

УДК 550.8

**М.Н. Маркова, Е.П. Лапина**

*Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,  
г. Киев, Украина*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТОМЕТРИИ**

Предложен метод проведения качественного анализа исходных данных на основании использования некоторой совокупности производных высших степеней и аналитической аппроксимации потенциальных полей. Показано, что используемые функции производных магнитного поля позволяют во многих случаях значительно лучше локализовать возмущающие объекты, чем исходная функция магнитного поля. Изложены результаты исследований высших производных магнитного потенциала на теоретических и практических примерах. При интерпретации потенциальных полей с помощью приведенных материалов можно находить экономически эффективный вариант решения в соответствии с поставленной задачей.

**Ключевые слова:** аналитическая аппроксимация, потенциальные поля, гармоническая функция, производные высших степеней, класс трехмерных материальных стержней, геологический объект, качественный анализ.

**Введение.** Целесообразность и эффективность использования производных высших степеней при решении многих прикладных задач геофизики проиллюстрированы в работах [1, 2, 4, 7, 18, 20, 22, 26, 27 и др.]. Высшие производные не только использовались при интерпретации гравитационных и магнитных полей, но и способствовали развитию некоторых новых направлений в геологическом истолковании наблюденных аномалий:

- 1) локализация особых точек потенциальных функций;
- 2) разделение сложных аномалий, вызванных породами, залегающими на разной глубине;
- 3) ослабление регионального влияния;
- 4) изучение фигуры Земли;
- 5) решение задач редукции гравитационных наблюдений и др.

О значении высших производных В.Н. Страхов писал [22]: “Развитие метода высших производных в его обобщенной формулировке в наи-

большей степени будет способствовать созданию общих и эффективных методов интерпретации магнитных и гравитационных аномалий”.

С развитием вычислительной техники и поисками новых методов решения геофизических задач интерес к высшим производным потенциала значительно возрос. Это следует из большого количества работ, посвящённых использованию производных в различных отраслях научных исследований. Приведём некоторые из них. Для реализации метода автоматизированного подбора получены аналитические выражения производных составляющих магнитного поля для трёхмерных прямоугольных пластов [10, 26], при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии (для ускорения сходимости итерационного процесса) в аппроксимационных классах Сретенского, Тихонова, контактных поверхностей, шаровых тел и др. [6], в методе  $F$ -аппроксимаций [9], при обработке и интерпретации результатов геофизических наблюдений [12, 13]. Основные свойства высших производных магнитного потенциала и их использование описаны в работе [21]. Метод высших производных применяется в электроразведке [17], в методах фильтрации и трансформации потенциальных полей [25], при изучении токовых слоёв на границе магнитосферы Земли [16]. В экономико-географических исследованиях большое значение имеют математические методы, в том числе метод высших производных [3]. Они дают возможность экономить время при обработке статистических данных, находить экономически эффективный вариант решения в соответствии с поставленной задачей.

Полный вектор напряженности магнитного поля описывается тремя компонентами – вертикальной и двумя горизонтальными составляющими. Вертикальная составляющая имеет преимущество, поскольку более информативна по сравнению с горизонтальными составляющими. Эффективность ее использования показана в работе [15]. Продолжением этой работы являются материалы исследований производных высших степеней для горизонтальных составляющих магнитного поля. Как и в работе [15], исследования проводятся в модельном классе трехмерных материальных стержней. Выбор данного класса обоснован в работах [5, 6].

**Постановка задачи.** Пусть в области  $D$  расположены однородно намагниченные массы. Вектор интенсивности намагничения этих масс определен своими составляющими:

$$\mathbf{I}(\xi, \eta, \zeta) = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} + I_z \mathbf{k}.$$

Известно, что во внешних точках потенциал магнитного поля записывается так:

$$U(x, y, z) = (\mathbf{I}, \text{grad}V) = I_x V_x + I_y V_y + I_z V_z,$$

где

$$V = \iiint_D \frac{d\tau}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}.$$

В этой формуле  $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$  – элемент объема намагниченного тела.

Полный вектор напряженности магнитного поля выражается в виде

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}.$$

Запишем составляющие вектора напряженности внешнего магнитного поля:

$$T_x = X = \frac{\partial U}{\partial x} = (I_x V_{xx} + I_y V_{xy} + I_z V_{xz}),$$

$$T_y = Y = \frac{\partial U}{\partial y} = (I_x V_{xy} + I_y V_{yy} + I_z V_{yz}),$$

$$T_z = Z = \frac{\partial U}{\partial z} = (I_x V_{xz} + I_y V_{yz} + I_z V_{zz}).$$

В исследовательском вычислительном процессе будут участвовать как вертикальная, так и горизонтальные составляющие вектора напряженности внешнего магнитного поля:

$$X_n(i) = T_{n_x}(i), \quad Y_n(i) = T_{n_y}(i), \quad Z_n(i) = T_{n_z}(i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Функции (1) представим полем некоторой совокупности трехмерных элементарных тел. Каждое тело состоит из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных материальных стержней. Детальное описание стержней изложено в работах [5, 6, 15]. Точка пересечения – центр симметрии тела. Каждый стержень вытянут по направлению координатной оси и намагничен вдоль своего простираения. Общая геологическая модель определена такой последовательностью параметров:

$$P = \left\{ m, (c_x, c_y, h)_j; (2t_x, 2t_y, 2t_z)_j; (I_x, I_y, I_z)_j \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

