УДК 550

© Г.Т. Продайвода, Г.К. Хірнова, 2010

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСПЕРСІЇ І РОЗСІЮВАННЯ СЕЙСМІЧНИХ ХВИЛЬ В СКЛАДНОПОБУДОВАНИХ КОЛЕКТОРАХ НАФТИ І ГАЗУ

Запропонований новий метод математичного моделювання динамічних ефективних пружних постійних геологічного середовища ґрунтується на теорії методу умовних моментів. У результаті моделювання встановлено суттєву різницю між значеннями фазової і групової швидкості пружних хвиль тріщинуватого середовища, що залежить від формату тріщин і частоти. Встановлено дисперсію значень фазової і групової швидкості, що залежить від концентрації і формату мікротріщин. Коефіцієнти затухання повздовжньої та поперечної хвиль залежать не лише від ефективного розміру тріщин, але і від їх формату.

Ключові слова: динамічні пружні постійні, пружні хвилі, розсіювання, дисперсія, неоднорідне середовище, тріщини, флюїд.

Дослідження дисперсії і розсіювання пружних хвиль на мікро- і макронеоднорідностях геологічного середовища представляє інтерес у зв'язку з розробкою сейсмоакустичних методів пошуку та розвідки складнопобудованих порід-колекторів, моніторингом відпрацювання родовищ нафти, газу, вугілля.

Затухання сейсмічних хвиль у геологічному середовищі обумовлено поглинанням і розсіюванням пружної енергії. У дослідженнях використовують три діапазони частот, що не перекриваються: сейсмічний (10–100 Гц), звуковий (1–10 КГц) і ультразвуковий (0,1–1 МГц). Питання про можливість переносу експериментальних даних з одного діапазону частот у інший є проблематичним. Факт збільшення поглинання і дисперсії пружних хвиль зі зменшенням довжини хвилі свідчить, що у реальному геологічному середовищі наявні неоднорідності різного розміру. Якщо в акустичному і ультразвуковому діапазоні розсіювання пружних хвиль викликано мікротріщинами, зернами мінералів, мікрошаруватістю, то у сейсмічному – макротріщинами, зонами розущільнення, тонкошаруватістю тощо.

У зв'язку з цим привертає увагу розробка чисельних методів математичного моделювання дисперсії та розсіювання пружних хвиль на структурних неоднорідностях геологічного середовища. Застосування методів, що існують для чисельних розрахунків розсіювання пружних хвиль у реальному середовищі, обмежено невеликими концентраціями мікротріщин.

К. Енг і Р. Труелл [1] розглядали розсіяння пружних хвиль на сферичних включеннях. Запропонований П. Уотерманом матричний *T*-метод [2], використовували В.К. Вардан, В.В Вардан і І-Синг Пао [3] з метою дослідження розсіювання пружних хвиль на неоднорідностях циліндричної форми.

А. Мєл і Л. Кнопов [4], І. Хадсон [5] вивчали розсіяння пружних хвиль на мікротріщинах, які мають форму шайби, за обмеженої їх концентрації.

У цій статті розглянуто новий метод математичного моделювання дисперсії і розсіювання пружних хвиль на неоднорідностях без обмежень, пов'язаних з їхньою формою, властивостями, концентрацією, і який базується на методах теорії статистичного осереднення з використанням методу умовних ймовірностей.

Статистичні ефективні модулі пружності. Рівняння руху запишемо з врахуванням тензору напруги Коші лінійної теорії пружності [1]:

$$\sigma_{ij,i} - \rho\ddot{U}_j = 0, \tag{1}$$

де σ_{ij} – тензор напруги, ρ – щільність, $\ddot{U}_j$ – вектор зміщень. У даному випадку індекс після коми означає диференціювання по відповідній просторовій змінній, а точки над буквою символізують диференціювання по змінній часу.

Будемо досліджувати гармонічний хвильовий рух типу :

$$U_i(x,t) = U_i^A(x)\exp(i\omega t), \tag{2}$$

де $U_i^A(x)$ – діюча амплітуда пружних зміщень, ω – кругова частота.

