УДК 631.3.02: 004.358.001.891.57

ДО ФОРМАЛІЗАЦІЇ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧОГО ЕЛЕМЕНТА МАШИНИ ТА ОБ'ЄКТА СИРОВИНИ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВА

В. Кравчук, д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НААН України,
В. Давидюк, канд. техн. наук,
УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого

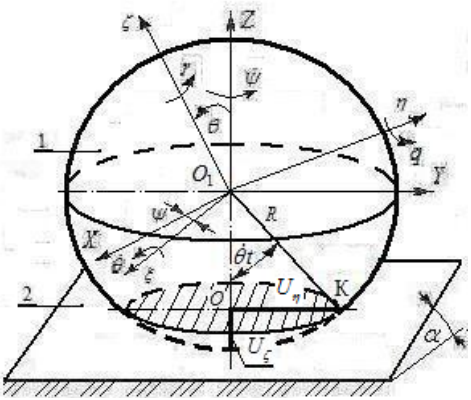
У статті формалізовано деформацію об'єктів сировини сферичної конфігурації та описаного рівнянням еліпсоїда обертання. Наведено модель потужності деформації об'єкта сировини за взаємодією із робочим елементом машини, нахиленим під кутом (α) *до поверхні поля, та система аналітичних моделей для визначення характеру деформації.*

Ключові слова: *деформація об'єкта сировини, модель потужності, аналітичні моделі деформації.*

Розглянемо взаємодію об'єкта сировини сферичної конфігурації із нерухомим робочим елементом, встановленим під кутом α до поверхні поля (рис. 1). Речовина об'єкта сировини під зовнішньою дією земного тяжіння за час дотику з робочим елементом машини набуває зворотного прискорення. При цьому частинки речовини, що рухаються повільно, взаємодіючи з частинками які рухаються швидше, безперервно змінюють свою форму, що обумовлює напружений стан речовини та її пружно–в'язку деформацію. Густину речовини об'єкта приймаємо за однорідну, а пружно–в'язкі властивості мінливі за будь–яким напрямком. Деформацію об'єму об'єкта сировини формалізуємо вектор – функцією $\vec{V} = \vec{V}(t)$, змінною за часом.

В центрі інерції O_1 об'єкта 1 (рис. 1) розмістимо неінерційну систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ (систему широко поширену в теорії гіроскопів), при цьому осі $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$ сумістимо з головними осями інерції, а вісь $O_1\xi$ направимо по лінії вузлів, тобто по лінії перетину площин $\zeta O_1\xi$ та $ZO_1\xi$. Крім того, в центрі інерції зерна 1 розмістимо інерційну систему координат O_1XYZ, так щоб вісь O_1X була паралельна, а вісь O_1Z – перпендикулярна до похилої поверхні робочого елемента. Символом θ позначимо кут між площинами $ZO_1\xi$ і $\zeta O_1\xi$, ψ – кут утворений площинами ZO_1X та $ZO_1\xi$. При такому розміщенні систем відліку кути θ і ψ будуть визначати

положення неінерційної системи координат $O_1\xi\eta\zeta$ відносно інерційної O_1XYZ.



1, 2 – відповідно об'єкт сировини та похила поверхня робочого елемента машини; U_η, U_ζ, R *– компоненти деформації та радіус об'єкта сировини;* O_1XYZ, $O_1\xi\eta\zeta$ *– інерційна та неінерційна системи координат*

Рисунок 1 – **Розрахункова схема деформації об'єкта сировини сферичної конфігурації**

Розглянемо випадок коли кут $\alpha = 0$. Припускаємо, що за дією земного тяжіння падіння об'єкта сировини на поверхню робочого елемента характеризується деформацією об'єму як у площині ZO_1X, так і у площині XO_1Y. Враховуючи сферичну конфігурацію об'єкта сировини, радіус U_η площі деформації виразимо через його радіус R та кут $\dot{\theta}t$ (рис. 1):

$$U_\eta = R\sin\dot{\theta}t\,, \tag{1}$$

де R – радіус об'єкта сировини сферичної конфігурації, *мм*;

$\dot{\theta}t$ – кут, утворений площинами XO_1O та XO_1M.

Тоді рівняння площі круга деформації об'єму об'єкта сировини набуває вигляду:

$$S = \pi R^2 \sin^2\dot{\theta}t\,, \tag{2}$$

де $\pi = 3.14$ – відношення довжини кола деформації до його діаметру.

