

## ЗАГАЛЬНІ АСПЕКТИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧОГО ЕЛЕМЕНТА МАШИНИ ТА ОБ'ЄКТА СИРОВИНИ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВА

**В. Кравчук**, д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НААН України,  
**В. Давидюк**, канд. техн. наук,  
*УкрНДПВТ ім. Л. Погорілого*

*У статті конкретизовано загальноовживані поняття та визначення, формалізовано принцип мінімуму взаємодії та закон збереження потужності взаємодії елементів замкненої механічної системи. Формалізовано загальну модель потужності та методи створення аналітичних моделей. Акцентовано, що за дійсної взаємодії елементів варіація потужності має нульове значення, при цьому загальна потужність взаємодії елементів замкненої механічної системи залишається незмінною.*

*Крім того, загальна модель потужності взаємодії елементів замкненої механічної системи формалізовано сукупністю поступальної та відносної компонент, за якою сформульовані методи створення аналітичних моделей.*

**Ключові слова:** *принцип мінімуму взаємодії, закон збереження потужності, модель потужності, методи створення моделей.*

**Актуальність проблеми.** На сьогодні широко відома формалізація взаємодії об'єктів сировини малих розмірів та робочого елемента машини за другим законом Ньютона [1], проте створені за методом Лагранжа [12, 15] аналітичні моделі не є досконалими, оскільки, нехтуючи геометричними параметрами, ми неправомірно позбавляємо об'єкт малих розмірів можливості займати певний простір, тобто ігноруємо об'єктивною формою його існування. А це означає, що відповідні елементи реальної механічної системи не відображаються у свідомості та моделях образами геометричного простору видозміненої перспективи. За відсутності геометричних параметрів матеріальної точки активна та реактивна компонента сили співпадають з траєкторією руху, тому визначати коефіцієнт Лагранжа немає необхідності, оскільки права частина моделей відображає узагальнену побічну дію на досліджуваний об'єкт, ліва – кінематичні компоненти не досліджуваного об'єкта, а точки площини, яка немає нічого спільного з правою.

Тому, **метою наукової роботи** є удосконалення загальних аспектів формалізації взаємодії робочого елемента машини та об'єкта сировини сільськогосподарського виробництва.

**Об'єктом дослідження** є взаємодія робочого елемента машини та об'єкта сировини.

Для цього конкретизуємо поняття та визначення, які використані нами у наступних викладах:

- координатна система з певним масштабом осей та часом, яка пов'язана з тілом відліку, що рухається відносно абсолютної системи поступально, прямолінійно і рівномірно, є інерційна; якщо рух тіла з координатною системою прискорений, то така система приймається за неінерційну [13, 18, 20];

- сукупність робочого елемента машини та об'єкта сировини з властивостями реальних тіл, що безпосередньо взаємодіють в полі земного тяжіння, приймаємо за механічну систему;

- при створенні моделі потужності, невраховані маси елементів механічної системи, які взаємодіють між собою, за Г. Герцом [4], можуть вважатись "прихованими". При цьому конкретні властивості взаємодії між ними відображаються чисельними значеннями, визначеними за емпіричними дослідженнями (прискорення вільного падіння, величина магнітної індукції тощо);

- за конфігурацію механічної системи приймаємо сукупність взаємних положень її елементів, аналітично описаних квазі  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)$  – чи узагальненими  $(q_1, q_2 \dots q_n)$  координатами, значення яких співвідносяться з однозначними положеннями системи;

- система аналітичних моделей є сукупністю нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами, в якій час є незалежним змінним параметром, а квазі- та узагальнені координати елементів механічної системи – залежними змінними, які за сукупністю із крайовими умовами однозначно визначають попередній, теперішній та майбутній стан системи за довільний проміжок часу;

- кінематичні рівняння зв'язку елементів механічної системи є поєднана математичними операторами символічна сукупність не лише геометричних та кінематичних, але й фізико – механічних та інших параметрів, доданих окремою умовою;