Використаємо закон зв'язку між напругами σ_{ij} і деформаціями $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ в формі

$$\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

де $C_{ij\alpha\beta}$ – тензор пружних постійних геологічного середовища. Деформації зв'язані з вектором пружних зміщень співвідношенням

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(U_{\alpha,\beta} - U_{\beta,\alpha}\right). \tag{4}$$

Підставляючи вирази (3), (4) у рівняння (1), одержимо

$$\left(C_{ij\alpha\beta}U^{A}_{\alpha\beta}\right)_{i}+\omega^{2}U^{A}_{j}=0\,. \qquad (5)$$

Якщо геологічне середовище, в якому розповсюджується хвиля, неоднорідне, то тензор пружних постійних $C_{ij\alpha\beta}$ і щільність ρ є випадковими функціями просторових координат. Припустимо, що ці функції статистично однорідні в межах деякого приведення об'єму *V*, лінійні розміри якого значно менші довжини хвилі [6].

Виділимо в лівій частині рівняння (5) диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами, тоді одержимо:

$$C^{0}{}_{ij\alpha\beta}\tilde{U}^{A}_{\alpha\beta i}+\omega^{2}\rho_{0}\tilde{U}_{j}=-q_{j} \qquad (6)$$

де

$$\begin{gathered}
C^{0}{}_{ij\alpha\beta}=\lambda_{0}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}+\mu_{0}(\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}+\delta_{ji\beta}\delta_{i\alpha})\\
\tilde{U}_{j}=U_{j}-<U_{j}>;q_{j}=(\sigma_{ij}+\psi_{ij}),i+\omega^{2}\theta_{j};\\
\tilde{\sigma}_{ij}=\delta C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta};\psi_{ij}=C^{0}{}_{ij\alpha\beta}<\varepsilon_{\alpha\beta}>;\\
\theta_{j}=U_{j}\delta\rho+<U_{j}>\rho_{0};\quad C_{ij\alpha\beta}=<C_{ij\alpha\beta}>+C^{0}{}_{ij\alpha\beta};\\
\delta\rho=\rho-\rho_{0};
\end{gathered} \qquad (7)$$

кутові дужки символізують операцію статистичного усереднення, коефіцієнти λ_0, μ, ρ_0 мають постійні значення в межах об'єму приведення, індекс амплітуди для скорочення опустимо.

Вирішенням рівняння (6) за допомогою функції Гріна в операторній формі:

$$\tilde{U}=G*q,\ \ q=\nabla(\sigma+\psi)+\omega^{2}\theta\,, \qquad (8)$$

де ∇ – оператор диференціювання, зірочкою позначена операція інтегральної згортки. Після диференціювання аргументу лівої частини рівняння (8) отримуємо:

$$\tilde{E}=\Gamma*(\sigma+\psi)+\omega^{2}H*\theta\,, \qquad (9)$$

де Γ і H – інтегральні оператори типу згортка, дія яких виконується згідно формул

$$\Gamma_{ij\alpha\beta} * \sigma_{\alpha\beta} + \int G_{\alpha(i,j)} * \sigma_{\alpha\beta} dV + \oiint G_{\alpha(i,j)} * \sigma_{\alpha\beta} N_{\beta} dS,$$
$$H_{ij\alpha} * \theta_{\alpha} = \int G_{\alpha(i,j)\beta} * \theta_{\alpha\beta} dV. \tag{10}$$

Виконавши статистичне осереднення рівняння (9) за умови, що координата – аргумент лівої частини – позначає точку, яка належить до об'єму V_{1n}, який заповнений сфероїдальними включеннями, орієнтованими в n-напрямку, запишемо рівняння:

$$\langle E|1n\rangle = \langle E\rangle + \sum_{i=1}^{m+1}\left[\Gamma * \langle \sigma|i,1n\rangle w_i^{1n} + \omega^2 H * \langle \theta|i,1n\rangle w_i^{1n}\right]. \tag{11}$$

Введемо позначення умовних статистичних функцій:

$$\langle f|i,1n\rangle = \langle f(x)|x \in V_i, y \in V_{1n}\rangle,$$

$$w_i^{1n} = p\left(x \in V_i | y \in V_{1n}\right) \text{ – умовна щільність.}$$

Використаємо умову про однорідність напружено-деформованого стану в межах множини включень, орієнтованих в одному напрямку, тобто будемо вважати

$$\langle E|i,1n\rangle = \langle E|i\rangle, \quad (i = 1, 2, \dots, m+1). \tag{12}$$