где  $m$  – количество элементарных тел;  $(c_x, c_y, h)$  – центры тяжести тел;  $(2t_x, 2t_y, 2t_z)$  – длины стержней;  $(I_x, I_y, I_z)$  – составляющие вектора интенсивности намагничивания стержневых масс. Описанный подход позволяет получить аналитические выражения для вычисления теоретического магнитного поля трехстержневой модели:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_x 1 + T_x 2 + T_x 3 \\ T_y &= T_y 1 + T_y 2 + T_y 3 \\ T_z &= T_z 1 + T_z 2 + T_z 3 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Если геологическая модель состоит из  $m$  элементарных объектов, которые описываются последовательностью параметров (2), и получены аналитические функции (3), то можно получить другие элементы магнитного поля:

модуль горизонтальной составляющей

$$|H| = [T_x^2 + T_y^2]^{1/2},$$

модуль вектора напряженности внешнего магнитного поля

$$|T| = [H^2 + T_z^2]^{1/2},$$

а также разнообразные трансформанты для вертикальной и горизонтальных составляющих магнитного поля. Последовательно находим производные по переменным  $x, y, z$ :  $V_z, V_{zz}, V_{zzz}, V_{xyz} = V_{sz}, V_{zx}, V_{zax}, V_{zy}, V_{zyy}$  и т. д.

**Изучение основных свойств высших производных магнитного поля на теоретических и практическом примерах.** Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Цель примера – показать свойства аномалий высших производных для вертикальной и горизонтальных составляющих вектора напряженности магнитного поля, обусловленных одним материальным стержнем и, таким образом, не подверженных влиянию других источников. Заданная модель описывается последовательностью параметров (2) и принимает численные значения:

$$c_x = 6 \text{ км}; \quad c_y = 4 \text{ км}; \quad h = 3 \text{ км}; \quad t_x = t_y = t_z = 1 \text{ км};$$

$$l_x = l_y = 100 \text{ нТл}; \quad l_z = 1000 \text{ нТл}.$$

На горизонтальной плоскости  $z = 0$  получены значения аномальных полей для высших производных и их графические изображения. Изолинии поля вертикальной составляющей  $T_z$  и её производных  $V_z, V_{zz}, V_{zzz}$ , по переменной  $z$  на картах имеют вид концентрических окружностей с максимальным значением поля в геометрическом центре, который точно соответствует координатам центра аномального источника в горизонтальной плоскости. Карты  $V_{zx}, V_{zy}$  имеют вид восьмерок, вытянутых вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , поле  $V_{xyz}$  – вид двух восьмерок, разделенных нулевыми изолиниями. Анализируя численные значения производных, можно сделать вывод, что аномалия  $V_{zzz}$  значительно лучше локализует заданный объект, чем все остальные поля, в том числе исходная функция  $T_z$ , её интенсивность в точке максимума в 4 раза меньше значения функции  $V_{zzz}$ .

Другая ситуация наблюдается в полях аномалий горизонтальных составляющих  $T_x$  и  $T_y$ . Их графические изображения состоят из двух частей – положительных и отрицательных значений поля (рис. 1, а, б). Теперь имеется два оптимальных значения, которые уже не соответствуют координатам центра. Геометрические координаты центра тяжести аномального источника можно точно определить: по полю  $T_x$  – координату  $c_y$ , по полю  $T_y$  – координату  $c_x$  (рис. 1, а, б). Эти координаты легко определить по полям производных  $V_x, V_{xx}, V_{xz}, V_{xy}, V_{xz}$  (рис. 1, в, з).

Что касается аномальных полей производных составляющих магнитного поля  $T_x, T_y, T_z$ , то отмечается не только их некоторое подобие, но и равенство, например:

$$\frac{\partial^2 T_z}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 z}, \quad \frac{\partial^3 T_x}{\partial x \partial^2 z} = \frac{\partial^3 T_z}{\partial z \partial^2 x}, \quad \frac{\partial^2 T_z}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 T_y}{\partial^2 z}, \quad \frac{\partial^3 T_y}{\partial y \partial^2 z} = \frac{\partial^3 T_z}{\partial z \partial^2 y}.$$

Можно утверждать, что и свойства этих производных тоже одинаковы. Все карты аномальных полей  $T_x$  и  $T_y$  имеют одинаковую конфигурацию, но вытянуты одна вдоль оси  $Ox$ , другая вдоль оси  $Oy$  соответственно. Этот факт позволяет проводить исследования только одной функции. Для исследований была выбрана функция  $T_x$ .

Далее проведем вычислительный эксперимент с целью определения скорости затухания аномальных полей при увеличении глубины расположения геологического объекта. Напомним, что тело расположено на глубине 3 км. Разместим его на глубине 4 км. Интенсивность полей изменилась. Значения аномальных полей как вертикальной составляющей