- зв'язок елементів механічної системи, за Г. Герцом, вважається голономним

$$df_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_i} dq_i ,$$

якщо всі можливі її положення не залежать від інших координат, при цьому наявність принаймні одного диференціального співвідношення між ними

$$\sum_{i=1}^k a_{ij} dq_i + a_j dt = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

де коефіцієнти  $a_{ij}$  та  $a_j$  є неперервними функціями координат, швидкостей та часу, обумовлює неголономність системи;

– дотик елементів механічної системи, який допускає матеріальну або будь-яку іншу взаємодію фізичної природи виражається в тому, що одній чи декільком парам значень індексів  $i$  та  $j$  узагальнених координат  $q_i$  і  $q_j$  їх диференціали у протилежних напрямках будуть рівні:  $q_i + q_j = 0$ ,

$$dq_i + dq_j = 0;$$

– квазікоординати – є змінні величини, представлені кінематичними рівняннями Ейлера, які відрізняються від кутових швидкостей  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$  тим, що вони не є повними похідними за часом від узагальнених координат;

– деформація, є різниця відносних переміщень точок речовин пружно-в'язких елементів механічної системи.

Результати досліджень свідчать, що відношення прискорень системи тіл, які взаємодіють між собою, залежить від їх мас. За наслідком такої взаємодії, маси елементів механічної системи набувають зворотних прискорень, при цьому відношення модулів цих прискорень у векторній формі аналітично описується співвідношенням [3, 13, 14,]:

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2, \quad (1)$$

де  $m_1, m_2$ ;  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  – маси та прискорення елементів механічної системи.

За методом, запропонованим А. Ейнштейна, співвідношення (1) в загальному представимо в такій формі:

$$m_i \vec{a}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (2)$$

де по  $i$  – му індексу проводиться підсумок від 1 до  $n$ ;

$m_i, \vec{a}_i$  – маса та прискорення елементів механічної системи.

Нехай переміщення елементів механічної системи за проміжок часу  $dt$  обмежені кінематичним зв'язком [19]:

$$dq_i = a_{ij} dq_j + a_i dt, \quad (i = 1, 2, 3 \dots n; j = 1, 2, 3 \dots m) \quad (3)$$

де  $a_{ij}, a_i$  – коефіцієнти, залежні від конфігурації механічної системи та часу.

Тоді за розділенням на  $dt$  та повторним диференціюванням, рівняння (3) набуває вигляду:

$$\ddot{q}_i = a_{ij} \ddot{q}_j. \quad (4)$$

При цьому, варіації прискорень  $\delta \ddot{q}_i$ , сумісні із аналогічними варіаціями прискорень  $\delta \ddot{q}_j$  у певний момент часу ( $\delta t = 0$ ) набувають вигляду:

$$\delta \ddot{q}_i = a_{ij} \delta \ddot{q}_j. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (5)$$

Допускаємо, що координати, швидкість і час не підлягають варіації. Тоді за перемноженням на варіацію прискорень  $\delta \ddot{q}_i$  [21] (метод К. Гауса) співвідношення (2) набуває вигляду:

$$m_i \bar{a}_i \cdot \delta \ddot{q}_i = 0. \quad (6)$$

Підставивши рівняння (5) у вираз (6) запишемо:

$$m_i \bar{a}_i \cdot a_{ij} \delta \ddot{q}_j = 0. \quad (7)$$

За рівнянням (4) частинну похідну представимо в такій формі:

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_j} = a_{ij}. \quad (8)$$

Тоді підставивши вираз (8) у рівняння (7) маємо:

$$m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_j} \cdot \delta \ddot{q}_j = 0. \quad (9)$$

Трансформували вираз  $m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_j}$  у частинну похідну  $\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left( \frac{m_i \bar{a}_i^2}{2} \right)$  співвідношення (9) представимо у такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left( \frac{m_i \bar{a}_i^2}{2} \right) \cdot \delta \ddot{q}_j = 0. \quad (10)$$

Позначивши  $\left( \frac{m_i \bar{a}_i^2}{2} \right)$  символом  $N$  співвідношення (10) набуває наступної конфігурації:

$$\frac{\partial N}{\partial \ddot{q}_j} \cdot \delta \ddot{q}_j = 0, \quad (11)$$

де  $N$  – модель зміни потужності взаємодії елементів механічної системи, яка здійснюється за плинном часу,  $\text{Дж} \cdot \text{с}^{-2}$  або  $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-4}$ ;

$\ddot{q}_j$  – вторинні похідні узагальнених координат.