При обчисленні результату дії оператора H можемо знехтувати також флуктуаціями вектора пружних зміщень. Позначимо через φ кореляційну функцію поля щільності і пружних постійних включень, орієнтованих в n-напрямку. Тоді, згідно з методикою, що її використовують для розрахунку ефективних пружних сталих стохастичних матеріалів, отримаємо

$$w_i^{1n} = p\delta_{ni} + \xi_{1i}(1-p)(1-\delta_{ni}), \ p = \xi_{1i} + (1-\xi_{1i})\varphi, \ w_i^{1n} = \xi_2(1-\varphi),$$
$$\xi_{1i} = V_{1n}/V, \ \xi_2 = V_2/V_1, \ V = UV_i. \tag{13}$$

Для визначення статичних ефективних пружних постійних неоднорідного геологічного середовища підставимо в рівняння (11) $\omega = 0$ і використаємо співвідношення (12), (13). Після інтегрування:

$$\langle E|1n\rangle = \langle E\rangle + g\left[\delta C_1\left(\langle E|1n\rangle - \xi_1\langle E|1\rangle\right) - \xi_2 \delta C_2 \langle E|2\rangle\right],$$
$$G = \Gamma * \varphi, \ \delta C_r = C_r - C_0. \tag{14}$$

Для осереднення цього виразу по множині Ω імовірних орієнтацій включень отримаємо рівняння для визначення середніх деформацій компоненти 2:

$$\left(I+\xi_1 w\right)\left\langle E|2\right\rangle=\left\langle E\right\rangle,\ w=Zd,\ Z=\left\langle\left(I+\xi_1 gf_1\right)^{-1}g\right\rangle\Omega,\\ d=C_1-C_2,\ \ f_1=C_1-C_0, \tag{15}$$

де I – одиничний тензор четвертого рангу, кутові дужки з індексом Ω символізують осереднення по орієнтаціям включень.

Вирішивши рівняння (15), отримаємо формули, що пов'язують середні деформації компонентів і макроскопічні деформації об'єму:

$$\left\langle E|r\right\rangle=A_r\left\langle E\right\rangle,\ A_1=A_2\left(I+w\right),\ A_2=\left(I+\xi_1 w\right)^{-1}. \tag{16}$$

Статистичне осереднення закону Гука (3) з врахуванням виразу (16) дає можливість записати співвідношення для обчислення тензору ефективних пружних постійних C_E:

$$C_E=C_M+\xi d^2 q,\ \xi=\xi_1\xi_2,\ g=ZA_2,\ C_M=\xi_1 C_1=\xi_2 C_2. \tag{17}$$

Якщо k_r, μ_r – модулі об'ємного стиснення і зсуву r компоненти, а включення мають сферичну форму з співвідношенням півосей æ, то для розрахунку ефективних пружних постійних K_e, μ_e геологічного середовища зі сфероїдальними включеннями отримаємо наступні формули:

$$K_E=K_M+\xi K_d S_A,\ \mu_E=\mu_M+\xi\mu_d P_A. \tag{18}$$

Тут прийняті такі позначення:

$$K_d=K_1+K_2,\ \mu_d=\mu_1-\mu_2,\ K_M=\xi_1 K_1+\xi_2 K_2,\ \mu_M=\xi_1\mu_1+\xi_2\mu_2,$$

$$S_A=S_q S_d,\ P_A=P_q P_d,\ S_q=S_z/\left(1+\xi_1 S_d\right),\ P_q=P_z/\left(1-\xi_1 P_d\right),$$

$$S_w=S_z S_d,\ P_w=P_z P_d,\ S_d=3K_{Д},\ P_d=2\mu_{\Delta},$$

$$S_z=\frac{1}{3}\left(2t+2l+2l_T+n\right)_z,\ P_z=\frac{1}{15}\left(t-2l-2l_T+2n+6v+6w\right)_z,$$

$$T_z=\left(n_c t_g-2l_c l_g\right)_z\big/C,\ l_z=\left(n_c t_g-l_c n_g\right)_z\big/C,\ l_{zt}=\left(t_c l_g-l_{ct}t_g\right)_z\big/C,$$

$$N_z=\left(t_c n_g-2l_{ct}l_g\right)_z\big/C,\ v_z=v_g/v_c,\ w_z=w_g/w_c,\ C=\left(t_n-2ll_T\right)C,$$

