньо. В реальній ситуації частинка на зазначених ділянках може рухатися із деяким прискоренням, що відрізняє реальний процес від математично описаного. Проте ці розбіжності не є суттєвими, а наявність математичної моделі дає можливість з'ясувати закономірності утворення траєкторії при різних початкових умовах.

Література

1. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. -К.: УАСХН, 1960. -283 с.
2. *Заика П.М.* Избранные задачи земледельческой механики / П.М. Заика. -К.: Изд-во УСХА, 1992. -507 с.
3. *Войтюк Д.Г.* Знаходження траєкторій руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра при боковій подачі матеріалу / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Вісник Харківського державного технічного

університету сільського господарства. –Вип. 20. ”Механізація сільськогосподарського виробництва”. –Харків, 2003. –С. 91 – 99.

4. *Войтюк Д.Г.* Знаходження траєкторій руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні конуса із вертикальною віссю при боковій подачі матеріалу / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. –К.: НАУ, 2004. –Вип. 72. –С. 226-236.

5. *Пилипака С.Ф.* Розрахунок похилої поверхні скребка гноєприбиральної установки / С.Ф. Пилипака, Г.А. Голуб, В.С. Хмельовський, М.І. Ікальчик // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – Харків, 2013. – Вип. 132. – С. 404 – 410.

Аннотация

Составлены дифференциальные уравнения движения частицы навоза по внутренней поверхности цилиндра с поперечным сечением в виде параболы. Скорость движения частицы принята постоянной, равной скорости перемещения скребка. Уравнение решены численными методами. Построены траектории движения при заданной скорости и различных исходных условиях.

Summary

Differential equations of motion of manure particles on the inner surface of the cylinder cross-section in the form of a parabola are made. The velocity of the particle adopted as a constant equal to the velocity of the scraper. The equations are solved by numerical methods. Trajectory at a given speed and different initial conditions are built.