Із співвідношення (11) випливає формулювання принципу мінімуму взаємодії, суть якого полягає в тому, що *за будь-який проміжок часу істинна взаємодія елементів механічної системи, відрізняється від усіх можливих взаємодій, сумісних із зв'язками, здійснених за початковою конфігурацією та початковими швидкостями, тією властивістю, що при дійсній взаємодії варіація зміни потужності дорівнює нулю.*

(12)

Математично це виразимо рівністю:

$$\delta N = 0, \quad (13)$$

де варіаціям підлягають лише прискорення. Вираз (13) дає критерій, який засвідчує, що для дійсної взаємодії елементів механічної системи варіація зміни потужності взаємодії дорівнює нулю, що є необхідною умовою екстремуму.

Із принципу (12) випливає закон зміни потужності взаємодії елементів механічної системи, суть якого полягає в тому, що *повна зміна потужності взаємодії елементів механічної системи дорівнює сумі змін потужностей кожного із її елементів.*

(14)

Оскільки варіації прискорень  $\delta \ddot{q}_j$  між собою незалежні, то із співвідношення (11) випливає метод створення диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial N}{\partial \ddot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (15)$$

де  $\ddot{q}_j$  – вторинні похідні узагальнених координат.

Якщо функціонування механічної системи описується моделлю зміни потужності  $N$ , створеною квазікоординатами, що характерно для гіроскопів або тіл, які передбачають нерухому точку, метод (15) може бути представлено у такому вигляді:

$$\frac{\partial N}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (16)$$

де  $\dot{q}_j$  – первинні похідні квазікоординат.

Створення диференціальних рівнянь за моделлю зміни потужності  $N$ , утвореною первинними похідними квазі- та вторинними похідними узагальнених координат, може бути здійснено за методом, який впливає із об'єднання методів (15, 16):

$$\frac{\partial N}{\partial f_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (17)$$

де  $f_j$  – первинні похідні  $\dot{q}_j$  квазі- та вторинні похідні  $\ddot{q}_j$  узагальнених координат конфігурації механічної системи.

За теоремою С. Кьоніга [21], загальна модель зміни потужності  $N$  взаємодії елементів замкнутої механічної системи представимо сукупністю поступальної та відносної компонент:

$$N = N_n + N_\omega + N_\omega^{pe}, \quad (18)$$

де  $N_n$  – поступальна компонента зміни потужності,  $кг \cdot м^2 \cdot с^{-4}$ ;

$N_\omega$  – відносна компонента зміни потужності,  $кг \cdot м^2 \cdot с^{-4}$ ,

$N_\omega^{pe}$  – відносна компонента зміни потужності робочого елемента,  $кг \cdot м^2 \cdot с^{-4}$ .

При цьому поступальна компонента загальної моделі зміни потужності  $N$  має вигляд:

$$N_n = \frac{1}{2} m_i (\ddot{\xi}^2 + \ddot{\eta}^2 + \ddot{\zeta}^2), \quad (19)$$

де  $m_i$ ;  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\eta}$ ,  $\ddot{\zeta}$  – відповідно маса та компоненти поступального прискорення елементів механічної системи.

Формулювання принципу мінімуму взаємодії елементів є найбільш загальним визначенням, оскільки охоплює принципи П. Мопертюї, Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, К. Якобі, У. Гамільтона [19], К. Гауса [21], Г. Герца [4] та ін., які сформульовані для одиничного об'єкта. Вони впливають із наведеного принципу при сталому стані механічної системи, тобто за відсутності прискорень взаємодії її елементів.