Використавши рівняння (2) та схему (рис. 1) рівняння об'єму, що деформується, формалізуємо співвідношенням:

$$V = \pi R^2 \sin^2 \dot{\theta} t U_\zeta , \tag{3}$$

де V – об'єм, що деформується за дією земного тяжіння, $мм^3$.

U_ζ – параметр проникнення деформації в середину об'єкта сировини, мм.

Швидкість деформації об'єму визначимо за методом диференціювання виразу (3) за часом:

$$\dot{V} = 2\pi R^2 \dot{\theta} \sin \dot{\theta} t \cos \dot{\theta} t U_\zeta + \pi R^2 \sin^2 \dot{\theta} t \dot{U}_\zeta . \tag{4}$$

За повторним диференціюванням виразу (4) рівняння прискореного деформування об'єму об'єкта сировини набуває вигляду:

$$\ddot{V} = 2\pi R^2 \ddot{\theta} \sin \dot{\theta} t \cos \dot{\theta} t U_\zeta + 2\pi R^2 \dot{\theta}^2 U_\zeta (\cos^2 \dot{\theta} t - \sin^2 \dot{\theta} t) + 4\pi R^2 \dot{\theta} \dot{U}_\zeta \times$$
$$\times \sin \dot{\theta} t \cos \dot{\theta} t + \pi R^2 \ddot{U}_\zeta \sin^2 \dot{\theta} t . \tag{5}$$

Розділивши на $\pi R^2 \sin^2 \dot{\theta} t$ компоненти рівняння (5) набувають форми:

$$\ddot{V} = 2\ddot{\theta} ctg \dot{\theta} t U_\zeta + 2\dot{\theta}^2 U_\zeta (ctg^2 \dot{\theta} t - 1) + 4\dot{\theta} \dot{U}_\zeta ctg \dot{\theta} t + \ddot{U}_\zeta \tag{6}$$

Результати аналізу компонент рівняння (6) свідчать, що характер деформування об'єму об'єкта сировини за дією зовнішніх чинників залежить від величини доцентрової компоненти кутового прискорення та добутку кутової і поступальної швидкостей деформації. Фізична сутність названих компонент полягає в тому, що вони мають змінний характер і формалізують пружні та в'язкі властивості об'єму об'єкта сировини в залежності від його конфігурації. Формалізацію компонент швидкостей переміщення та деформування об'єкта сировини здійснимо за системою рівнянь кінематичного зв'язку абсолютно твердих тіл [1], яку у загальному представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi} + \dot{V}_\xi + q(\zeta - V_\zeta) - r(\eta - V_\eta) = \dot{X}_\xi ; \\
&\dot{\eta} + \dot{V}_\eta + r(\xi - V_\xi) - p(\zeta - V_\zeta) = \dot{Y}_\eta ; \\
&\dot{\zeta} + \dot{V}_\zeta + p(\eta - V_\eta) - q(\xi - V_\xi) = \dot{Z}_\zeta ,
\end{aligned} \tag{7}$$

де ξ, η, ζ; $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; p, q, r – відповідно координати поверхні, компоненти поступальної та кутової швидкостей об'єкта сировини, *мм*, c^{-1};

V_ξ, V_η, V_ζ; $\dot{V}_\xi$, $\dot{V}_\eta$, $\dot{V}_\zeta$ – компоненти деформації та швидкості деформації об'єму за напрямками осей $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$;

$\dot{X}_\xi, \dot{Y}_\eta, \dot{Z}_\zeta$ – компоненти швидкості зовнішніх чинників в неінерційній системі координат $O_1\xi\eta\zeta$, які визначимо за системою рівнянь ортогонального перетворення [1]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_\xi &= a_{11}\dot{X} + a_{21}\dot{Y} + a_{31}\dot{Z}; \\ \dot{Y}_\eta &= a_{12}\dot{X} + a_{22}\dot{Y} + a_{32}\dot{Z}; \\ \dot{Z}_\zeta &= a_{13}\dot{X} + a_{23}\dot{Y} + a_{33}\dot{Z}, \end{aligned} \tag{8}$$

в якій a_{ij} $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ – напрямні косинуси кутів Ейлера;

$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ – компоненти швидкості зовнішніх чинників в інерційній системі координат O_1XYZ.