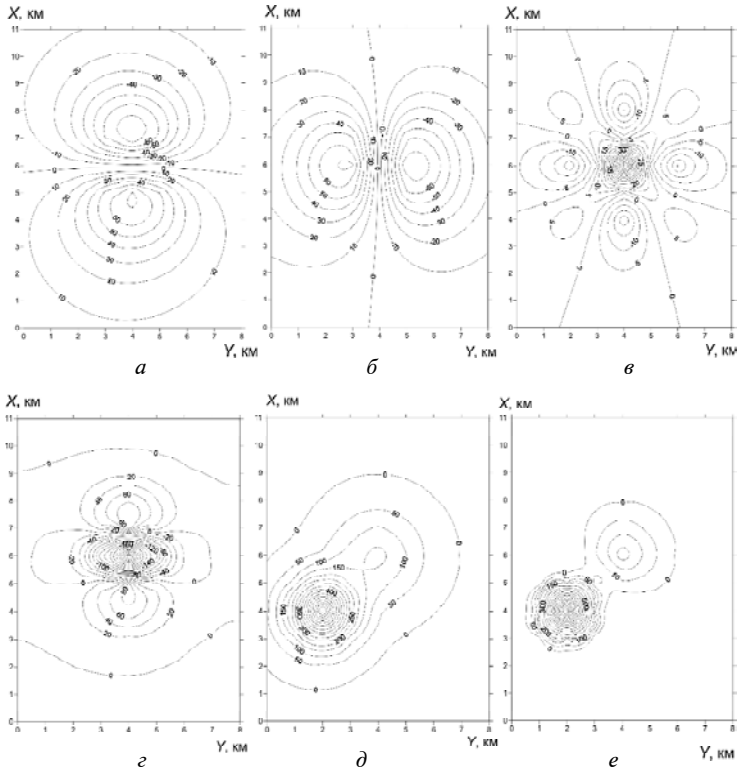


Рис. 1. Исходные магнитные поля и аномалии высших производных: магнитные поля горизонтальных составляющих вектора напряженности, нТл: а –  $T_x$ ; б –  $T_y$ ; производные от функции  $T_x$ , нТл: в –  $V_{xy}$ ; г –  $V_{xz}$ ; магнитное поле вертикальной составляющей вектора напряженности и ее производная, нТл: д –  $T_z$ ; е –  $V_z$

щей  $T_z$ , так и горизонтальной составляющей  $T_x$  уменьшились в 2,5 раза,

поле  $\frac{\partial T_z}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial T_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T_x}{\partial z}$  – почти в 4 раза, и если поле  $\frac{\partial^2 T_z}{\partial^2 z}$  уменьшилось

в 6 раз, то поля производных горизонтальной составляющей  $\frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 x}$  и

$\frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 z}$  – в 5 раз. Отмечается некоторое замедление затухания этих по-

лей. Аномалии производных третьего порядка  $\frac{\partial^3 T_z}{\partial^3 z}$  и  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^3 x}$  уменьши-

лись в 8 раз, а  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^3 z}$  – в 7 раз, т. е. производные третьего порядка по приоритетной переменной затухают с одной и той же скоростью. Расположив объект на глубине 5 км, получаем поля производных с малыми значениями аномалий, а на глубине 10 км – практически нулевые.

**Вывод.** С увеличением глубины расположения возмущающего объекта производные затухают быстрее по сравнению с исходным аномальным полем, причем, чем выше порядок производной, тем процесс затухания происходит быстрее; чем выше степень затухания аномалии, тем меньше ее влияние на область действия других соседних объектов. Таким образом, на картах трансформант места расположения неглубоко залегающих отдельных объектов в плане четко локализируются; влияние глубоко залегающих, даже крупных источников мало отражается на значениях производных высших порядков. Поля производных третьего порядка по приоритетной переменной и горизонтальной, и вертикальной составляющих магнитного поля затухают с одинаковой скоростью.

**Пример 2.** Пусть геологическая модель состоит из двух материальных стержней. Они расположены соответственно на глубинах 2 и 3 км и относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  отстоят друг от друга на расстоянии 2 км. Этот пример определяет несколько свойств производных: горизонтальную разрешающую способность; влияние региональных масс на поля производных; влияние геологических источников, залегающих на разной глубине, но расположенных друг под другом.

**Горизонтальная разрешающая способность производных.** На горизонтальной плоскости  $z = 0$  вычислены аномальные поля производных магнитного поля:  $V_z, V_x, V_y, V_{zz}, V_{zzz}, V_{xyz}, V_{zx}, V_{zx^2}, V_{zy}, V_{zyy}$  и т. д. Анализ графических представлений вертикальной составляющей магнитного поля позволяет уверенно утверждать, что они обусловлены двумя возмущающими источниками, а также точно определить геометрические центры для первого ( $c_y = 4$  км;  $c_x = 2$  км) и второго тела ( $c_y = 6$  км;  $c_x = 4$  км). На рис. 1, *д*, *е* представлены поля  $T_z, V_z$ , которые достаточно ярко отражают ситуацию, как и остальные поля. Напомним, что первое тело расположено на глубине 2 км. В геометрическом центре первого объекта ( $h = 2$  км) значение вертикальной составляющей  $T_z$  в 26 раз слабее значения функции  $V_{zzz}$ . Второе тело расположено на глубине 3 км, его вертикальная составляющая  $T_z$  в геометрическом центре в 4 раза

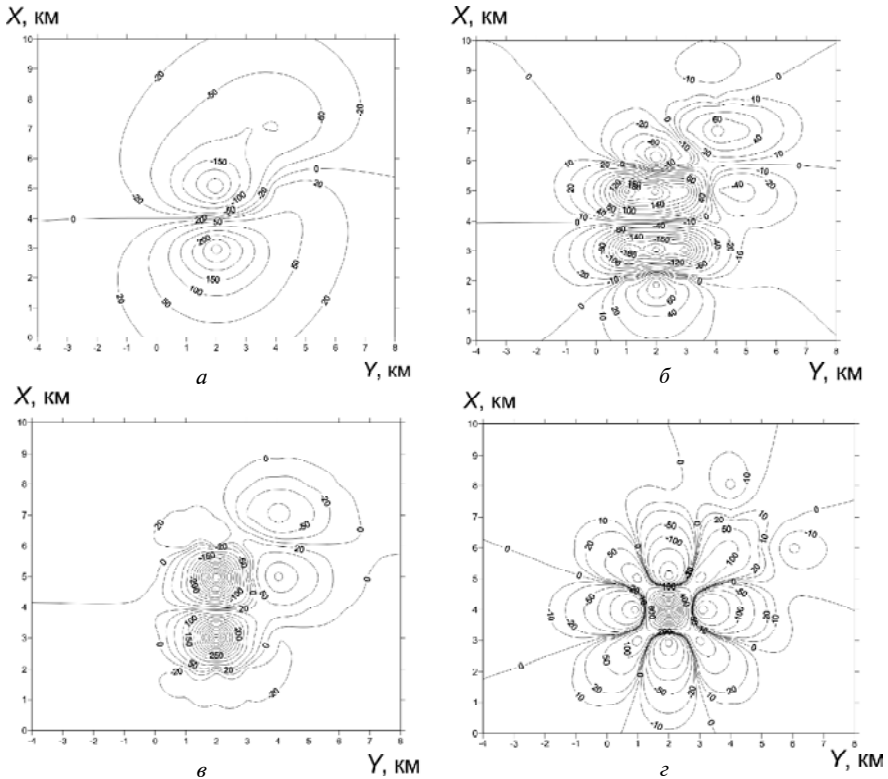


Рис. 2. Магнитные поля горизонтальной составляющей  $T_x$  и ее производных, нТл: а –  $T_x$ ; б –  $V_{xx}$ ; в –  $V_{zz}$ ; г –  $V_{xy}$

