

КОВЗАННЯ ЧАСТИНКИ ПО ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ, ВСІ ТОЧКИ ЯКОЇ ЗДІЙСНЮЮТЬ ПОСТУПАЛЬНІ КОЛИВАННЯ У ВЕРТИКАЛЬНИХ ПЛОЩИНАХ, ПАРАЛЕЛЬНИХ ГОРИЗОНТАЛЯМ ПОХИЛОЇ ПЛОЩИНИ

М. Клендій, канд. техн. наук, доцент

Бережанський агротехнічний інститут НУБІП України

Складено диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по шорсткій похилій площині, кожна точка якої в коливальному русі описує еліпс. Вказані коливання похилої площини відбуваються у вертикальних площинах, паралельних до горизонталей похилої площини. Розглянуто часткові випадки, коли півосі еліпса рівні або одна із півосей дорівнює нулю. Диференціальні рівняння розв'язані чисельними методами. Зроблено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: *похила площина, поступальні вертикальні коливання, відносна траєкторія, диференціальні рівняння.*

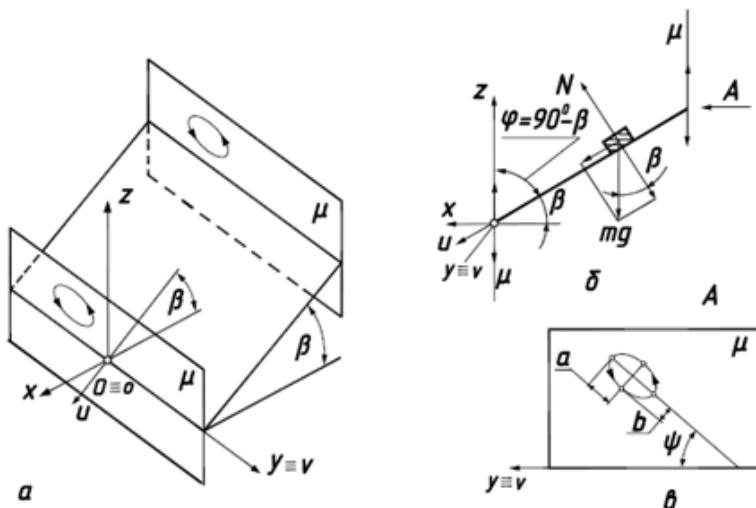
Суть проблеми. Похила площина є універсальним конструкційним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. По ній в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинки по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рухи. Для похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в горизонтальному напрямі, в напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. При криволінійних коливаннях площини, коли всі її точки описують еліпси, а сама площина має нахил, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.Є. Жуковським в геометричній інтерпретації [2], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І.І.Блехманом [3,4]. П.М. Василенко диференціальні рівняння руху частинки складав у проекціях на осі рухомої системи координат, жорстко прив'язаної до площини, що коливається, а І.І.Блехман - у проекціях на осі нерухомої системи координат. П.М. Заїка розглядав переміщення частинок по робочих площинах вібраційних зерночисних машин [5]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює горизонтальні поступальні коливання по різних кривих, розглянуто в праці [6]. В праці [7] запропоновано узагальнену модель коливання площини, яка може бути як

горизонтальною, так і похилою, здійснюючи еліптичні, колові, зворотно-поступальні коливання в залежності від заданих конструкційних параметрів.

Мета дослідження – вивчити закономірності руху матеріальних частинок по шорсткій похилій площині, яка здійснює поступальні еліптичні коливання у вертикальному напрямі, включаючи колові та зворотно-поступальні.

Виклад основного матеріалу. Розташуємо площину так, щоб вона була нахилена до горизонту під кутом β (рис. 1). Відносний рух частинки здійснюватиме по похилій площині, в якій розташуємо плоску систему координат oiv так, щоб вісь oi була спрямована по лінії найбільшого нахилу.



- а) взаємне розташування рухомої системи координат oiv і нерухомої $Oxyz$ в початковий момент, коли їх початки координат збігаються;
 б) положення частинки на площині, коли вона проєкціюється в пряму;
 в) розташування еліпса – траєкторії еліптичних коливань похилої площини

Рисунок 1 – До розгляду руху частинки по похилій площині, всі точки якої при коливаннях описують еліпси в паралельних вертикальних площинах

Похила площина разом із плоскою системою координат здійснює коливання таким чином, що всі точки площини описують еліпси з півосями a і b в паралельних вертикальних площинах μ . Площини μ паралельні до осі ov , яка є горизонталлю похилої площини. Абсолютний рух частинки будемо розглядати по відношенню до нерухомої системи координат $Oxyz$, у якій вісь Oy збігається із віссю ov , а між похилою площиною oiv і координатною горизонтальною площиною Oxy існує кут β . Початок рухомої системи координат (точка o) теж описує еліпс. На рисунку 1 дві системи зображені в момент часу, коли їхні початки координат збігаються. Можна уявити

