УДК 519.876.5

Э.Н. Сабзиев[1], Г.Г. Оруджов[2], А.Б. Пашаев[3]

[1]Компания Kiber Ltd, г. Баку, Азербайджан
[2]InfoSpace, г. Баку, Азербайджан
[3]Институт кибернетики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПО РЕЛЬЕФУ

Ставится задача установления траектории течения на основе заданного конечного количества точек линий уровня, определяющего рельеф района исследования. Линии уровня аппроксимируются применением Catmull-Rom-сплайнов. Для моделирования рельефа применяется идея "гибкой мембраны", натянутой на контур, который состоит из замыкающих линий уровня. Затем в каждой точке рельефа вычисляется направление наибольшего спуска. Приводится оценка предложенного алгоритма.

Ключевые слова: траектория течения, поверхность, алгоритм, течение жидкости, рельеф, моделирование, сплайн.

Введение. В различных ситуациях приходится иметь дело с течением жидкости по поверхности некоторого рельефа, например: сток дождевых или талых вод, направление селевых потоков и загрязняющих веществ, а также при техногенных авариях и др. Предварительное знание траектории течения было бы полезным как при проектировании и строительстве новых обьектов, так и при минимизации отрицательных последствий различных аварий, связанных с нежелательным потоком жидкости по поверхности рельефа. Вместе с тем при орашаемом земледелии можно рассмотреть задачу определения места расположения источника воды таким образом, чтобы из одного источника можно было поливать максимальную площадь. Перечисленные задачи приводят к вопросу определения траектории движения жидкости по заданному рельефу.

Рельеф с некоторыми приемлемыми допущениями является поверхностью. С математической точки зрения поверхность представляется числовой функцией $u = u(P)$, заданной в определенной области Ω некоторой плоскости, например, плоскости Oxy, где $P \in \Omega$. Традиционная форма задания рельефа – набор (комплект) линий уровня. В терминах функционального представления линия уровня, соответствущая заданной высоте h, – это множество точек $P \in \Omega_h$, для которых $u(P) = h$. Очевидно, линия уровня есть непрерывный континуум, и при применении вычислительных технологий необходимо векторизовать их и тем самым задавать рельеф вместо комплекта линий уровня конечным количеством точек.

В данной работе ставится задача выяснения траектории течения на основе заданного конечного количества точек линий уровня определяющий рельеф района исследования. Для этого необходимы:

- аппроксимация линии уровня;
- моделирование рельефа;
- определение траектории течения.

Следует отметить, что хотя линии уровня сами по себе являются некоторой аппроксимацией поверхности рельефа, в свою очередь, их тоже необходимо аппроксимировать на основе заданного конечного количества точек. Самая простая аппроксимация, применяемая на практике, – кусочно-линейная, когда точки, относящиеся к одной и той же линии уровня, соединяются отрезками. Во многих случаях более адекватным оказывается применение различных сплайн-аппроксимаций. Сплайны – это кусочно-полиномиальные функции, которые обладают определенной гладкостью и широко применяются при аппроксимации кривых. При визуализации это дает более реалистическое представление о рельефе (см., напр.: [1, 3]). В нашей работе для аппроксимации линий уровня применен Catmull-Rom-сплайн [8].

Для моделирования рельефа использована идея “мыльной пленки”, которая натянута на контур, составленный замыканием линий уровня. При численной реализации модели получается распределение высот рельефа местности в узлах выбранной сетки. Затем на каждой узловой точке поверхности определяется уклон наибольшего спуска и строится траектория движения жидкости.

Аппроксимация линий уровня. На первом этапе решим задачу аппроксимации линий уровня на основе заданного конечного числа точек на ней. С этой целью применим сплайн-функцию. Сплайны задаются конечным набором (последовательностью) базовых точек, которые определяют их. Существуют различные методы построения сплайнов при одной и той же последовательности базовых точек. Дополнительным требованием к сплайну может быть его прохождение через базовые точки. Другими словами, аппроксимация одновременно может быть и интерполяцией. Одним из таких сплайнов является сплайн-функция, которая предложена в 1974 г. E. Catmull и R. Rom [8], алгоритм построения которого приводится ниже.