Припускаємо, що за дією земного тяжіння об'єкт сировини вільно падає на поверхню робочого елемента, при цьому координати його дотику в загальному випадку формалізуємо рівнянням [3]:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{gt^2}{2} \right)^2, \tag{9}$$

де X, Y, Z; g, t – відповідно координати дотику об'єкта сировини із робочим елементом машини, прискорення земного тяжіння та час падіння в інерційній системі координат O_1XYZ.

Компоненти кутової швидкості p, q, r об'єкта сировини у системі рівнянь (7) формалізуємо кінематичними рівняннями Ейлера [2]:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

де θ, φ; $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ – відповідно кути Ейлера та компоненти кутової швидкості: нутації, прецесії та власного обертання об'єкта сировини .

Компоненти прискореного руху та прискореної деформації пружно – в'язкого об'єкта сировини за дією зовнішніх чинників за напрямками осей системи $O_1\xi\eta\zeta$ із врахуванням її обертання в загальному формалізуємо системою рівнянь [1]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi} + \ddot{V}_\xi + Q(\dot{\zeta} - \dot{V}_\zeta) - R(\dot{\eta} - \dot{V}_\eta) = \ddot{X}_\xi;\\
&\ddot{\eta} + \ddot{V}_\eta + R(\dot{\xi} - \dot{V}_\xi) - P(\dot{\zeta} - \dot{V}_\zeta) = \ddot{Y}_\eta;\\
&\ddot{\zeta} + \ddot{V}_\zeta + P(\dot{\eta} - \dot{V}_\eta) - Q(\dot{\xi} - \dot{V}_\xi) = \ddot{Z}_\zeta,
\end{aligned} \qquad (11)$$

де $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ – компоненти поступальної швидкості та прискорення центра інерції об'єкта сировини, $мм \cdot с^{-1}$, $мм \cdot с^{-2}$;

$\ddot{V}_\xi$, $\ddot{V}_\eta, \ddot{V}_\zeta$ – компоненти прискорення деформації об'єму об'єкта сировини за напрямками осей $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$;

P, Q, R – компоненти швидкості обертання координатної системи $O_1\xi\eta\zeta$ визначаються за кінематичними рівняннями Ейлера при $\varphi = 0$ [2].

$$P = \dot{\theta};\ Q = \dot{\psi}\sin\theta;\ R = qctq\theta. \qquad (12)$$

Компоненти прискорення $(\ddot{X}_\xi, \ddot{Y}_\eta, \ddot{Z}_\zeta)$ за дією зовнішніх чинників визначимо за системою рівнянь [1]:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_\xi &= a_{11}\ddot{X} + a_{21}\ddot{Y} + a_{31}\ddot{Z};\\
\ddot{Y}_\eta &= a_{12}\ddot{X} + a_{22}\ddot{Y} + a_{32}\ddot{Z};\\
\ddot{Z}_\zeta &= a_{13}\ddot{X} + a_{23}\ddot{Y} + a_{33}\ddot{Z},
\end{aligned} \qquad (13)$$

де a_{ij} $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ – напрямні косинуси кутів Ейлера [2];

$\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ – компоненти прискорення зовнішніх чинників в інерційній системі координат O_1XYZ, які визначимо за методом повторного диференціювання системи рівнянь (9), представленої у параметричній формі в кожному конкретному випадку конфігурації механічної системи.

Оскільки падіння об'єкта сировини сферичної конфігурації здійснюється на абсолютно тверду горизонтальну поверхню робочого елемента машини, то за відсутності обертання системи координат $O_1\xi\eta\zeta$ прискорення поступального руху об'єму об'єкта сировини за напрямком осі $O_1\zeta$, із врахуванням прискореної деформації, за системою рівнянь (11) формалізуємо рівнянням:

$$\ddot{\zeta} = -[2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta + 2\dot{\theta}^2U_\zeta(ctg^2\dot{\theta}t - 1) + 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + \ddot{U}_\zeta] + g\,. \qquad (14)$$

Використавши рівняння (14) зміни потужності деформації об'єкта сировини сферичної конфігурації представимо аналітичною моделлю:

$$N = \frac{1}{2}m\{(2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta)^2 - 4\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta[-2\dot{\theta}^2U_\zeta(ctg^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t - \ddot{U}_\zeta +$$

$$+ g] + (\ddot{U}_\zeta)^2 - 2\ddot{U}_\zeta[-2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g]\,, \qquad (15)$$

де m – маса об'єкта сировини, *кг*.