Крім того, відмінність принципу (12) від принципу Г. Герца полягає в тому, що за Г. Герцом, вільна система знаходиться в стані спокою або рівномірно рухається за інерцією по траєкторії найменшої кривини. Тут зміна руху вільної системи проходить за дією явних чи прихованих зв'язків елементів механічної системи, повнота обґрунтування якого не наведена при формалізації принципу. Отже, принцип Г. Герца охоплює рух вільних систем, елементи яких за посередництвом кінематичного зв'язку, об'єднані в об'єкт одиничних мас, що знаходиться в стані спокою або рівномірному русі.

За принципом У. Гамільтона дія кінетичного потенціалу  $L$  за інтервал часу  $t-t_0$  має стаціонарне значення, який може бути застосований лише для голономних системи [21]. Він частково є аналогом формальної дії рухомого об'єкта, сформульованої Г. Лейбніцем [19], яка в подальшому узагальнена П. Мопертюї як принцип найменшої дії: "Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным"[19].

Наведені аналітичні положення засвідчують, що принцип мінімуму взаємодії елементів замкнутої механічної системи (12) поєднує у єдиному твердженні відомі принципи механіки, основні принципи термодинаміки тощо. Розбіжність наведеного принципу з відомими положеннями полягає в тому, що в ньому час, параметри простору і маса елементів механічної системи поєднані у моделі потужності (18).

Сформульовані положення за своєю сутністю ґрунтуються на загальній теорії відносності [20], суттєва відмінність яких полягає в тому, що за їх посередництвом аналітично зображуються і досліджуються не переміщення об'єктів зі швидкістю світлового променя, а процеси і явища, що протікають в полі земного тяжіння. Це дає можливість розглядати будь-яку взаємодію як взаємодію системи тіл, представлену векторним рівнянням (1) та усуває штучне розділення механіки точки та механіки системи тіл.

Оскільки робота і теплота – це дві форми передачі енергії, а процес виконання роботи зводиться до передачі енергії від одного тіла іншому [22], то за наведеним принципом різниця між кінетичною, потенційною, тепловою та ін. енергіями зникає, про що завбачував Г. Герц [4] і на що орієнтували Л. Больцман, М. Планк та ін. [19]. У принципі (12) вони представлені не тільки **функціями початкового та кінцевого положень**, тобто роботою, але і **функцією стану системи** – прискореною роботою. За вищенаведеним відкривається можливість пояснення наявних в природі різноманітних макро – та мікрофізичних процесів і спонукає до певної корекції наявних домінант в частині зміни їх стану тощо.

Крім того, за принципом (12) формалізовано нові методи створення аналітичних моделей за моделлю потужності взаємодії елементів замкнутої механічної системи. Методи (15, 16, 17) мають простий і компактний вигляд, а їх використання суттєво зменшує математичні викладки, оскільки відпадає необхідність визначати узагальнені сили за принципом можливих переміщень, при цьому створення аналітичних моделей здійснюється тільки за операцією взяття частинної похідної, що є суттєвою перевагою цих методів.

Крім того, вони відкривають можливість створення аналітичних моделей просторової взаємодії елементів довільної механічної системи, оскільки сам принцип ґрунтується на концепції взаємодії рухомих мас, для яких справедливий закон збереження кількості руху системи тіл (1). Методи (15, 16, 17) частково збіжні із методом П. Апеля, суттєва відмінність якого

полягає в тому, що він створений за другим законом Ньютона, сформульованим для інерційної системи координат. Цим методом передбачається використання силової компоненти скалярного характеру, чіткого трактування механічної суті якої до цього часу не наведено.

Основні положення наведеного принципу впливають із загальної теорії відносності [20] та механіки Г. Герца [4] і є наступним її розвитком в частині дослідження просторової взаємодії мас елементів механічної системи, поєднаних кінематичним зв'язком. Методи (15, 16, 17) є необхідною та достатньою умовою створення аналітичних моделей та дослідження характеру взаємодії робочих елементів машин з об'єктами сировини сільськогосподарського виробництва.