Для генерации полинома, соединяющего две точки P_1 и P_2, требуется, чтобы по обе стороны от интервала P_1P_2 было задано еще по одной точке. Кривая представляется как полином параметра $t \in [0, 1]$, где его образ пробегает по полиному (в данном случае по кубическому), соединяя точки P_1 и P_2. Для заданных точек P_0, P_1, P_2 и P_3 заданного параметра t сплайн определяется по формуле

$$q(t) = \frac{1}{2}\Big((-P_0 + 3P_1 - 3\times P_2 + P_3)t^3 + (2P_0 - 5P_1 + 4P_2 - P_3)t^2 + (-P_0 + P_2)t + 2P_1\Big).$$

При соединении последовательности точек P_1, P_2, ... , P_k по такому правилу получается некоторая кривая аппроксимации. Таким образом, можно аппроксимировать линии уровня кубическим многочленом, проходящим через известные точки на них.

Моделирование рельефа. Существуют различные подходы моделирования местности. Например, в системе ArcGIS для моделирования рельефа в качестве входных данных используется растровое представление поверхности Земли [6]. Известная программа AutoCAD Civil 3D использует линии, образующие триангуляционную сеть поверхности (линии TIN) для расчета областей, по которым потечет вода. Эти линии TIN создаются в AutoCAD Civil 3D посредством соединения точек поверхности, расстояние между которыми является наименьшим. На основе рассчитанных областей определяются точки стока и водосборы [7]. Все подходы к моделированию направлены на то, чтобы смоделированный рельеф более адекватно описывал реальную геометрию поверхности рельефа. Указанные выше подходы к описанию рельефа базируются на растровом описании поверхности, т. е. рассматриваемая область разбивается на конечное число подобластей, затем для каждой подобласти определяется высота поверхности. При дальнейшей обработке поверхности, например при визуализации, каждая точка обрабатывается отдельно.

В отличие от перечисленных подходов, предлагаемый нами подход основан на векторном представлении поверхности. Несмотря на то что такой подход может уступать подходам, упомянутым выше, по точности аппроксимации поверхности, при его применении обрабатывается гораздо меньшее количество данных (точек), чем при растровом методе. Следовательно, в задачах, где требуется дальнейшая обработка поверхности, предлагаемый подход оказывается более эффективным по быстродействию и памяти вычислителя.

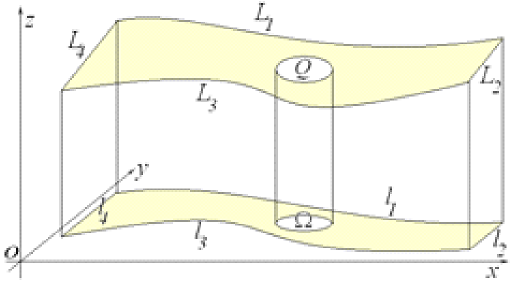

Рис. 1. Полоса рельефа $L_1L_2L_3L_4$

Как указано выше, предполагаем, что поверхность рельефа может быть представлена в виде гибкой мембраны, натянутой на контур, который составлен замыканием линий уровня. Так как движения однородной мембраны описывается уравнением гиперболического типа $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, то уравнение установившегося движения будет иметь вид (уравнение Лапласа)

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Практическая реализация показывает, что уравнение Лапласа достаточно хорошо аппроксимирует поверхность рельефа (см., напр.: [2]). Следует отметить, что в работе [4] предложена модель рельефа в форме невесомой мыльной пленки. Указано, что уравнение невесомой мыльной пленки также описывается уравнением Лапласа (1).

Рассмотрим область, образованную отрезками линий уровня. Пусть заданы линии уровня L_1 и L_3 (рис. 1), соответствующие высотам h_1 и h_3, которые содержат в себе местность Q, представляющую интерес для данной геоинформационной задачи. Соединив линии L_1 и L_3 отрезками L_2 и L_4, получим замкнутый контур. Рассмотрим проекцию контура $L_1L_2L_3L_4$ на плоскость Oxy и обозначим ее через $l_1l_2l_3l_4$. Этот контур описывает некоторую область Ω, ограниченную условием $\partial\Omega \equiv l_1l_2l_3l_4$. Рассмотрим поверхность рельефа как решение уравнения (1) при соответствующих краевых условиях.