зображену схему на рисунку 1, а як жорстку конструкцію похилої площини, защемленої між двома вертикальними до неї паралельними площинами μ . Поступальні коливання конструкції відбуваються по еліпсах, зображених у площинах μ . При $a=b$ коливання будуть коловими і величина кута ψ не має значення (рис. 1, в). Якщо одна з півосей еліпса рівна нулю, то коливання будуть зворотно-поступальними, напрям яких задає кут ψ . Наприклад, при $a=0$ і $\psi=0$ коливання площини будуть зворотно-поступальними у напрямі, показаними двосторонніми стрілками на рисунку 1, б, тобто вони відбуватимуться у вертикальному напрямі вгору-вниз.

В роботі [7] наведена схема більш узагальненої моделі еліптичних коливань площини, в якій кут φ (який називається кутом вібрації [3]) може мати довільне значення. Там же отримана система двох диференціальних рівнянь відносного руху частинки по площині у функції часу t , до якої входять конструкційні параметри – кути β , φ , ψ , півосі еліпса a і b – траєкторії поступальних коливань, кутова швидкість ω обертання точки еліпса (кола) навколо центра та коефіцієнт тертя f . Якщо в отриману систему підставити $\varphi=90^\circ-\beta$, що відповідає моделі на рисунку 1, то вона набуде вигляду:

$$u'' = -fg \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + g \sin \beta + \omega^2 \left(\sin \beta - f \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \right) (a \cos \psi \cos \omega t - b \sin \psi \sin \omega t); \quad (1)$$

$$v'' = -fg \frac{v' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + \omega^2 \cos \psi \left(b \sin \omega t - af \frac{v' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \cos \omega t \right) + \omega^2 \sin \psi \left(a \cos \omega t + bf \frac{v' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \sin \omega t \right).$$

Реакція поверхні N на частинку масою m визначаємо з виразу:

$$N = m \cos \beta \left[g + \omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t - b \sin \psi \sin \omega t) \right]. \quad (2)$$

Система рівнянь (1), яка описує відносну траєкторію, не залежать від маси m частинки. Сила реакції площини N (2) (яка рівна силі тиску частинки на площину) є змінною. При змінній силі тиску ми будемо розглядати випадки, коли він буде більший нуля, тобто рух частинки відбуватиметься без відриву від площини. Розв'язувати систему (1) потрібно чисельними

методами. У випадку ідеально гладенької площини (при $f=0$) вона розпадається на два незалежних диференціальних рівняння:

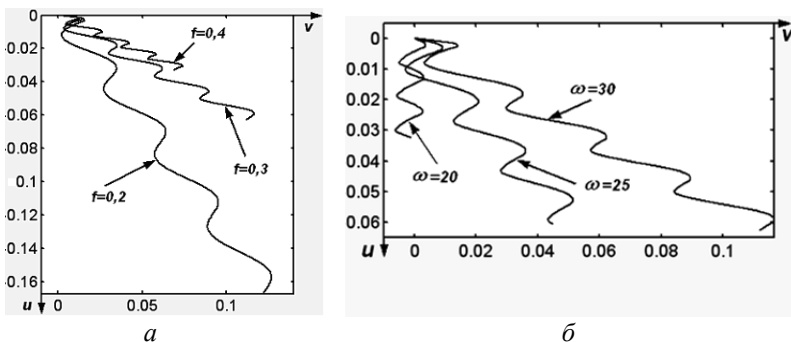
$$\begin{aligned} u'' &= \sin \beta \left[g + \omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t - b \sin \psi \sin \omega t) \right]; \\ v'' &= \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Кожне з рівнянь (3) може бути проінтегроване. Таким чином, рівняння траєкторії відносного руху для ідеально гладенької площини можна отримати в аналітичному вигляді.

Розглянемо два випадки коливань по шорсткій площині: при $a=b=r$ (колові коливання) і при рівності нулю однієї з півосей еліпса (зворотно-поступальні коливання), оскільки здійснення таких коливань в технічному плані не викликає труднощів. Чисельне інтегрування рівнянь (1) будемо виконувати за умови, що частинка попадає на рухому площину з відносною швидкістю, рівною нулю. Це більше відповідає реальним умовам.