За незалежні параметри приймаємо компоненти:

– кутового прискорення деформації об'єкта сировини за зміною кута $\dot{\theta}t$ між площинами $ZO_1\xi$ і $\zeta O_1\xi$;

– поступального прискорення деформації об'єкта сировини за напрямком осі $O_1\zeta$.

Тоді за методом [4] деформацію об'єкта сировини сферичної конфігурації формалізуємо системою диференціальних рівнянь:

$$\ddot{\theta}(2ctg\dot{\theta}tU_\zeta)^2 - 2ctg\dot{\theta}tU_\zeta[-2\dot{\theta}^2U_\zeta(ctg^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t - \ddot{U}_\zeta + g] = 0\,;$$

$$\ddot{U}_\zeta - [-2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g] = 0. \qquad (16)$$

Після спрощення система рівнянь (16) набуває форми:

$$\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2(ctg\dot{\theta}t - tg\dot{\theta}t) - 2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta/U_\zeta - \ddot{U}_\zeta tg\dot{\theta}t/2U_\zeta + g\,tg\dot{\theta}t/2U_\zeta\,;$$

$$\ddot{U}_\zeta = -2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g. \qquad (17)$$

Для виключення вторинної похідної $\ddot{U}_\zeta$ із першого рівняння системи (17) створимо рівняння геометричного зв'язку. Для цього деформацію U_ζ об'єму об'єкта сировини виразимо через радіус R та кут $\dot{\theta}t$ (рис. 1):

$$R - U_\zeta = R\cos\dot{\theta}t\,, \tag{18}$$

За методом диференціювання виразу (18) запишемо:

$$\dot{U}_\zeta = R\dot{\theta}\sin\dot{\theta}t\,. \tag{19}$$

Після повторного диференціюванням виразу (19) маємо:

$$\ddot{U}_\zeta = R\ddot{\theta}\sin\dot{\theta}t + R\dot{\theta}^2\cos\dot{\theta}t\,. \tag{20}$$

Підставивши вираз (20) у перше рівняння системи (17) після спрощення запишемо:

$$\ddot{\theta} = [-2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta / U_\zeta - \dot{\theta}^2(ctg\dot{\theta}t - tg\dot{\theta}t + R\dot{\theta}^2\sin\dot{\theta}t / 2U_\zeta) + g\,tg\dot{\theta}t / 2U_\zeta]/(1 +$$

$$+ R\sin\dot{\theta}ttg\dot{\theta}t / 2U_\zeta)\,;$$

$$\ddot{U}_\zeta = -2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g. \tag{21}$$

Оскільки падіння об'єкта сировини сферичної конфігурації відбувається на поверхню робочого елемента машини, встановлену під кутом α до горизонту, то за дією земного тяжіння його об'єм деформується як за напрямком осі $O_1\xi$, так і за напрямком $O_1\zeta$ (рис. 1). Тоді система рівнянь (21), яка описує деформацію об'єму за напрямком осі $O_1\xi$, набуває форми:

$$\ddot{\theta} = [-2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta / U_\zeta - \dot{\theta}^2(ctg\dot{\theta}t - tg\dot{\theta}t + R\dot{\theta}^2\sin\dot{\theta}t / 2U_\zeta) + g\ \ tg\dot{\theta}t\sin\alpha / 2U_\zeta]/(1 +$$

$$+ R\sin\dot{\theta}t\ tg\dot{\theta}t / 2U_\zeta)\,;$$

$$\ddot{U}_\zeta = -2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g\sin\alpha. \tag{22}$$