$$t_c = \left(2S + p\right)_{cl} \big/ 3,\ l_c = \left(S - p\right)_{cl} \big/ 3,\ l_{ct} = \left(S - p\right)_{ct} \big/ 3,\ n_c = \left(S + 2p\right)_{ct} \big/ 3,$$

$$S_{cl} = 1 - S_{F1} S_{gl},\ S_{ct} = 1 - S_{F1} S_{gt},\ P_{cl} = 1 - P_{F1} P_{gl},\ P_{ct} = 1 - P_{F1} P_{gt},$$

$$V_c = 1 - P_{F1} V_g,\ W_c = 1 - P_{F1} W_g,\ S_{F1} = 3\left(K_1 - K_0\right),\ P_{F1} = 2\left(\mu_1 - \mu_0\right),$$

$$S_{gl} = \left(l + t\right)_g,\ S_{gt} = \left(n + 2l\right)_g,\ l_g = -g_1 r_3,\ P_{gl} = \left(t - 2l\right)_g,\ P_{gt} = \left(n - l\right)_g,$$

$$t_g = g_1\left(j_2 + r_3\right),\ n_g = 2g_1\left(j_1 + r_3\right),\ V_g = g_0 j_2 + \frac{1}{2} t_g,$$

$$P_{gl} = \left(t - 2l\right)_g,\ P_{gt} = \left(n - 1\right)_g,\ t_g = g_1\left(j_2 + r_3\right),\ \ W_g = g_0\left(1 + j_1\right) - 2l_g,$$

$$g_0 = -1 \big/ \left(4\mu_0\right),\ g_0 = -1 \big/ \left(2n_0\right),\ n_0 = K_0 + \frac{3}{4}\mu_0,\ r_3 = \left(K_0 / \mu_0 + \frac{1}{3}\right) \Big/ j_3,$$

$$j_1 = \left(j æ \Big/ \sqrt{|\mathrm{r}|} - 1\right) r,\ j_2 = 1 - j_1,\ j_3 = \left[\left(1 + 2æ^2\right) j_1 - 1\right] \Big/ \left(2r\right),\ r = æ^2 - 1,$$

$$j = \begin{cases} \dfrac{\ln(\chi + \sqrt{r}), \text{якщо } \chi > 1}{\arcsin(\sqrt{|r|}), \text{якщо } \chi < 1} \end{cases},\ K_0 = \xi_2 K_2 + \xi_1 K_1 K_2 / (\xi_1 K_2 + \xi_2 K_1),$$

$$\mu_0 = \xi_2 \mu_2 + \xi_1 \mu_1 \mu_2 / (\xi_1 \mu_2 + \xi_2 \mu_1). \tag{19}$$

Вираз (19) можна використовувати як за наявності твердих включень сфероїдальної форми, так і для розрахунку ефективних пружних постійних геологічного середовища, що містять пори і мікротріщини.

Ефективні динамічні пружні модулі. З метою визначення ефективних динамічних пружних модулів геологічного середовища в довгохвильовому наближенні розкладемо функцію Гріна рівняння (6) в ряд за параметром, пов’язаним з коловою частотою і розглянемо перші чотири члена:

$$G_{mn}(X) = G_{mn(0)}(X) + i\omega G_{mn(1)}(X) + \omega^2 G_{mn(2)}(X) + i\omega^3 G_{mn(3)}(X). \tag{20}$$

Введемо наступні позначення:

$$G_{kl(n)} = X^{n-1}(a_n \delta_{ij} + b_n \gamma_i \gamma_j),\ \gamma_i = X_i / X,\ X = |X|,$$

$$a_0 = b_0 \frac{(\lambda_e + 3\mu_e)}{(\lambda_e + \mu_e)},\ b_0 = \frac{1}{8\pi} \frac{(\lambda_e + \mu_e)}{(\eta_e \mu_e)},$$

$$a_1 = -\frac{1}{12\pi\rho_0}\left(\frac{2}{C_T^3}+\frac{1}{C_L^3}\right),\ a_2 = -\frac{1}{32\pi\rho_0}\left(\frac{3}{C_T^4}+\frac{1}{C_L^4}\right),$$
$$C_T^2 = \mu_e/\rho_0,\ C_L^2 = \eta_e/\rho_0,\ \eta_e = \lambda_e + 2\mu_e,\ \lambda_{et} = K_e - \frac{2}{3}\mu_e,\ \rho_0 = \xi_1\rho_1 + \xi_2\rho_2. \tag{21}$$