### Література

1. Василенко П. М. Введение в земледельческую механику. – К.: Сільгоспосвіта, 1966. – 251 с.
2. Ньютон И. Механические начала натуральной философии: Сборник трудов акад. А. Н. Крылова: В 12 т. – Л.: Из – во АН СССР, 1936. – Т. 7. – 696 с.
3. Даламбер Ж. Динамика. – М., Л.: Гостехиздат, 1950. – 343 с.
4. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: Изд – во АН СССР, 1959. – 386 с.
5. Ермаков В. П. Основные законы механики // Отчет и протоколы физ. – мат. об – ва за 1900 г. – Киев: Тип. Ун – та св. Владимира. – 1901. – С. 15 – 20.
6. Суслов Г. К. Третий закон Ньютона // Отчет и протоколы физ. – мат. об – ва за 1900 г. – Киев: Тип. ун – та св. Владимира. – 1901. – С. 15 – 20.
7. Суслов Г. К. Основные положения динамики // Отчет и протоколы физ. – мат. об – ва за 1900 г. – Киев: Тип. ун – та св. Владимира. – 1901. – С.109 – 123.
8. Шиллер Н. Н. По поводу видоизменения законов Ньютона, предложенного В.П. Ермаковым // Киев: Тип. ун – та св. Владимира. – С. 83 – 92.
9. Шиллер Н. Н. О возможности построения механики масс, не опирающегося на вспомогательное определение силы // Отчет и протоколы физ. – мат. об – ва за 1902 г. – Киев: Тип. ун – та св. Владимира. 1903. – С. 86 – 89.
10. Лангранж Ж. Аналитическая механика: В 2 т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1. – С. 59.
11. Пуанкаре А. Идеи Герца в механике // Г. Герц. Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: Из – во АН СССР, 1959. – С. 310 – 333.
12. Суслов Г.К. Механика Гертца // Доклад, читаний в Киевском физ.-мат. об-ве - Киев: Университетские Из-я. - 1898. – 32 с.
13. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М.:Наука, 1983. – Т. 2. – 640 с.
14. Суслов Г. К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 654 с.
15. Василенко П. М. Основи аналітичних методів землеробської механіки. – К.: Сільгоспосвіта, 1996. – 251 с.



16. Аппель П. Теоретическая механика. – М.: Физматгиз., 1960. – Т. 1.– 515 с; Т. 2. – 487 с.
17. Зверев Г. Я. Физика без механики Ньютона без теории Эйнштейна без принципа наименьшего действия. – М.: Из – во науч. и уч. лит – ри, 2006. – 131 с.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 458 с.
19. Полак Л.С. Вариационные принципы механики их развитие и применение в физике. М.: Гос. из-во физ-мат. лит, 1960. - 599 с.
20. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 694 с; Т.2. – 873 с.
21. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – 331 с.
22. Путилов К. А. Термодинамика. М.: Наука, 1971. 374 с.

### **Аннотация**

*В статье конкретизированы принятые понятия и определения, формализован принцип минимума взаимодействия и закон сохранения мощности взаимодействия элементов замкнутой механической системы. Приведена общая модель мощности и методы создания аналитических моделей. Акцентировано, что при действительном взаимодействии элементов вариация мощности равняется нулю, при этом общая мощность взаимодействия элементов замкнутой механической системы остается неизменной.*

*Кроме того, общая модель мощности взаимодействия элементов замкнутой механической системы формализована совокупностью поступательной и относительной компонент, на основе которой сформулированы методы создания аналитических моделей.*

### **Summary**

*Generally accepted concepts and determinations are particularized in the article, principle of a minimum of interrelation and law of elements interrelation power saving in the closed mechanical system is formalized. The general model of power and methods of creation of analytical models is presented. It is accented, that at actual interworking of elements variation of power equals a zero, with that total power of the closed mechanical system elements interworking remains unchanging.*

*In addition, general model of power of the closed mechanical system elements interworking is formalized by the aggregate of forward and relative component, which the methods of creation of analytical models are formulated on the basis of.*