

УДК 550.36(045)

Н.И. Бахова

*Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,
просп. Акад. Палладина, 32, Киев 03680, Украина,
e-mail: bakhova_nataly@mail.ru*

ВЛИЯНИЕ НЕУСТРАНИМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ЭКОНОМИЧНОСТЬ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АЛГОРИТМА

Проведен практический анализ распределения погрешностей метода конечных элементов для распределения температуры в двумерной неоднородной геологической среде. Разработана методика определения необходимой точности вычислений. Предложено несколько способов вычислений, с помощью которых можно достигнуть наилучших результатов при экономных затратах вычислительного труда.

Ключевые слова: геологическая среда, погрешность, метод конечных элементов, вычислительный эксперимент.

Введение. Процесс исследования геологического объекта методом математического моделирования и вычислительного эксперимента носит приближенный характер, так как на каждом этапе исследований имеются те или иные погрешности. Совершенно очевидно, что разработка эффективных методик вычислений и высокая квалификация исследователя-вычислителя повышают точность конечного результата.

А priori можно утверждать, что результаты, содержащие наименьшие отклонения вычисленных значений от истинных (точных), больше подходят исследователям. На этом основании требования к точности вычислений иногда завышены и не соответствуют действительной необходимости и реальным возможностям.

Совершенно безошибочные результаты получить невозможно. Поэтому вычислительный процесс необходимо построить таким образом, чтобы результаты были получены с некоторой заданной точностью. Понятие “заданная точность” должно сопровождаться определенными численными критериями.

Анализ исследований. Основные вопросы теории ошибок вычислений можно сформулировать следующим образом:

- изучение законов возникновения и распределения ошибок вычислений;

- оценка ожидаемой точности и определение точности окончательных результатов вычислений.

Выбор физической и математической модели неизбежно связан с упрощением исходного физического явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других исходных данных. Относительно численного метода, с помощью которого исследуется данная математическая модель, указанные погрешности неустраняемы, поскольку в рамках данной модели избежать их невозможно [9].

При переходе от математической модели к численному методу возникают погрешности метода дискретизации и округления [9].

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) широко используется при решении самых разнообразных задач математической физики. Главный недостаток любого вариационного метода, в частности МКЭ, – сложность получения априорных оценок. Надежность метода проверяется апробированием каждой программы на точных решениях [4].

Решение, полученное на основе конечно-элементной дискретизации, неизбежно отличается от точного. Источники отклонений следующие [5]:

- 1) конечно-элементная дискретизация пространства;
- 2) аппроксимация базисными функциями, которые определяются поэлементно с помощью локальных функций;
- 3) ошибки округления.

Величину ошибок группы 1 можно уменьшить, если сгустить конечно-элементную сетку в областях высоких градиентов.

Ошибки группы 2 определяются типом используемого конечного элемента. При неизменном типе элемента величина таких ошибок снижается при увеличении числа разбиений пространства на элементы. Повышение точности аппроксимации решения при фиксированной сетке конечных элементов может быть достигнуто последовательным повышением степени базисных функций.

Обе группы ошибок в значительной степени зависят от опыта исследователя в конструировании конечно-элементных сеток. Величина таких ошибок может быть заведомо уменьшена до приемлемого уровня в процессе постановки задачи.

Ошибки группы 3 сугубо математические. Конечномерный аналог исходной математической задачи дискретная модель представляет собой систему большого числа алгебраических уравнений. Решение такой системы точно и в явном виде найти невозможно. Входные данные си-

стемы (коэффициенты и правые части) задаются в ЭВМ с округлением. Погрешность округления или вычислительная погрешность в процессе работы алгоритма накапливается. Величина вычислительной погрешности определяется двумя факторами [9]:

- точностью определения вещественных чисел в ЭВМ;
 - чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.
- Однозначный ответ на вопрос какая из трех погрешностей (погрешность модели, метода и вычислительная) преобладает дать невозможно.

При решении задач математической физики возникают следующие ситуации [9]:

- погрешность модели значительно превышает погрешность метода, тогда погрешностью округления в случае устойчивых алгоритмов можно пренебречь по сравнению с погрешностью метода;
- при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений применяются столь точные методы, что их погрешность сравнима с погрешностью округления.

В общем случае необходимо придерживаться следующей стратегии: указанные погрешности должны иметь один и тот же порядок [9].

Цель работы – исследование влияния неустранимых погрешностей на конечно-элементное решение.

Постановка проблемы. Семейства конечных элементов отличаются друг от друга числом степеней свободы. Возникает вопрос: можно ли получить преимущества экономического или другого характера, усложняя элемент путем увеличения числа степеней свободы.