меньше значения производной  $V_{zzz}$ , что точно соответствует первому примеру, т. е. влияние объектов друг на друга не проявляется.

На рис. 2 показаны поля горизонтальной составляющей и ее производных:

$T_x$ ,  $\frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 x}$ ,  $\frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 z}$ ,  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial x \partial^2 y}$ . Их конфигурации достаточно слож-

ные, но проявление двух источников четкое. Легко определяются их координаты, только в полях  $T_x$ ,  $V_{xy}$  второй источник проявляется слабо и можно приблизительно указать его координаты. Таким образом, несмотря на специфику аномальных полей трансформант, для горизонтальных составляющих можно получить вполне надежную информацию о строении геологической модели. Сравнив все полученные результаты, можно ут-



верждать, что аномальные поля производных являются большим подспорьем в процессе решения практических задач.

Изменим расстояние между телами на 1,5 км. В аномальных полях производных вертикальной составляющей оба источника проявлены достаточно четко, кроме  $T_z$ . Этот факт свидетельствует о том, что производные обладают свойством разделения полей в большей степени, чем исходное поле.

В аномальных полях производных горизонтальной составляющей ситуация несколько другая. В полях аномалий, больше зависящих от координаты  $x$  или  $z$ , оба источника проявлены четко, особенно

$\frac{\partial^2 T_x}{\partial^2 z}$  и  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^3 z}$ .

Их графические представления практически не изменились. В данном случае можно уверенно указать координаты двух возмущающих объектов. Для аномальных полей производных, больше зависящих от координаты  $y$ , второй источник выражен более слабо, а в поле

$\frac{\partial^3 T_x}{\partial x \partial y \partial y}$  он не

проявляется.

Изменим расстояние между телами до 1 км. Ситуация изменилась. Поля  $T_z$  и  $T_x$  – без проявлений, изолинии всех производных не симметричны, т. е. имеет место легкое влияние второго объекта. В полях аномалий

$\frac{\partial^3 T_z}{\partial z \partial x \partial x}$  и  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^3 z}$  второй объект проявляется. Если значения параметров  $c_x$  у обоих объектов будут одинаковы:  $c_x 1 = c_x 2 = 4$  км, а параметры  $c_y$  – разные, то в аномальных полях производных хорошо проявятся оба источника.

Если значения параметров  $c_x$  у обоих объектов будут одинаковы:  $c_x 1 = c_x 2 = 4$  км, а параметры  $c_y$  – разные, то в аномальных полях производных хорошо проявятся оба источника.

**Вывод.** На графическом представлении аномалий производных места расположения неглубоко залегающих и недалеко отстоящих друг от друга по горизонтали отдельных объектов в плане локализуются четко, даже если по оси  $Ox$  или  $Oy$  координаты объектов принимают одинаковые значения. Этот факт объясняет высокую горизонтальную разделяющую способность производных.

**Исследование влияния региональных масс на аномальные поля производных.** Выбранная геологическая модель состоит из двух возмущающих объектов. На рис. 1, д представлено аномальное магнитное поле, обусловленное выбранной моделью. Усложним геологическую

модель еще одним объектом. Пусть его геометрический центр описывается параметрами:  $c_x = -5$  км,  $c_y = 1$  км,  $h = 2$  км. После решения задачи карты полей практически совпадают с картами, приведенными на рис. 1,  $\delta$ ,  $e$  для полей  $T_z$  и  $V_z$ . Если же сравнить численные значения аномальных полей, то отмечается небольшое влияние дополнительного тела. Разница между полями вертикальной составляющей магнитного поля  $T_z$  определяется единицами первого порядка, а численные значения полей производных почти одинаковые. В полях производных горизонтальной составляющей  $T_x$  влияние этого объекта разное и незначительно

ощущается только в полях производных  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial x \partial y \partial z}$ ,  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial x \partial x \partial z}$  и  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^3 z}$ .

Место расположения дополнительного объекта выбрано на расстоянии 9 км от основной модели, глубина – на уровне первого тела модели ( $h = 2$  км). Далее, расположим третий объект более глубоко  $h = 4$  км. В этой ситуации влияние дополнительного объекта на аномальные поля вертикальной составляющей  $T_z$  не наблюдается. Ситуация для полей производных горизонтальной составляющей  $T_x$  аналогичная.

Усложним фиксированную геологическую модель, добавив еще два объекта. Таким образом, геологическая модель состоит из  $m = 4$  объектов. По оси  $Ox$  первое дополнительное тело поместим на отметке  $c_{x1} = -15$  км, а второе –  $c_{x2} = 25$  км. Оба тела расположим на глубине  $h = 3$  км. Проанализировав результаты решения задачи, отметим, что влияние дополнительных тел проявляется слабо в аномальных полях  $T_z$  и  $T_x$ , в аномальных полях производных влияние практически отсутствует. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае, если увеличить значения интенсивности намагничения дополнительных тел:  $I_z3 = I_z4 = 5000$  нТл. Кроме того, если расположить эти тела на глубине  $h3 = h4 = 1,5$  км, то получим практически те же результаты.