Будемо апроксимувати функції, що залежать від частоти хвилі, лише першими членами рядів розкладання, а саме:

$$\cos(kx) = 1 - \alpha/2,\ \alpha = \varpi x\gamma_m v_m / c,\ \sin(kx) = \alpha - \alpha^3/6,$$
$$x = x\gamma,\ k = kv,\ k = \frac{\varpi}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{22}$$

У цьому випадку дію оператора Γ і H в рівнянні (11) можна записати так:

$$g_{ij\alpha\beta} = \Gamma_{ij\alpha\beta} * \varphi = l_g\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + p_g I_{ij\alpha\beta} + a_g I_{ij\alpha\beta} + b_g k_{ij\alpha\beta},$$
$$h_{ij\alpha} = H_{ij\alpha} * \varphi = v_b(l_H\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + p_H I_{ij\alpha\beta}). \tag{23}$$

Тут прийняті позначення:

$$l_g = l_{g0} + \omega^2 l_{g2} + i\omega^3 l_{g3},\ a_H = \omega^2 a_{H2},\ p_g = p_{g0} + i\omega^3 p_{g3},\ b_H = \omega^2 b_{H2},$$
$$l_H = \omega^2 l_{H2},\ p_H = \omega^2 p_{H2},\ l_{g0} = \frac{8\pi}{15}b_0,\ p_{g0} = -\frac{4\pi}{15}(b_0 + 5a_0),$$
$$S_{g0} = 3l_{g0} + p_{g0},\ l_{g2} = \frac{4}{15}\left(2b_2 - \frac{b_0}{7c^2}\right)I_1,\ p_{g2} = \frac{2}{15}\left(5a_2 + 3b_2 + \frac{7a_0 - b_0}{14c^2}\right)I_1, \tag{24}$$
$$l_{g3} = b_3 I_2,\ p_{g3} = (2a_3 + b_3)I_2,\ a_{g2} = \frac{2}{35c^2}b_0 I_1,\ l_{g2} = \frac{1}{70c^2}(7a_0 + 3b_0)I_1,$$
$$l_{H2} = -\frac{2}{15}b_0 I_1,\ p_{H2} = \frac{2}{15}(5a_0 + b_0)I_1,\ I_1 = 4\pi D^2,\ I_2 = 8\pi D^3,$$

D – середній діаметр розсіяння включень.

Умовні математичні очікування тензорів деформації компонентів $\langle E|r\rangle$ визначається за допомогою операторів $g*h$ та статистичних середніх:

$$\langle E|r\rangle = A_r\langle E\rangle,\ A_r = A_{r0} + \omega^2 A_{r2} + i\omega^3 A_{r3}, (r = 1,2). \tag{25}$$

Врахуємо члени, що містять частоту не більше третьої степені. Підставляючи вираз (25) в співвідношення між тензорами напруги і деформацій (3), отримаємо

$$\langle\sigma\rangle = C^E \langle E\rangle, \tag{26}$$

де C^E – ефективний динамічний тензор пружних постійних, який у випадку розорієнтованих включень має вигляд

$$\begin{gathered} C^E{}_{ij\alpha\beta} = k^E \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^E \left(I_{ij\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \right) + \gamma^E \nu_i \nu_j \delta_{\alpha\beta}, \\ k^E = k_0^E + \omega^2 k_2^E + i\omega^3 k_3^E,\ \mu^E = \mu_0^E + \omega^2 \mu_2^E + i\omega^{3_3} \mu_3^E,\ \gamma^E = \omega^2 \gamma_2^E. \end{gathered} \tag{27}$$