Аналогічно за напрямком осі $O_1\zeta$:

$$\ddot{\theta} = [-2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta / U_\zeta - \dot{\theta}^2(ctg\dot{\theta}t - tg\dot{\theta}t + R\dot{\theta}^2\sin\dot{\theta}t / 2U_\zeta) + g\ \ tg\dot{\theta}t\cos\alpha / 2U_\zeta]/(1 +$$

$$+ R\sin\dot{\theta}ttg\dot{\theta}t / 2U_\zeta)\,;$$

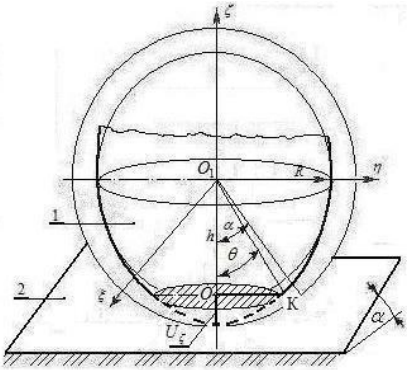
$$\ddot{U}_\zeta = -2\ddot{\theta}ctg\dot{\theta}tU_\zeta - 2\dot{\theta}^2U_\zeta(\cos^2\dot{\theta}t - 1) - 4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta ctg\dot{\theta}t + g\cos\alpha. \qquad (23)$$

За попереднім аналізом сутності наведених положень можна констатувати, що символ маси розміщений як у лівій, так і в правій частині системи рівнянь (22, 23). Це засвідчує, що маса є складовою частиною пружних та в'язких властивостях об'єктів сировини сільськогосподарського виробництва. За скороченням маси система рівнянь (22, 23) аналітично відображає деформування об'єкта сировини сферичної конфігурації одиничної маси з радіусом R, при цьому величина деформації і характер графічних залежностей швид-ко трансформуються з плином часу. Вираз (15) та системи рівнянь (22, 23) повністю характеризують деформацію об'єкта сировини при взаємодії із робочим елементом машини, встановленим під кутом α до горизонту (рис. 1).

Далі, розглянемо деформацію частини об'єкта сировини за конфігурацією еліпсоїда обертання при падінні на поверхню робочого елемента машини. В цьому випадку конфігурацію об'єкта сировини представимо рівнянням еліпсоїда обертання [3]:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{h^2} + \frac{\zeta^2}{R^2} = 1, \qquad (24)$$

де R, h; ξ, η, ζ – відповідно радіус та висота еліпсоїдної частини зерна, координати його поверхні.



1, 2 – відповідно еліпсоїдна частина об'єкта сировини та похила поверхня робочого елемента машини; U_ζ – компонента деформації; R, h – радіус та висота об'єкта сировини; , $O_1\xi\eta\zeta$ – неінерційна системи координат

Рисунок 2 – **Схема деформації об'єкта сировини за конфігурацією еліпсоїда обертання:**

За схемою (рис. 2) рівняння (24) представимо у параметричній формі:

$$\begin{aligned} \zeta &= h\cos\alpha; \\ \xi &= \eta = R\sin\alpha, \end{aligned} \tag{25}$$

де α і θ - параметри поверхні еліпсоїда обертання.

Оскільки параметри α і θ знаходяться у відношенні

$$\frac{R}{h} = \frac{ctg\theta}{ctg\alpha}, \tag{26}$$

то звівши рівняння (26) до квадрату маємо:

$$\frac{R^2}{h^2} = \frac{ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha}. \tag{27}$$

Оскільки $ctg\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, то рівняння (27) набуває вигляду:

$$\frac{R^2}{h^2} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\left(\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\right)^{-1}. \tag{28}$$

Провівши у рівнянні (28) певні перетворення, запишемо:

$$\frac{R^2\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.$$

І далі, за перетвореннями

$$R^2\cos^2\alpha = h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos^2\alpha;$$

$$R^2\cos^2\alpha + h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos^2\alpha = h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta};$$

$$\cos^2\alpha\left(R^2 + h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta};$$

$$\cos^2\alpha = h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} : \left(R^2 + h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right);$$

$$\cos^2\alpha = h^2\cos^2\theta : \left(R^2 + h^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\sin^2\theta;$$

$$\cos^2\alpha = h^2\cos^2\theta : \left(R^2\sin^2\theta + h^2\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{h^2\cos^2\theta}{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{h^2\cos^2\theta}{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}}$$

остаточно запишемо:

$$\cos\alpha = \frac{h\cos\theta}{\sqrt{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}}. \qquad (29)$$

Тоді за виразом (29) перше рівняння (25) набуває форми:

$$\zeta = \frac{h^2\cos\theta}{z}, \qquad (30)$$

де $z = \sqrt{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}$

Аналогічно із рівності (26) знаходимо вираз для $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{R\sin\theta}{\sqrt{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}}. \qquad (31)$$

Підставивши (31) в друге рівняння (25) запишемо:

$$\xi = \eta = \frac{R^2\sin\theta}{z}. \qquad (32)$$

Тоді рівняння площі деформації об'єму об'єкта сировини за конфігурацією еліпсоїда обертання (рис.2) набуває вигляду:

$$S = \pi R^4\frac{\sin^2\theta}{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}, \qquad (33)$$

де $\pi = 3{,}14$ – відношення довжини кола деформації до його діаметру.