При заданной степени точности усложнение элемента приводит к уменьшению общего числа неизвестных. Однако экономичность алгоритма определяется как временем счета, так и степенью сложности подготовки входных данных [4, 5, 8].

С одной стороны, элементы должны быть выбраны достаточно малыми, чтобы получались приемлемые результаты, с другой – применение достаточно крупных элементов сокращает вычислительную работу. Практический анализ распределения погрешностей становится незаменимым инструментом в проведении уточнения конечно-элементного решения.

Необходимо иметь некоторые общие соображения об окончательном приближенном решении с тем, чтобы можно было уменьшить размеры элементов в тех областях, где ожидаемый результат может силь-

но изменяться (большие величины градиентов), и увеличить их там, где ожидаемый результат почти постоянен [2; 3].

Анализ полученных результатов. Для иллюстрации возможной на практике точности в качестве примера рассмотрим двухслойную среду (рис. 1). Размеры среды даны в абсолютных единицах. Теплопроводность k , генерация тепла Q и тепловой поток q приближены к реальным значениям. Требуется найти распределение температуры в данной области.

Определяющим уравнением для такой задачи является уравнение Пуассона

$$k \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right\} + Q = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями Дирихле на верхней части границы

$$T = 0^\circ \text{C}, Y = 0 \text{ км} \quad (2)$$

и условиями Неймана на остальной части

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, X = 0 \text{ км}; \quad (3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, X = 60 \text{ км}; \quad (4)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = 20 \text{ мВт/м}^2, Y = 40 \text{ км}. \quad (5)$$

В принципе, здесь можно получить точное решение, так как условия в направлении X не изменяются и задачу можно рассматривать как одномерную:

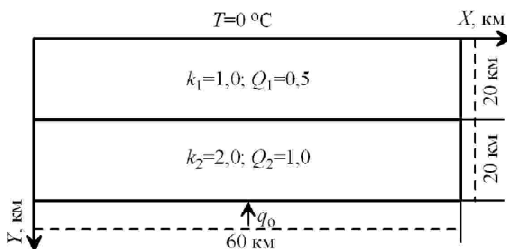


Рис. 1. Двумерная задача теплопроводности в двухслойной среде

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0.$$

Областью определения задачи является отрезок $0 \leq Y \leq 40$ км. Аналитическое решение дифференциального уравнения для одномерного случая имеет вид

$$T = T_s + \frac{q_s}{k} y - \frac{Q}{2k} y^2,$$

где T_s , q_s – температура и тепловой поток на поверхности модели, соответственно.

Для данной задачи конечно-элементная сетка содержит 48 элементов и 35 узлов (рис. 2). Узловыми параметрами треугольных элементов являются значения температуры в узлах. Такие элементы называются лагранжевыми.

На рис. 3 показаны результаты решения уравнения (1) с граничными условиями (2)–(5). Сравнение их с точным решением (значения во второй точке) показывает, что использование линейной аппроксимации температуры при разбиении области на 48 элементов приводит к решению, которое расходится с аналитическим не более чем на 0,6 %.

Задача теплопроводности двухслойной среды может решаться и с помощью элементов другой полигональной формы.

Во многих случаях целесообразно использовать в качестве параметров значения не только функции, но и ее производных. Это так называемые