Розпочнемо дослідження з колових коливань при $a = b = r = 0,01$ м. Кут нахилу β площини будемо брати меншим від кута тертя, тобто $\beta < \arctg(f)$, оскільки коливання частинки в такому випадку стабілізуються і набувають певного періодичного характеру із рівним періодом, тоді як при $\beta > \arctg(f)$ період коливань частинки зростає.

На рисунку 2 побудовані відносні траєкторії руху частинки з різним коефіцієнтом тертя та різною кутовою швидкістю коливань.



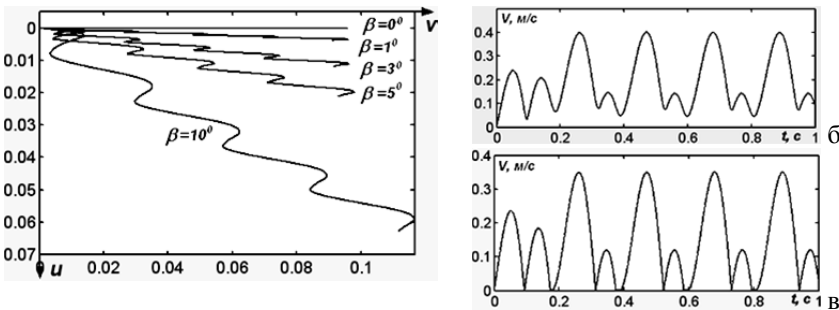
а) $\omega=30 \text{ c}^{-1}$ і різні коефіцієнти тертя; б) $f=0,3$ і різні кутові швидкості коливань.

Рисунок 2 – Відносні траєкторії руху частинки по площині, нахиленій під кутом $\beta=10^\circ$ при $a=b=r=0,01$ м протягом 1 секунди

Частинки з меншим коефіцієнтом тертя проходять більший шлях (рис. 2, а). В міру зменшення сили тертя напрям поширення коливань все більше наближається до вертикального (тобто до лінії найбільшого нахилу

площини). Величина кутової швидкості теж впливає на характер траєкторії (рис. 2, б). При малих кутових швидкостях (до 10 c^{-1}) частинка взагалі не ковзає по площині. В міру збільшення кутової швидкості вона починає ковзати, причому відносна траєкторія руху частинки поширюється в напрямі, близькому до лінії найбільшого нахилу площини. З подальшим зростанням кутової швидкості пройдений шлях ковзання збільшується, а напрям поширення коливань відхиляється від лінії найбільшого нахилу. При $\omega > 30 \text{ c}^{-1}$ починається відрив частинки від площини, оскільки величина реакції площини (2), яка змінюється за синусоїдним законом, набуває від'ємних значень на певних ділянках траєкторії.

На рисунку 3, а побудовані відносні траєкторії частинки в залежності від зміни кута β нахилу площини. По них можна спостерігати закономірність переходу криволінійних коливань частинки в прямолінійні зворотно-поступальні в міру зменшення кута β до нуля. При $\beta=0$, тобто для випадку, коли площина горизонтальна і здійснює колові коливання у вертикальному напрямі, частинка ковзає вздовж прямої лінії, здійснюючи при цьому зворотно-поступальні коливання і з певною середньою швидкістю рухається вздовж неї в одному напрямі. При зворотно-поступальному русі у крайніх положеннях відносна швидкість частинки дорівнює нулю, оскільки вона міняє напрям руху на протилежний. Із графіка зміни відносної швидкості (рис. 3, в) видно, що в одному крайньому положенні (при рівності нулю відносної швидкості) частинка не зупиняється, а в другому – зупиняється. Цим пояснюється те, що частинка при прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в цілому рухається із зупинками в одному напрямі. При куті нахилу площини, більшому від нуля, графік зміни відносної швидкості подібний (рис. 3, б), однак швидкість не падає до нуля.

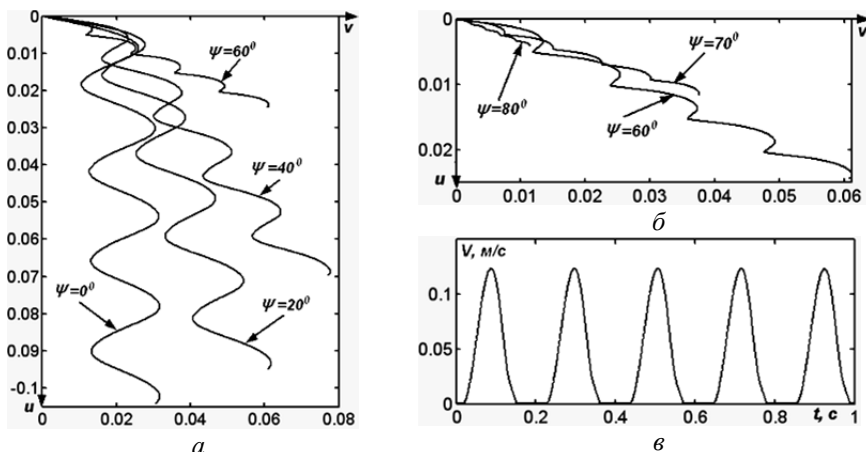


а

а) траєкторії відносного руху; б) графік зміни відносної швидкості при $\beta=10^\circ$;
в) графік зміни відносної швидкості при $\beta=0^\circ$.