Використавши рівняння (33) та схему (рис. 2) об'єм об'єкта сировини, що деформується за дією земного тяжіння, формалізуємо співвідношенням:

$$V = \pi R^4 \frac{\sin^2\theta U_\zeta}{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta}, \tag{34}$$

де V – об'єм зерна, що деформується за дією земного тяжіння;

U_ζ – параметр проникнення деформації в середину об'єкта сировини, мм.

Швидкість деформації об'єму зерна визначимо за методом диференціювання виразу (34) за часом:

$$\dot{V} = \pi R^4 \frac{(2\dot{\theta}U_\zeta \sin\theta\cos\theta + \dot{U}_\zeta \sin^2\theta)(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - \sin^2\theta U_\zeta 2\dot{\theta}\times}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2}$$

$$\underline{\times \sin\theta\cos\theta(R^2 - h^2)}; \tag{35}$$

За повторним диференціюванням виразу (35) після спрощення рівняння прискорення деформації об'єму зерна набуває вигляду:

$$\ddot{V} = \pi R^4 \frac{\{[2\ddot{\theta}U_\zeta \sin\theta\cos\theta + 2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin\theta\cos\theta + 2\dot{\theta}^2 U_\zeta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) +}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^4}$$

$$\underline{+\ddot{U}_\zeta \sin^2\theta 2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin\theta\cos\theta](R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) + (2\dot{\theta}U_\zeta \sin\theta\cos\theta +}$$

$$\underline{+\dot{U}_\zeta \sin^2\theta)2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta(R^2 - h^2) - \sin^2\theta U_\zeta 2\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta(R^2 - h^2) -}$$

$$\underline{-2\dot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin^2\theta\sin\theta\cos\theta(R^2 - h^2) - 4\dot{\theta}^2 U_\zeta \sin^2\theta\cos^2\theta(R^2 - h^2) - 2\dot{\theta}^2 U_\zeta \times}$$

$$\underline{\times \sin^2\theta\cos^2\theta(R^2 - h^2) + 2\dot{\theta}^2 U_\zeta \sin^4\theta(R^2 - h^2)\}(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2 -}$$

$$\underline{-[(2\dot{\theta}U_\zeta \sin\theta\cos\theta + \dot{U}_\zeta \sin^2\theta)(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - 2\dot{\theta}U_\zeta \sin^2\theta\sin\theta\cos\theta\times}$$

$$\underline{\times (R^2 - h^2)]4\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta(R^2 - h^2)} \tag{36}$$

Після спрощення

$$\ddot{V} = \frac{\ddot{U}_\zeta \sin^2\theta}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} + \frac{2\ddot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin\theta\cos\theta[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - \sin^2\theta(R^2 -}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2}$$

$$\frac{-h^2)]}{} + \frac{4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin\theta\cos\theta[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2 - \sin^2\theta(R^2 - h^2)] +}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^3}$$

$$\frac{+ 2\dot{\theta}^2 U_\zeta\{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - \sin^2\theta(R^2 - h^2)](R^2\sin^2\theta +}{}$$

$$\frac{+ h^2\cos^2\theta)^2 - 4(R^2 - h^2)\sin^2\theta\cos^2\theta[1 - \sin^2\theta(R^2 - h^2)]\}}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^4}$$

та позначеннями

$$D_1 = \frac{2U_\zeta \sin\theta\cos\theta[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - \sin^2\theta(R^2 - h^2)]}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2};$$

$$D_2 = \frac{2\dot{\theta}^2 U_\zeta\{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) - \sin^2\theta(R^2 - h^2)](R^2\sin^2\theta +}{}$$

$$\frac{+ h^2\cos^2\theta)^2 - 4(R^2 - h^2)\sin^2\theta\cos^2\theta[1 - \sin^2\theta(R^2 - h^2)]\}}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^4};$$

$$D_3 = \frac{4\dot{\theta}\dot{U}_\zeta \sin\theta\cos\theta[(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2 - \sin^2\theta(R^2 - h^2)]}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^3};$$

$$D_4 = \frac{\sin^2\theta}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)}$$