*Вывод.* Влияние глубоко залегающих объектов мало отражается на численных значениях производных. Следовательно, расположение региональных тел на горизонтальной плоскости не имеет значения. Если региональные тела расположены на горизонтальной плоскости на расстоянии, в 5 раз большем, чем площадь, занимаемая основной моделью, то ни глубина их расположения, ни величина вектора интенсивности намагничения не имеют значения. В аномальных полях производных они не проявляются.

**Исследование влияния геологических источников, расположенных на разной глубине.** Выберем модель, состоящую из двух тел: первое располагается на глубине  $h_1 = 1,5$  км, второе – на глубине  $h_2 = 3$  км. Тела расположим друг под другом. Если вычислить аномальное поле  $T_z$  от первого тела и от двух тел и проанализировать их, то аномалия  $T_z$  от двух тел по простиранию больше, чем эта же аномалия от одного тела. Таким образом, второе тело влияет на асимптоты аномальных кривых. Этот факт проявляется и в профильном варианте решения задачи. Другие функции производных мало отличаются друг от друга. На картах аномалий  $V_{sz}$  выберем профиль  $x = 7$  км, графически он представлен на рис. 3, а. Поведение аномалий другое, это хорошо проявляется при сопоставлении графиков. В выбранной модели оба источника имеют одина-

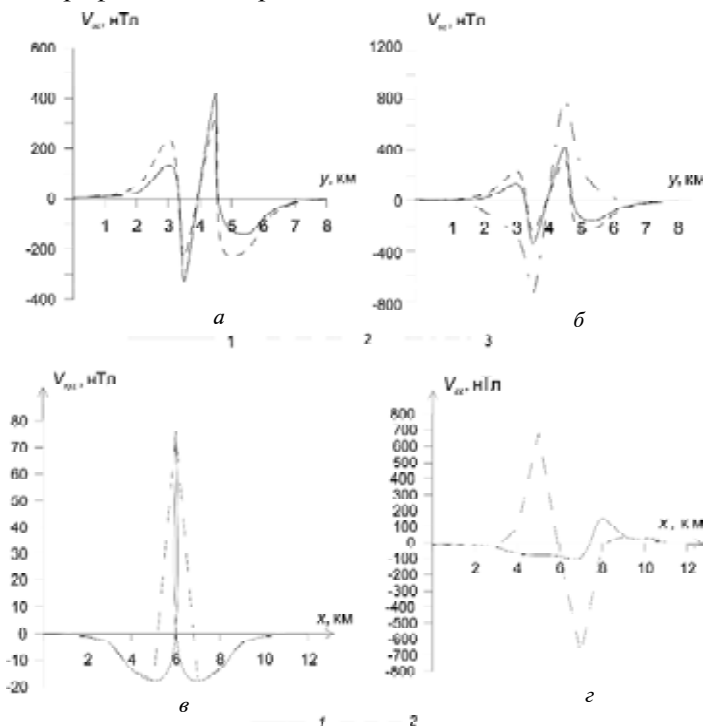


Рис. 3. Производные высших степеней: а, б – графики производной  $V_{sz}$  для вертикальной составляющей  $T_z$  на профиле  $x = 7$  км; 1 – для двух тел при  $I_1 = I_2 = 1000$  нТл; 2 – для одного тела; 3 – для двух тел при  $I_1 = 1000$  нТл,  $I_2 = 5000$  нТл; в, г – графики производной  $V_{sxz}$  и  $V_{szy}$  для горизонтальной составляющей  $T_x$  на профиле  $y = 4$  км; 1 – для двух тел при  $I_1 = I_2 = 1000$  нТл; 2 – для двух тел при  $I_1 = 1000$  нТл,  $I_2 = 5000$  нТл

ковую интенсивность намагничения  $I_z = 1000$  нТл. Предположим, что второе тело обладает большей интенсивностью намагничения, равной  $I_z = 5000$  нТл. Результаты вычислений показаны на рис. 3, б. Профиль выбран тот же:  $x = 7$  км. На рис. 3, а, б – экстремальные точки обеих кривых имеют одинаковую координату  $y$ , что подтверждает существование второго тела, расположенного под первым. Получим аналогичные результаты при анализе аномальных полей горизонтальной составляющей  $T_x$  на профиле  $y = 4$  км. Однако необходимо отметить более четкое влияние второго тела не только на асимптоты полей, но и на градиенты профильных кривых, особенно при увеличении интенсивности намагничения тел (рис. 3, в, г).

*Вывод.* С помощью высших производных и вертикальной, и, более точно, горизонтальной составляющих можно получить полезную информацию о структуре модели и в случае расположенных друг под другом возмущающих тел.

**Практический пример.** По данным профильной геофизической съемки [8, 14, 28] установлено, что интенсивность магнитного поля в пределах Южно-Фрунзовской аномалии достигает 6000 нТл при мощности вскрыши более 650 м. По геофизическим данным на площади аномалии предполагается наличие трех разобщенных мощных магнитоактивных крутопадающих объектов меридионального простирания. На этой площади была пробурена глубокая скважина у с. Плоское. Здесь в базальтовом горизонте палеозойских конгломератов скважиной вскрыты гальки магнитосодержащих кварц-силикатных сланцев с хлоритом, стильпномеланом, сидеритом, вероятно, метаморфизованных в эпидот-амфиболитовой и зеленосланцевой фациях. Железистый состав грубогтерригенной толщи связан с наличием в конгломератах галек железистых кварцитов, а также магнетита и гематита в цементе конгломератов, метагравелитах и метапесчаниках.

Аномальное магнитное поле Фрунзовской зоны обусловлено развитием толщ железистых кварцитов, имеющих значительную протяженность и мощность, глубина погружения которых, согласно геофизическим данным, превышает 3 км.