Оценка точности аппроксимации. Приведем постановку модельной задачи. Пусть $b >> 1$ – некоторое достаточно большое число. Обозначим $\Omega_b = \{0 < x < b, -\pi < y < \pi\}$. Нетрудно видеть, что Ω_b представляет собой полосу шириной 2π и длиной b.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольной полосе $\Omega_b = \{0 < x < b, -\pi < y < \pi\}$:

$$\Delta u = 0, (x, y) \in \Omega_b, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{y=\pm\pi} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{x=b} = \varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)$, $-\pi \le y \le \pi$ достаточно гладкая функция и такая, что $\varphi(\pm\pi) = 0$. Очевидно, решение задачи (2)–(4), зависит от значения параметра b, и, явно указывая на это, запишем

$$u = u(x, y, b).$$

Ниже приводятся две теоремы без доказательства [5].

Теорема 1. *Пусть $u = u(x, y, b)$ – решение задачи (2)–(4). Тогда при $0 < x < 1 << b$ справедлива оценка*

$$|u(x, y, b + \Delta b) - u(x, y, b)| \le |\varphi(y)| e^{x-b} |\Delta b|. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть $u = u(x, y, b)$ – решение задачи (2)–(4). Тогда при $0 < x < 1 << b$ справедлива оценка*

$$u|x, y, b| \le |\varphi(y)| e^{x-b} |\Delta b|. \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) показывают, что если узловые точки контура $L_1L_2L_3L_4$ достаточно удалены от местности Q, то способы замыкания области и доопределения краевых значений слабо влияют на результаты вычисленных значений высоты поверхности точек Q.

Алгоритм нахождения траектории движения жидкости. Предположим, что координаты точки, где расположен источник потока, заданы. Опишем алгоритм определения траектории движения потока жидкости с учетом рельефа местности.

1. Проводится аппроксимация линий уровня Catmull-Rom-сплайнами.
2. Определяются линии уровня, между которыми содержится источник потока. В частности, этот источник может оказаться на какой-либо из линии уровня. В таком случае подбираем в качестве второй линии другую линию уровня, которая соответствует сравнительно низкой высоте.
3. Выбираются достаточно удаленные точки и замыкаются линии уровня. Таким образом, определяем некоторую поверхность, ограниченную замкнутым контуром $L_1L_2L_3L_4$, и ее проекцию Ω.
4. Вводится в проекцию Ω равномерная сетка, аппроксимирующая краевые значения, и численно решается уравнение (3). Решение в узловой точке (i, j) обозначим посредством u_{ij}.

5. Для каждой текущей точки (i, j) из аппроксимирующей сетки, начиная с точки расположения источника, определяется наименьший среди всех $u_{i-1\,j-1}$, $u_{i\,j-1}$, $u_{i+1\,j-1}$, $u_{i-1\,j}$, $u_{i+1\,j}$, $u_{i-1\,j+1}$, $u_{i\,j+1}$, $u_{i+1\,j+1}$. Обозначим его через u_{km}. Направление движения потока принимается от точки (i, j) к точке (k, m).
6. Как известно из свойств уравнения Лапласса, между линиями уровня не может быть локального минимума функции u. Следуя такому принципу подбора (пункт 4), дойдем до некоторой точки на нижней линии уровня. Конец задачи может наступить на некоторой линии уровня. Задачу будем считать решенной, если найденная точка выйдет за пределы интересующей нас области или будет найдена самая низкая линия уровня. Если на данном шагу конец задачи не наступит, то процесс продолжаем с пункта 2.

Заключение. Рассмотрена задача нахождения траектории течения жидкости по поверхности заданного рельефа. Силы сопротивления, силы инерции, а также поглощения жидкости не учитываются. Считается, что рельеф задается линиями уровня. В качестве исходных данных о линиях уровня принимается набор координат выделенных характерных точек на них. В ходе исследования были поставлены и решены следующие задачи.