вираз (36) представимо у наступній формі:

$$\ddot{V} = \ddot{\theta}D_1 + D_2 + D_3 + \ddot{U}_\zeta D_4 . \qquad (37)$$

Припускаємо, що падіння об'єкта сировини за формою еліпсоїда обертання здійснюється на абсолютно тверду горизонтальну поверхню робочого елемента машини. Тоді за відсутності обертання системи координат

$O_1\xi\eta\zeta$ прискорення поступального руху у площині XO_1Y із врахуванням деформації об'єму об'єкта сировини формалізуємо рівнянням:

$$\ddot{\zeta} = -\ddot{\theta}D_1 - D_2 - D_3 - \ddot{U}_\zeta D_4 + g \,. \tag{38}$$

Використавши рівняння (38) модель зміни потужності деформації об'єкта сировини за формою еліпсоїда обертання формалізуємо аналітичним виразом:

$$N = \frac{1}{2}m[(\ddot{\theta}D_1)^2 - 2\ddot{\theta}D_1(-D_2 - D_3 - \ddot{U}_\zeta D_4 + g) + (\ddot{U}_\zeta D_4)^2 - 2\ddot{U}_\zeta D_4(-\ddot{\theta}D_1 -$$
$$-D_2 - D_3 + g)] \,. \tag{39}$$

За методом [4] систему диференціальних рівнянь, яка описує деформацію об'єкта сировини за формою еліпсоїда обертання, представимо в наступному вигляді:

$$\ddot{\theta}D_1^2 - D_1(-D_2 - D_3 - \ddot{U}_\zeta D_4 + g) = 0 \,;$$
$$\ddot{U}_\zeta D_4^2 - D_4(-\ddot{\theta}D_1 - D_2 - D_3 + g) = 0 \,. \tag{40}$$

Після спрощення система рівнянь (40) набуває форми:

$$\ddot{\theta} = (-D_2 - D_3 - \ddot{U}_\zeta D_4 + g)/D_1 \,;$$
$$\ddot{U}_\zeta = (-\ddot{\theta}D_1 - D_2 - D_3 + g)/D_4 \,. \tag{41}$$

Для виключення вторинної похідної деформації $\ddot{U}_\zeta$ з першого рівняння (41) створимо рівняння геометричного зв'язку. Для цього деформацію об'єму об'єкта сировини за зовнішньою дією робочого елемента машини виразимо через радіус R зерна та кут θ (рис. 2):

$$h - U_\zeta = \frac{h^2 \cos\theta}{z} \,. \tag{42}$$

За методом диференціювання виразу (42) швидкість деформації опишемо виразом:

$$\dot{U}_\zeta = \frac{-\sin\theta\dot{\theta}h^2\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} - h^2\cos\theta\dot{\theta}(R^2 - h^2)\sin\theta\cos\theta)}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} \quad (43)$$

Після повторного диференціюванням виразу (43) та спрощення прискорення деформації набуває вигляду:

$$\ddot{U}_\zeta = \frac{\ddot{\theta}h^2[-\sin\theta\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} - \cos\theta(R^2 - h^2)\cos\theta\sin\theta)] +}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)}$$

$$\frac{+\dot{\theta}^2h^2\cos\theta\{[-\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} + (R^2 - h^2)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)](R^2\sin^2\theta +}$$

$$\frac{+h^2\cos^2\theta) + 2\sin^2\theta(R^2 - h^2)[\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} + \cos^2\theta(R^2 - h^2)]\}}{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^2} \quad (44)$$

За позначеннями

$$D_5 = -h^2[\sin\theta\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} + \cos\theta(R^2 - h^2)\cos\theta\sin\theta](R^2\sin^2\theta +$$
$$+ h^2\cos^2\theta)^{-1};$$
$$D_6 = \dot{\theta}^2h^2\cos\theta\{[-\sqrt{(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)} + (R^2 - h^2)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)]\times$$
$$\times(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta) + 2\sin^2\theta(R^2 - h^2)[\sqrt{R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta} + \cos^2\theta(R^2 -$$
$$- h^2)]\}(R^2\sin^2\theta + h^2\cos^2\theta)^{-2}$$