Исходное аномальное поле исследуемого участка размерностью  $25 \times 8$  км представлено вертикальной составляющей вектора напряженности магнитного поля. В аномальном поле зафиксировано  $n = 234$  точки на уровне  $z = 0$ . Для выбора начальной модели необходимы следующие

щие методические приемы: моделирование по частям сложных объектов; многовариантное решение одной и той же задачи с различными начальными приближениями, модель задавалась с меньшим и большим числом элементарных тел, которые располагались как более глубоко, так и ближе к поверхности; при разных режимах работы программы; при разных вариантах закрепления начальных параметров модели. В конечном итоге для решения трехмерной обратной задачи была построена модель начального приближения, состоящая из 39 стержневых тел. В результате решения получена модель, которая наиболее точно позволяет описать исходное поле аналитическим выражением. Максимальное отклонение между полями равно  $\Delta_{\max} = 464,84$  нТл, среднее отклонение между ними –  $\Delta_{\text{cp}} = 115,32$  нТл, что составляет 1,5 %. Получены приближительные оценки геометрических центров магнитоактивных объектов. На рис. 4, а показаны подобранное теоретическое поле и расположение геометрических центров намагниченных тел подобранной модели в плоскости  $xOy$ . На карте четко прослеживаются три магнитоактивных блока, которые отражены в наблюденном аномальном поле.

Вычислим функции производных и проанализируем полученные результаты. Поле первой производной по переменной  $z$  по конфигурации согласуется с полем  $T_z$ , но отмечаются его затухание и начальный процесс локализации аномальных источников. На карте второй производной  $V_{zz}$  прослеживаются более четкое разделение полей и более интенсивное его затухание [15].

По структуре геологическое строение района Южно-Фрунзовской аномалии достаточно сложное. Как отмечено выше, это слоистая среда различных магнитосодержащих пород. Данный факт подтверждается на профильных графиках производных, где четко проявляются магнитоактивные пластообразные объекты, особенно в левой части исследуемой области (рис. 4, б).

Далее проанализируем аномальные поля горизонтальных составляющих  $T_x$  и  $T_y$  от подобранной модели. На рис. 4, в показана аномалия  $T_x$  с расположением геологических объектов, на рис. 4, г – карта-схема

производной  $\frac{\partial^3 T_x}{\partial^2 x \partial y}$ , конфигурации изолиний характерны для поля  $T_x$ .

Это поле и поля производных хорошо отображают сложность геологического строения исследуемого участка, (рис. 4, г).

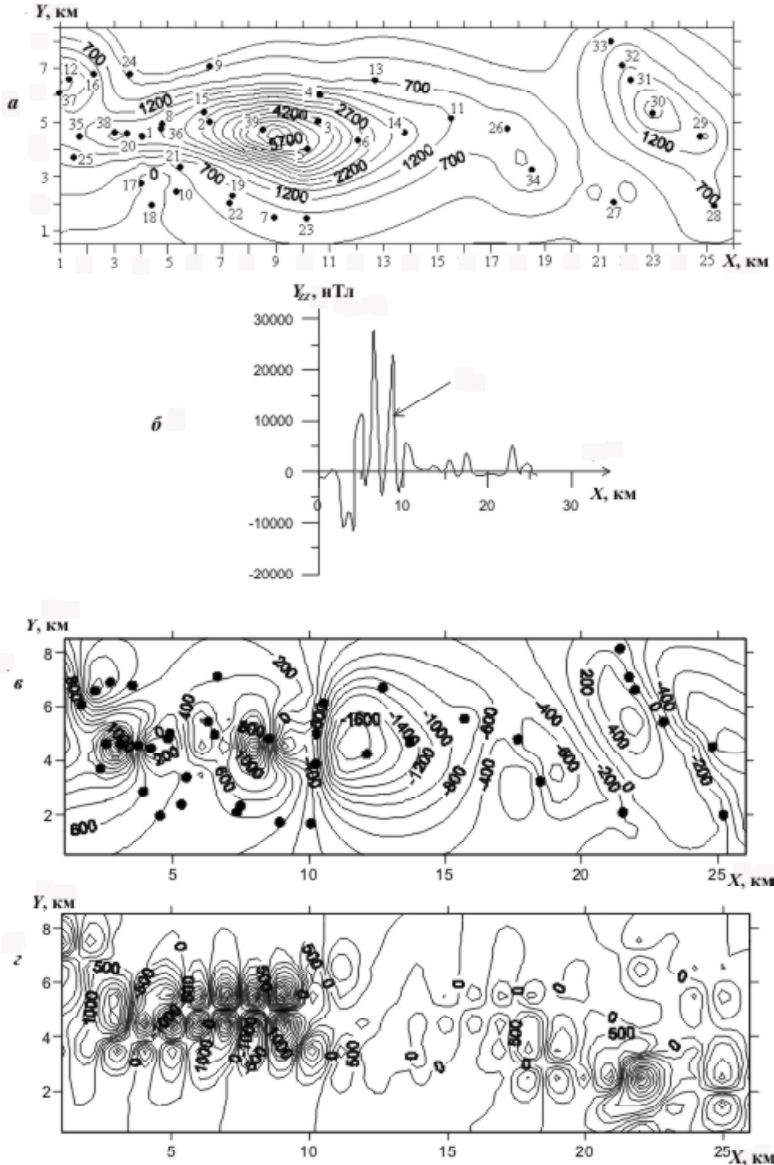


Рис. 4. Участок района исследований: а – аномальное поле вертикальной составляющей  $T_z$ , нТл, от подобранной модели с положением геометрических центров тел в плоскости  $xOy$ ; б – вторая производная  $V_{zz}$ , нТл, на профиле  $y = 5$  км; в – аномальное поле горизонтальной составляющей  $T_x$ , нТл, от подобранной модели с положением геометрических центров тел в плоскости  $xOy$ ; г – производная  $V_{xy}$ , нТл