Використовуючи вирішення (16) та (25) запишемо вираз для розрахунку ефективних пружних постійних (27):

$$\begin{gathered} k_0^E = k_e,\ \mu_0^E = \mu_e,\ k_2^E = \xi k_D s_{A2},\ k_3^E = \xi k_D s_{A3},\ \mu_2^E = \xi \mu_D p_{A2}, \\ \mu_3^E = \xi \mu_D p_{A3},\ \gamma_2^E = 2\xi \mu_D \gamma_{A2},\ s_{A0} = s_{y0} / s_{x0},\ s_{A2} = s_{A0}(s_{y2}/s_{y0} - s_{x2}/s_{x0}), \\ s_{A3} = s_{A0}(s_{y3}/s_{y0} - s_{x3}/s_{xo}),\ p_{A2} = p_{A0}(p_{y2}/p_{y0} - p_{x2}/p_{x0}), \\ p_{A3} = p_{A0}(p_{y3}/p_{y0} - p_{x3}/p_{x0}),\ \gamma_{A2} = p_{A0}(\gamma_{y2}/\gamma_{y0} - \gamma_{x2}/\gamma_{x0}), \\ s_{x0} = 1 - s_F s_{g0},\ s_{x2} = (3l + p + \gamma)x_2,\ s_{x3} = (3l + p)x_3, \\ l_{x2} = \left[l_F \left(s_{g2} + a_{g2} \right) + p_F \left(l_{g2} + a_{g2} \right) + \rho_F l_{H2} \right],\ l_{x2} = -l_F s_{g3} + p_F l_{g3}, \\ p_{x0} = 1 - p_F p_{g0},\ p_{x2} = -\left[p_F \left(p_{g2} + a_{g2} + b_{g2} \right) + \rho_F p_{H2} \right], \\ p_{x3} = -p_f p_{g3},\ \gamma_{x2} = -\left[l_F \left(5a_{g2} + 2b_{g2} \right) + p_F \left(2a_{g2} + b_{g2} \right) \right], \\ s_F = 3(\xi_1 k_2 + \xi_2 k_1 - k_e),\ l_F = (s_F - p_F)/3s,\ p_F = 2\left(\xi_1 \mu_2 + \xi_2 \mu_1 - \mu_e \right), \\ \rho_F = \xi_1 \rho_2 + \xi_2 \rho_1 - \rho_0,\ s_{y0} = s_D s_{g0},\ s_{y2} = \left(3l + p + \gamma \right)_{y2},\ s_{y3} = (3l + p)_{y3}, \\ l_{y2} = l_D (s_{g2} + a_{g2}) + p_D (l_{g2} + a_{g2}) + \rho_D l_{H2},\ l_{y3} = l_D s_{g3} + p_D l_{g3}, \\ p_{y0} = p_D p_{g0},\ p_{y2} = p_d (p_{g2} + a_{g2} + b_{g2}) + \rho_D p_{H2} + a_{g2},\ p_{y3} = p_D p_{g3}, \\ \gamma_{y2} = l_D (5a_{g2} + 2b_{g2}) + p_d (2a_{g2} + b_{g2}),\ s_D = 3(k_1 - k_2),\ l_D = (s_D - p_D)/3, \\ k_d = s_D / 3,\ p_D = 2(\mu_1 - \mu_2),\ \rho_D = \rho_1 - \rho_2. \end{gathered} \tag{28}$$

Ефективні динамічні модулі пружності ізотропного неоднорідного геологічного середовища є функціями частоти хвилі, що поширюється. Наведені формули (27), (28) отримані без обмежень на величину флуктуацій пружних властивостей компонент геологічного середовища. Вони справедливі для дослідження динамічної поведінки таких середовищ з пустотами і тріщинами.

Коефіцієнт поглинання і дисперсія пружних хвиль. Запишемо макроскопічне рівняння руху в такому вигляді:

$$C^E_{ij\alpha\beta}\left\langle u_\alpha\right\rangle_{\beta j}-\left\langle\rho\right\rangle\left\langle\ddot{u}_i\right\rangle=0 \qquad (29)$$

і розглянемо поширення плоскої гармонічної хвилі в неоднорідному геологічному середовищі

$$\left\langle u_j\right\rangle=a_j\left(k\right)\exp\left[i\left(\omega t-kx\right)\right]. \qquad (30)$$

Враховуючи ефективні динамічні модулі пружності (27), використовуючи рівняння (29), (30), отримаємо

$$\left(k+\frac{1}{3}\mu+\gamma\right)^E k_i k_j a_i \mu^E k^2 a_i-\omega^2\left\langle\rho\right\rangle a_i=0. \qquad (31)$$