- Интерполяция линий уровня применением Catmull-Rom-сплайнов. Такой процесс векторизации важен и для визуализации поверхности в дальнейшем.
- Моделирование поверхности рельефа в виде невесомой гибкой мембраны. Поверхность рельефа рассматривается как гибкая мембрана, натянутая между линиями уровня. Если считать, что амплитуда колебаний равно нулю, то состояние мембраны можно принимать как некоторую аппроксимацию поверхности рельефа. На примере модельной задачи доказано, что такая модель поверхности мало зависит от выбора аппроксимации линий уровня.
- Определение направления течения. Имея модель поверхности рельефа (в виде уравнения или в виде таблицы), в каждой точке поверхности можно вычислить градиент к поверхности. Проекция этой нормали на базовую плоскость будет направлением наибольшего уклона в данной точке. Следовательно, жидкость из данной точки будет двигаться в указанном направлении.

Таким образом, разработанный алгоритм может быть применен при исследовании различных задач течения жидкости по поверхности рельефа.

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
2. *Алгулиев Р.М., Оруджов Г.Г., Панахов Н.А., Сабзиев Э.Н.* Имитационная модель рельефа местности // Труды IV Междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления", Москва, 25–28 янв. 2005 г. – М., с.738–740.
3. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М., 1985. – 304 с.
4. *Ким П.А.* Математический конструктив мыльной пленки в масштабируемом рельефе: Сб. материалов V Междунар. науч. конгр. "ГЕО-СИБИРЬ-2009". – Новосибирск, 2009. – Т.4, ч.1. – С.158–162.
5. *Пашаев А.Б., Сабзиев Э.Н.* Об оценке влияния вариации удаленных граничных данных на решение уравнения Лапласа / Abstracts of the Inter. Conf. on Actual Problems of Mathematics and Informatics, Baku, May 29–31, 2013. – Baku, Azerbaijan, 2013. – P.188–190.
6. *ArcGIS* Resources. Что такое цифровые модели рельефа. – http://resources.arcgis.com/ru/help/main/10.1/index.html#//009z0000005n000000
7. *AutoCAD* Civil 3D. Выполнение анализа водосборов и стока воды: Учеб. пособие. – http://docs.autodesk.com/CIV3D/2013/RUS/index.html?url=filesCTU/GUID-23EC67A6-0084-4DAC-B58F-141155DB7E29.htm,topicNumber=CTUd30e9185
8. *Catmull E., Rom R.* A class of local interpolating splines // In Computer Aided Geometric Design / Eds R.E. Barnhill and R.F. Reisenfeld. – New York: Acad. Press, 1974. – P. 317–326.

Алгоритм визначення траєкторії течії рідини по рельєфу Е.Н. Сабзієв, Г.Г. Оруджов, А.Б. Пашаєв

Поставлено задачу виявлення траєкторії течії на основі заданої скінченної кількості точок ліній рівня, що визначає рельєф району дослідження. Лінії рівня аппроксимовано застосуванням Catmull-Rom-сплайнів. Для моделювання рельєфу застосовано ідею " гнучкої мембрани", натягнутої на контур, що складений замиканням ліній рівня. У кожній точці рельєфу обчислено напрямок найбільшого спуску. Наведено оцінку запропонованого алгоритму.
Ключові слова: траєкторія течії, поверхня, алгоритм, плин рідини, рельєф, моделювання, сплайн.

The algorithm of determining the trajectory of the fluid flow on the relief E.N. Sabziev, G.H. Orujov, A.B. Pashayev

In this paper one formulate the determination the trajectory of the flow, based on a given finite number of points of level determines the topography of the study area. The level curves are approximated by using Catmull-Rom splines. For modeling the relief applies the idea of "flexible membrane" stretched over a contour formed by closing level lines. Then at each point the maximum elevation descent direction is computed. The convergence estimate of the proposed algorithm is given.
Keywords: the flow trajectory, surface, algorithm, fluid flow, relief, modeling; spline.