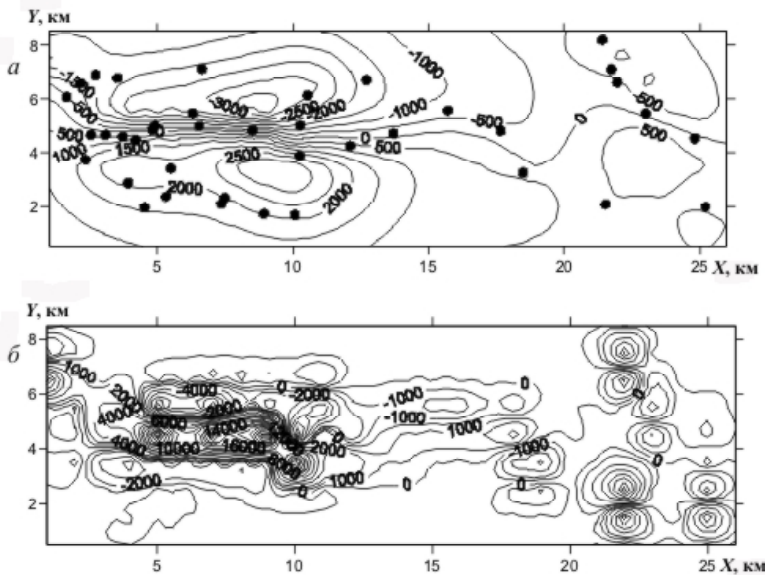


Рис. 5. Участок района исследований. Горизонтальная составляющая  $T_y$ ; *a* – аномальное поле горизонтальной составляющей  $T_y$ , нТл, от подобранной модели с положением геометрических центров тел в плоскости  $xOy$ ; *б* – производная  $V_{zzz}$ , нТл

На рис. 5, *a* приведена аномалия поля  $T_y$  с расположением аномалиеобразующих источников. Для такого сложного участка рисунок аномалии достаточно прост, но поля производных хорошо отображают всю

сложность геологического строения (рис. 5, *б* – поле производной  $\frac{\partial^3 T_y}{\partial^3 z}$ ).

**Вывод.** Анализ проведенных исследований позволяет с уверенностью утверждать, что подобранная геологическая модель адекватна наблюдаемому магнитному полю. Выделены три блока, два из которых обладают высокой магнитной активностью и более мощные по глубине. Первый блок расположен ближе к земной поверхности, верхняя кромка находится на глубине около 1,8 км, нижняя – 4,3 км, максимальное значение интенсивности намагничения равно 7000 нТл. Второй блок расположен ниже первого блока, верхняя кромка находится на глубине около 2,35 км, нижняя – 6,35 км, максимальное значение интенсивности намагничения равно 7000 нТл. Третий блок – верхняя грань расположена на

глубине около 2,5 км, нижняя – 4,1 км, максимальное значение интенсивности намагничивания равно 3500 нТл.

**Заключение.** Изучением основных свойств высших производных магнитного поля завершается цикл работ по исследованию применения аппроксимационного класса трехмерных материальных стержней для решения задач разведочной геофизики. С точки зрения практического использования выбранного аппроксимационного класса отметим следующее:

- 1) процесс параметризации начальной модели достаточно простой (координаты геометрического центра объекта легко определяются по исходному полю, остальные параметры, описывающие модель, подбираются в результате решения обратной задачи);
- 2) если точность решения не удовлетворяет исследователя, легко выполнить корректировку начальной модели по остаточному полю;
- 3) аналитическая аппроксимация исходного поля дает возможность значительно ослабить идеализацию, которая обычно допускается (двумерные задачи, плоская земная поверхность, поле задано в дискретных точках и др.);
- 4) аналитические гармонические функции наблюдаемых полей позволяют проводить различные преобразования и трансформации, вычислять высшие производные, значение которых, как подтверждают исследования, трудно переоценить.

1. *Алексидзе М.А.* Редукция силы тяжести / М.А. Алексидзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 255 с.
2. *Андреев Б.А.* Геологическое истолкование гравитационных аномалий / Б.А. Андреев, И.Г. Клушин. – Л.: Недра, 1965. – 496 с.
3. *Архипов Ю.Р.* Математические методы в географии / Ю.Р. Архипов, Н.И. Блажко, С.В. Григорьев и др. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1976. – 352 с.
4. *Балабушевич И.А.* Высшие производные потенциала силы тяжести и возможности их использования в геологической гравиметрии / И.А. Балабушевич. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – 268 с.
5. *Булах Е.Г.* К вопросу о построении аналитической модели внешнего магнитного поля / Е.Г. Булах, Е.П. Лапина // Геофиз. журн. – 2008. – Т. 30, № 2. – С. 42–50.
6. *Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии / Е.Г. Булах. – Киев: Наук. думка, 2010. – 462 с.
7. *Веселов К.Е.* Применение второй вертикальной производной потенциала силы тяжести при геологическом истолковании гравиметрической съёмки / К.Е. Веселов // Прикладная геофизика. – 1954. – № 11. – С. 152–162.