Рисунок 3 – Кінематичні характеристики відносного руху частинки при $a=b=r=0,01 \text{ м}$, $\omega=30 \text{ c}^{-1}$, $f=0,3$ і різних кутах β нахилу площини

Розглянемо випадок, коли одна з півосей еліпса дорівнює нулю, тобто коливання площини будуть зворотно-поступальними. Напрямок цих зворотно-поступальних коливань залежить від величини кута ψ (рис. 1, в). Наприклад, при $b=0$ і $\psi=0$ напрям коливань буде паралельний осі ov , тобто вони будуть горизонтальними. Траєкторія відносного руху частинки для цього випадку подібна до синусоїди, яка поширюється в напрямі лінії найбільшого нахилу (рис. 4, а). В міру збільшення кута ψ траєкторія поширення коливань відхиляється від лінії найбільшого нахилу і довжина пройденого шляху зменшується. При наближенні кута ψ до 90° (тобто до вертикального напрямку зворотно-поступальних коливань площини) довжина шляху ковзання наближується до нуля (рис. 4, б).



а, б) траєкторії відносного руху; в) графік зміни відносної швидкості при $\psi=70^\circ$.

Рисунок 4 – Кінематичні характеристики відносного руху частинки по площині, нахиленій під кутом $\beta=10^\circ$ при $a=0,01$ м, $b=0$, $\omega=30$ с⁻¹, $f=0,3$ і різних кутах ψ

З графіка відносної швидкості (рис. 4, в) видно, що майже половину часу, протягом якого відбуваються коливання, частинка не ковзає. При зростанні кута ψ затримки в ковзанні стають ще більшими, що пояснює зменшення довжини шляху відносного переміщення.

Висновки

В роботі досліджено закономірності відносного руху частинки по шорсткій похилій площині, поступальні коливання якої відбуваються у вертикальних площинах, паралельних до горизонталей похилої площини. Траєкторіями переносного руху похилої площин є еліпси, частковим випадком яких можуть бути кола або відрізки прямих. Ці часткові випадки (колові і зворотно-поступальні коливання) розглянуто в роботі. З'ясовано, що частинка у відносному русі по похилій площині може ковзати із зупинками і

без зупинок в залежності від режимів коливань. Від режиму коливань також залежить форма траєкторії відносного руху і напрям поширення коливань.

Література

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. -К.: УАСХН, 1960. -283 с.
2. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. -2-е изд., перераб. и доп. - М.:Колос, 1980. -304 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. - М.: Наука, 1964. -410 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Заика П.М. Об одном семействе регулярных режимов движения частицы по колеблющейся плоскости вибрационной зерноочистительной машины / П.М. Заика // Теория механизмов и машин. -Х.: Изв. ХГУ им. М. Горького, 1966. - Вып.1. - С. 28-33.
6. Войтюк Д.Г. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні коливання / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Техніка АПК. -2004. -№№ 10-11. – С. 26 - 28.
7. Булгаков В.М. Взаємодія похилої площини, всі точки якої при поступальному коливанні описують еліпси, із частинками матеріалу / В.М. Булгаков, С.Ф. Пилипака, М.Б. Клендій // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. - Глеваха, 2013. –Вип. 98. –Т. 1. – С. 574 - 587.

Аннотация

Составлены дифференциальные уравнения относительного перемещения частицы по шероховатой наклонной плоскости, каждая точка которой в колебательном движении описывает эллипс. Указанные колебания наклонной плоскости происходят у вертикальных плоскостях, параллельных к горизонталям наклонной плоскости. Рассмотрены частные случаи, когда полуоси эллипса равны или же одна из полуосей равна нулю. Дифференциальные уравнения решены численными методами. Сделано визуализацию полученных результатов.

Summary

Differential equations of relative transition of a particle on the friction inclined plane each point of which follows an ellipse in an oscillative motion are built. The mentioned oscillations of an inclined plane happen at the vertical planes parallel to horizontals of an inclined plane. Special cases when ellipse semi-axes are equal or one of semi-axes is equal to zero are considered. Differential equations are solved by numerical methods. Visualization of obtained results is made.