Система (31) визначає комплексні хвильові вектори:

$$k_T=\left|k_T\right|=\omega\left(\left\langle\rho\right\rangle/\mu^E\right)^{\frac{1}{2}},\ k_L=\left|k_L\right|=\omega\left(\left\langle\rho\right\rangle/n^E\right)^{\frac{1}{2}},\ n^E=\left(k+\frac{4}{3}\mu+\gamma\right)^E. \qquad (32)$$

Уявні частини хвильового вектора є коефіцієнтами поглинання:

$$-I_m k_T=\frac{1}{2}\omega^4\mu_3^E/(\mu_0^E c_T),\ -I_m k_L=\frac{1}{2}\omega^4 n_3^E/(n_0^E c_T),$$

$$c_T=(\mu_0^E/\left\langle\rho\right\rangle)^{\frac{1}{2}},\ c_L=(n_0^E/\left\langle\rho\right\rangle)^{\frac{1}{2}},$$

$$n_3^E=k_3^E+\frac{4}{3}\mu_3^E,\ n_0^E=k_0^E+\frac{4}{3}\mu_0^E.$$

Вирази для фазової і групової швидкості можна записати так:

$$c_{PT}^{(\omega)}=c_T\left(1+z\right),\ c_{GT}^{(\omega)}=c_T\left(1+3z\right),\ c_{PL}^{(\omega)}=c_L(1+z_1),\ c_{GL}=c_L(1+3z_1),$$

$$z=\omega^2\mu_2^E/(2\mu_0^E),\ z_1=\omega^2 n_2^E/(2n_0^E),\ n_2^E=k_2^E+\frac{4}{3}\mu_2^E+\gamma_2^E.$$

Результати математичного моделювання. З метою дослідження дисперсії фазової та групової швидкості в тріщинуватому геологічному середовищі проведені чисельні розрахунки для моделі тріщинуватого вапняку, що містить пустоти різної форми. Прийняті наступні пружні модулі та щільність твердого скелету вапняку: K_2 = 75 ГПа, μ_2 = 45 ГПа, ρ_2 = 2,70 г/см^3. Для пустот і мікротріщин були прийняті наступні параметри: для сферичних пор – æ = 1, для сфероїдальних æ = 10^{-1}, æ = 10^{-2}, для мікротріщин æ = 10^{-4}, для каверн æ = 10^4.

Розглянемо залежності частотно незалежної (статистичної) C_L та динамічної C_{PL} фазової швидкості повздовжньої хвилі від концентрації пор, мікротріщин та каверн для частоти f = 0,3 МГц і діаметру розсіювача 0,2 см. Спостерігається додатня дисперсія ($C_L < C_{PL}$) фазової швидкості для сферичних пор практично у всьому діапазоні концентрацій, але при ξ_1 = 0,475 дісперсія швидкості зникає, а за подальшого збільшення їх концентрації спостерігається вже від'ємна дисперсія $C_L > C_{PL}$. Аналогічна залежність для каверн та сфероїдальних пор.

Для моделі тріщинуватого вапняку æ = 10 спостерігається від'ємна дисперсія $C_L > C_{PL}$. Остання зростає також зі збільшенням розміру мікротріщин. Тріщинуватий вапняк є ефективним акустичним фільтром. Ці властивості різко проявлені за збільшення розміру мікротріщин навіть за відносно невеликої їх концентрації. Співвідношення C_{GL}/C_{PL} спочатку зростає, потім, за збільшення концентрації пустот різного формату, знов зменшується. Причому групова швидкість повздовжньої хвилі стає менше від фазової швидкості.

Коефіцієнт розсіяння пружних хвиль обчислюється із співвідношення

$$\alpha(_{P,T}) = 4\pi\left[-I_m k(_{L,T})/k(_{L,T})\right]. \tag{33}$$

Розсіяння повздовжніх і поперечних хвиль достатньо швидко зростає за збільшення концентрації пор, каверн та мікротріщин. За однакової концентрації затухання зростає в такій послідовності: сферичні пори, голчаті каверни, сфероїдальні пори, мікротріщини. У мікротріщинуватих вапняках коефіцієнти розсіяння повздовжних та поперечних хвиль дуже швидко збільшуються навіть за невеликої концентрації мікротріщин. Наприклад, за концентрації мікротріщин близько одного відсотка тріщинуватий вапняк можна розглядати як акустичний фільтр. Розсіяння пружних хвиль зростає також зі збільшенням частоти.