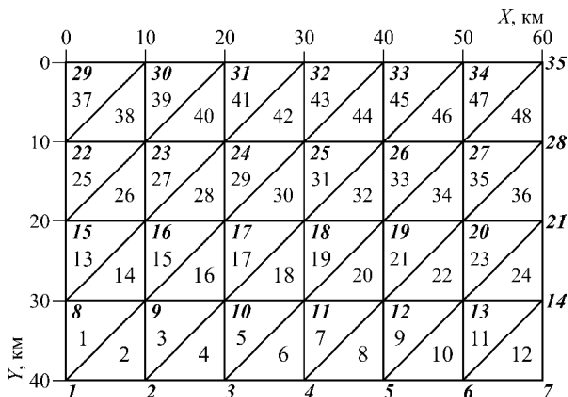


Рис. 2. Разбиение области на конечные элементы

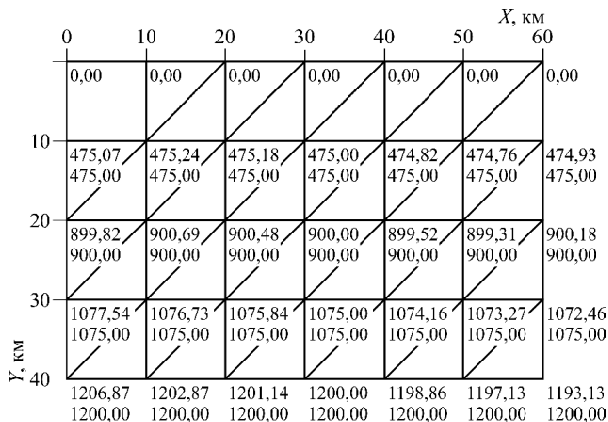


Рис. 3. Распределение температуры в двухслойной среде

мые эрмитовы элементы [8]. Их преимущество состоит в том, что наряду с искомой температурой T можно одновременно определить значения теплового потока q_x и q_y . Кроме того, введение базисных функций высших степеней позволяет получить более точную аппроксимацию решения рассматриваемой задачи. При применении простых треугольных элементов уточнить решение можно только с помощью последовательного измельчения сетки.

Вернемся к задаче теплопроводности двухслойной среды. Воспользуемся теперь локальной системой координат (ξ, η) . В качестве элемента выберем треугольный эрмитов элемент с четырьмя узлами (рис. 4). Геометрия элемента с четырьмя узлами такая же, как и у элемента с тремя узлами, за исключением дополнительного четвертого узла, выбираемого в центре масс C .

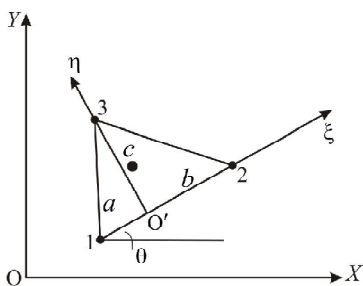


Рис. 4. Локальная система координат эрмитова треугольного элемента

Полная кубическая пробная функция может быть записана в виде:

$$\hat{T}_L = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3,$$

где нижний индекс L указывает на локальную систему координат.

Для определения 10 констант $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ элемент должен иметь 10 узловых параметров. В качестве параметров выбирают три значения функции и ее первых производных в каждом узле вместе со значением функции в центре масс C . При таком выборе пробные функции непрерывны, а их первые производные кусочно-непрерывны во всей рассматриваемой области [8].

Узел, лежащий в центре масс, влияет только на вклад элемента, которому он принадлежит. Из каждого элементного матричного уравнения можно исключить узловой параметр, относящийся к центру масс. Эта процедура называется *конденсацией* [8].

Каждую из функций $\{T\}^e$ можно разделить на две части, одна из которых $\{T'\}^e$ связана с соседними элементами, а другая $\{T^C\}^e$ характерна только для данного элемента. Тогда можно записать

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{T^C\}^e} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \{T^C\}^e} = 0,$$

где $\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{F}^e$; \mathbf{k} – элементная матрица жесткости; \mathbf{F}^e – вклад внутренней распределенной нагрузки.

Процедура исключения $\{T^C\}^e$ из дальнейшего рассмотрения может быть проведена следующим образом:

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{T\}^e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \{T'\}^e} \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial \{T^C\}^e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \{T'\}^e} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{ij} & k_{i,10} \\ k_{10,j} & k_{10,10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T'\}^e \\ \{T^C\}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F'\}^e \\ \{F^C\}^e \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 2, \dots, 10$.

Из второй строки (6) находим

$$T^C = -\frac{k_{10,j}}{k_{10,10}} T'_j - F^C.$$

Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T'_i} = k_{ij} T'_j - \frac{k_{i,10} k_{10,j}}{k_{10,10}} T'_j + F_i - \frac{k_{i,10}}{k_{10,10}} F^C. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что элементы сконденсированной матрицы жесткости \mathbf{k} , обозначаемой \mathbf{k}' , описываются выражением

$$k'_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{i,10} k_{10,j}}{k_{10,10}}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

а вектор распределенной нагрузки элемента имеет вид

$$F'_i = F_i - \frac{k_{i,10}}{k_{10,10}} F^C, \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

На рис. 3 представлены результаты решения уравнения (1) с граничными условиями (2)–(5) при кубической аппроксимации пробной функции. Полученные значения находятся во второй строке и совпадают во всех узлах с аналитическим решением задачи.

Рассмотрим следующий пример уступообразного вертикального контакта двух сред с теплопроводностью k_1 и k_2 , имеющего аналитическое решение [6, 7].

Геометрия задачи показана на рис. 5. Размеры модели представлены в относительных единицах и нормированы мощностью уступа L . Тепловой поток нормирован заданным на нижней границе региональным значением $q_0 = 50$ мВт/м².