8. *Железисто-кремнистые* породы Фрунзовских магнитных аномалий Украинского щита / Л.С. Галецкий, Н.Е. Деренюк, Д.И. Богач, М.А. Ярошук, Ю.С. Лебедев, А.В. Вайло // Геол. журн. – 1985. – Т. 45, № 5. – С. 1–12.
9. *Керимов И.А.* Метод F-аппроксимаций при решении задач гравиметрии и магнитометрии: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 25.00.10 / И.А. Керимов. – М., 2004. – 53 с.
10. *Логвинов В.Е.* Методика интерпретации магнитных аномалий на ЭВМ методом подбора: автореф. дис. ... канд. геол.-минерал. наук: 04.131 / В.Е. Логвинов. – Киев, 1970. – 20 с.
11. *Магниторазведка:* [справочник геофизика / под ред. В.И. Никитского, Ю.С. Глебовского]. – [2-е изд.]. – М.: Недра, 1990. – 470 с.
12. *Маловичко А.К.* Основной курс гравиразведки / А.К. Маловичко. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1960. – Ч. 1 – 322 с.; 1962. – Ч. 2. – 278 с.
13. *Маловичко А.К.* Использование высших производных при обработке и интерпретации результатов геофизических наблюдений / А.К. Маловичко, О.Л. Тарунина. – М.: Недра, 1981. – 186 с.
14. *Маркова М.Н.* Практический опыт использования программного обеспечения, реализующего алгоритм аппроксимации потенциальных полей аналитической функцией, и решение обратных задач / М.Н. Маркова, Е.П. Лапина // Геоинформатика. – 2012. – № 2 (42). – С. 30 – 37.
15. *Маркова М.Н.* Высшие производные магнитного поля, их исследование и возможности практического использования для решения задач магнитометрии / М.Н. Маркова, Е.П. Лапина // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики. 36. наук. праць. – К. – 2013. – Вип. 10. – С. 81 – 98.
16. *Панов Е.В.* Изучение токовых слоёв на границе магнитосферы Земли по данным четырёх спутников КЛАСТЕР: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.03.03 / Е.В. Панов. – М., 2007. – 111 с.
17. *Сапужак Я.С.* Высшие производные электрического потенциала в геофизической разведке / Я.С. Сапужак – К.: Наук. думка, 1967. – 154 с.
18. *Серкеров С.А.* Теория гравитационного и магнитного потенциалов / С.А. Серкеров. – М.: Недра, 1990. – 304 с.
19. *Серкеров С.А.* Гравиразведка и магниторазведка / С.А. Серкеров. – М.: Недра, 1999. – 437 с.
20. *Старостенко В.И.* Определение вертикальных производных потенциала притяжения по результатам наблюдений с горизонтальным гравитационным градиентометром / В.И. Старостенко. – Киев: Наук. думка, 1970. – 100 с.
21. *Степанов В.П.* Разломная тектоника кристаллического фундамента восточной части Волжско-Камской антеклизы и её взаимоотношение со структурой осадочных толщ: По данным геолого-геофизических методов: дис. ... д-ра геол.-минерал. наук: 25.00.10 / В.П. Степанов. – Казань, 2002. – 487 с.
22. *Страхов В.Н.* О путях построения математической теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий / В.Н. Страхов // Прикл. геофизика. – 1962. – Вып. 35. – С. 95–128.
23. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. Методологические основы математической геофизики / В.Н. Страхов // Геофизика. – 2000. – № 1. – С. 3–18.
24. *Страхов В.Н.* Интерпретационные процессы в гравиметрии и магнитометрии – это реализация единого аппроксимационного подхода. Основные идеи и конструктивные принципы / В.Н. Страхов // Физика Земли. – 2001. – № 10. – С. 3–18.

25. *Ткебучава В.В.* Методы фильтрации и трансформации потенциальных полей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.12 / В.В. Ткебучава. – Тбилиси, 1984. – 210 с.
26. *Тяпкин К.Ф.* Интерпретация гравитационных аномалий, обусловленных пластовыми структурами, путём использования третьих производных гравитационного потенциала / К.Ф. Тяпкин. – Киев: Изд-во НТГО, 1957. – 36 с.
27. *Тяпкин К.Ф.* Краткий обзор современных методов ослабления регионального фона гравитационного и магнитного полей / К.Ф. Тяпкин, Г.Я. Голиздра. – М.: ОНТИ ВИМС, 1963. – 51 с.
28. *Ярошук М.А.* Генетические особенности пород железисто–кремнистой формации Фрунзовской зоны Украинского щита / М.А. Ярошук, А.В. Вайло, Л.Т. Савченко // Геол. журн. – 1989. – № 3. – С. 105–113.

**Дослідження та можливості практичного застосування вищих похідних магнітного потенціалу для розв’язання задач магнітометрії** Маркова М.М., Лапіна О.П.

Запропоновано метод проведення якісного аналізу вихідних даних на основі використання деякої сукупності похідних вищої степеня та аналітичної апроксимації потенціальних полів. Показано, що використані функції похідних магнітного поля дають змогу в багатьох випадках значно краще локалізувати збурювальні об’єкти, ніж вихідна функція магнітного поля. Викладено результати досліджень вищих похідних магнітного потенціалу на теоретичних і практичному прикладах. При інтерпретації потенціальних полів можна знаходити економічно ефективний варіант розв’язку, використовуючи наведені матеріали, відповідно до поставленої задачі.

**Ключові слова:** аналітична апроксимація, потенціальні поля, гармонічна функція, похідні вищих степенів, клас тривимірних матеріальних стрижнів, геологічний об’єкт, якісний аналіз.

**Research and practical applications of higher derivative of magnetic potential to solve problems of magnetometry** M.N. Markova, E.P. Lapina

The method of conducting qualitative analysis of initial data on the basis of use of a certain number of derivatives of higher degrees and analytical approximation of potential fields. In the paper it is shown, that the derivatives of functions of the magnetic field make it possible in many cases much better localize the disturbing objects than the observed function of the magnetic field. The results of research of the higher derivatives of the vertical component of the vector of magnetic field intensity on the theoretical and practical examples. The materials of the work will help in the interpretation of potential fields to find cost-effective variant of the decision in accordance with the task.

**Keywords:** analytical approximation, the potential of the field, harmonic function, derivatives of the highest degree, a class of three-dimensional material rods, geological object, a qualitative analysis.