Таким чином, пористі, кавернозні та мікротріщинуваті вапняки при розповсюдженні пружних хвиль поводяться як пружні середовища. Частоту, за якої енергія пружної хвилі повністю розсіюється тріщинуватим геологічним середовищем, можна називати граничною частотою пропускання пружних хвиль. Зазначимо, що розглянуто затухання, обумовлене геометричною дисперсією або розсіянням. У цьому випадку дисипація пружної енергії за рахунок поглинання середовища відсутня. За низької концентрації та частоти розсіяння є майже зайвою функцією концентрації, оскільки пори, каверни та мікротріщини поводяться як одиничні розсіювачі пружної енергії.

Висновки. Розроблено новій метод та алгоритм математичного моделювання пружних хвиль у тріщинуватих геологічних середовищах. Його переваги полягають у тому, що він не накладає жодних обмежень на концентрацію тріщин, а також враховує реальну структуру тріщинно-порового простору.

Розсіяння пружних хвиль у пористих, кавернозних, мікротріщинуватих вапняках залежить від частоти, форми та розміру розсіювача, а також його концентрації.

Поведінка тріщинно-порового геологічного середовища під час розповсюдження пружних хвиль подібніша до поведінки дискретного середовища, що підтверджує дисперсія фазових і групових швидкостей та характер затухання.

Затухання пружних хвиль реального тріщинно-порового геологічного середовища обумовлено не тільки в'язкопружними властивостями скелету та флюїду, що заповнює тріщинно-поровий простір середовища. Велике значення має пружне розсіяння енергії на локальних неоднорідностях середовища.

Таким чином, отримані результати розширюють наші уявлення щодо закономірностей розповсюдження пружних хвиль у геологічному середовищі, мають велике значення для інтерпретації результатів сейсмоакустичних досліджень у процесі пошуків та розвідки нафти та газу в складних геологічних умовах.

1. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвукове методы в физике твердого тела. – М.: Мир, 1972. – 308 с.
2. *Waterman P.C.* New formulation of acustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. – 1968. – **45**, № 6. – P. 1417–1429.
3. *Vardam V.K.* Multiple scattering of elasic waves by cylinders, of arbitrary Cross section // Ibid. – 1978. – **63**, № 5. – P. 1310–1319.
4. *Mal A.H. and Knopoff L.* Elasic wave velocities in two–component systems // J.Inst. Math. Apllics. – 1967. – **3**. – P. 76–387.

5. *Hadson I.A.* Wave speeds and attenuation of elasic waves in material containing cracs // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1981. – **64**. – P. 133–150.
6. *Маслов Б.П.* Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. – М.: Научный мир, 2006.

Математическое моделирование дисперсии и рассеивание сейсмических волн в сложнопостроенных коллекторах нефти и газа Г.Т. Продайвода, А.К. Хирнова

РЕЗЮМЕ. Предложенный новый метод математического моделирования динамических эффективных упругих постоянных геологической среды основан на теории метода условных моментов. В результате моделирования установлена существенная разница между значениями фазовой и групповой скорости упругих волн трещиноватой среды, которая зависит от формата трещин и частоты. Определена дисперсия фазовой и групповой скорости, зависящая от концентрации и формата микротрещин. Коэффициенты затухания продольной и поперечной волн зависят не только от эффективного размера трещин, но и от их формата.
Ключевые слова: динамические упругие постоянные, упругие волны, рассеяние, дисперсия, неоднородная среда, трещины, флюид.

Mathematical modeling of dispersion of seismic waves of composite rock-resrvoirs of oil and gas G.T. Prodaivoda, G.K. Hirnova

SUMMARY. A new method of mathematical modeling of effective dynamic elastic constants of a geologic medium based on a theory of the method of relative moments is proposed. The modeling revealed notable differences between phase and group velocities of elastic waves of a cracked medium which depends on the crack format and frequency. Phase and group velocity dispersion depending on microcrack concentration and format has been established. The longitudinal and transverse wave attenuation coefficients depend not only on the effective size of cracks but also on their format.
Keywords: dynamic elastic constant, elastic waves, dispersion, inhomogeneous media, cracks, fluid.