вираз (44) набуває форми:

$$\ddot{U}_\zeta = \ddot{\theta}D_5 + D_6 . \quad (45)$$

Підставивши вираз (45) у перше рівняння системи (41) після спрощення запишемо:

$$\ddot{\theta} = [D_2/D_1 - D_3/D_1 - D_6D_4/D_1 + g/D_1]/(1 + D_5D_4/D_1);$$
$$\ddot{U}_\zeta = (-\ddot{\theta}D_1 - D_2 - D_3 + g)/D_4 . \quad (46)$$

Якщо об'єкт сировини за формою еліпсоїда обертання падає на поверхню робочого елемента машини, встановлену під кутом α до горизонту, то за дією земного тяжіння деформація його об'єму відбувається

як за напрямком осі $O_1\xi$, так і за напрямком $O_1\zeta$ (рис. 2). Тоді система рівнянь (46), яка описує деформацію об'єму за напрямком осі $O_1\xi$, набуває форми:

$$\ddot{\theta} = [D_2 / D_1 - D_3 / D_1 - D_6 D_4 / D_1 + g \sin\alpha / D_1] / (1 + D_5 D_4 / D_1);$$
$$\ddot{U}_\zeta = (-\ddot{\theta} D_1 - D_2 - D_3 + g \sin\alpha) / D_4. \qquad (47)$$

Аналогічно у площині $O_1\zeta$:

$$\ddot{\theta} = [D_2 / D_1 - D_3 / D_1 - D_6 D_4 / D_1 + g \cos\alpha / D_1] / (1 + D_5 D_4 / D_1);$$
$$\ddot{U}_\zeta = (-\ddot{\theta} D_1 - D_2 - D_3 + g \cos\alpha) / D_4. \qquad (48)$$

За вищенаведеним можна констатувати, що формалізація пружно–в'язкої деформації об'єму об'єкта сировини за формою еліпсоїда обертання аналітично набагато складніша по відношенню до опису деформації об'єму об'єкта сировини сферичної конфігурації.

Пружні та в'язкі властивості об'єму об'єкта сировини, які представлені першими та другими компонентами систем рівнянь (47) та (48), мають змінний характер, що суттєво впливає на характер деформування речовини. Для дослідження характеру пружних та в'язких властивостей об'єкта сировини необхідно в системі рівнянь (47, 48) задавати початкові значення кутової швидкості $\dot{\theta}$ розмірністю c^{-1}, яка у рівняннях відображає параметр розсіювання зовнішньої дії.

Крім того, наведене відкриває широкі можливості аналітичного представлення деформації об'єктів сировини сільськогосподарського виробництва під час взаємодії із робочим елементом машини не за функцією початкового та кінцевого положень, а за функцією стану системи – прискореною роботою. При цьому значення пружно – в'язкої деформації зерна, визначене за теоретичними моделями (47,48), порівнюється з граничним, визначеним в процесі навантаження лабораторними пристроями.

Література

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 654 с.

2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – 331 с.

3. Бугров Я.С., Никольский. Елементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебное пособие. М.: Наука, 1984. 190 с.

4. Кравчук В.І., Давидюк В. П. Загальні аспекти формалізації взаємодії робочого елемента машини та об'єкта сировини сільськогосподарського

виробництва // Техніко – технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України: Зб. наук. праць УкрНДІПВТ. Дослідницьке, 2013.

5. Кравчук В., Давидюк В. Фундаментальні аспекти створення аналітичних моделей взаємодії робочого елемента машини та об'єкта сировини. Техніка і технології АПК. – № 1, – 2011.

Аннотация

В статье формализирована деформация объектов сырья сферической конфигурации и описанного уравнением эллипсоида вращения. Приведена модель мощности деформации объекта сырья при взаимодействии с рабочим элементом машины, наклоненным под углом (α) к поверхности поля и система аналитических моделей для определения характера деформации

Summary

Deformation of objects of raw material of spherical configuration and described by equalization of ellipsoid rotation is formalized in the article. The model of power of deformation of object of raw material while interworking with the working element of machine, inclined under a corner (α) to the surface of the field and system of analytical models for determination of character of deformation is presented.