Определяющим уравнением для поставленной задачи является уравнение стационарной теплопроводности вида

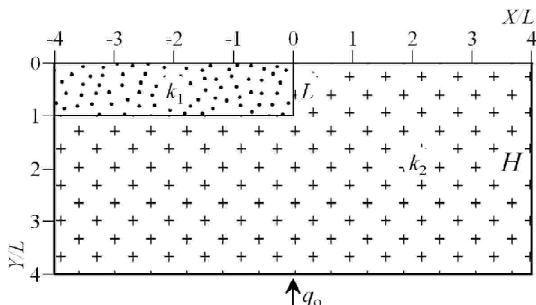


Рис. 5. Модель вертикального уступообразного контакта двух сред

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0.$$

На поверхности модели задана температура

$$T(x, y) = 0,$$

на нижней границе – тепловой поток

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = q_0.$$

Боковые стенки идеально изолированы, т. е. выполняется следующее условие:

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Конечно-элементная сетка содержит 77 узлов и 120 элементов. На границе контакта двух сред для улучшения точности вычисления температуры и теплового потока проводилось регулярное измельчение сетки.

Из рис. 6, где показано сравнение решений, полученных при использовании линейной и кубической аппроксимации пробной функции, с теоретическим решением, можно убедиться в высокой точности результатов.

В заключение необходимо сделать одно важное замечание. В геофизической реальности следствие может быть обусловлено множеством различных причин, и не так просто оценить вклад каждой из них. Трудность решений этих естественно возникающих вопросов происходит глав-

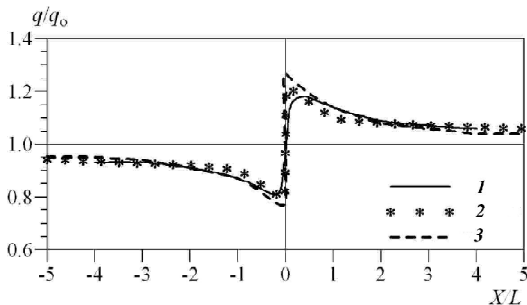


Рис. 6. Приближенные решения задачи уступоподобного контакта. Аппроксимация: 1 — кубическая, 2 — теоретическая, 3 — линейная

ным образом вследствие фрагментарности наших знаний законов Природы. Даже если найдено различие в причинах, то оно всегда носит приближенный характер. Бывают ситуации, когда явление, используемое в качестве фактора, прежде чем стать причиной, было следствием. В таком случае необходимо выделить несколько “равноправных” факторов.

В результате предварительного вычислительного эксперимента определяются:

- 1) число природных факторов и их взаимодействий;
- 2) соподчиненность факторов;
- 3) интервал варьирования факторов.

Предварительный эксперимент позволяет определить заранее, какой из факторов и при каких условиях окажется определяющим, а какой – второстепенным. Затем на основании имеющейся информации задаются различные варианты действующих факторов и некоторый диапазон значений параметров изучаемых полей. Таким образом, экспериментатор-вычислитель проводит исследование математической модели с помощью *факторно-диапазонной оценки*, включающей анализ влияния различных факторов и параметров физических полей Земли. Это позволяет получить еще сведения, новые факты, необходимые для основного эксперимента [1].

Задача основного эксперимента – получение эффективной математической модели, адекватной изучаемому геофизическому процессу.

Выводы. Созданы вычислительные программы для решения стационарной задачи теплопроводности с граничными условиями Дирихле и Неймана на основе использования кубической аппроксимации пробной функции. Практический анализ показал, что при решении больших задач в целях экономии оперативной памяти для улучшения точности расчетов целесообразно применять более точную разбивку сетки с обычным использованием треугольных элементов. Выбор аппроксимации зависит от конкретной задачи. Наилучшей будет та аппроксимация, которая дает максимальную точность решения при наименьших вычислительных затратах.

1. *Бахова Н.І.* Обчислювальний експеримент у сучасній геофізиці / Вісн. НАУ. – 2009. – № 3. – С. 262–270.
2. *Бахова Н.І.* Теплова модель Чорноморської западини / Вісн. НАУ. – 2011. – № 1. – С. 144–158.

3. Бахова Н.І. Теплова модель Теляцького озера / Вісник НАУ. – 2011. – № 2. – С. 137–147.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
5. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Любимова Е.А. Влияние термических неоднородностей коры на тепловой поток / Е.А. Любимова, В.М. Любошиц // Исследование теплового и электромагнитного полей в СССР. – М.: Наука, 1975. – С. 49–55.
7. Любимова Е.А. Решение краевой задачи тепловых и электромагнитных полей Земли над вертикальным контактом горизонтально-слоистых сред / Е.А. Любимова, В.Н. Никитина // Исследование теплового и электромагнитного полей в СССР. – М.: Наука, 1975. – С. 5–19.
8. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
9. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – С. 432.

Вплив неусувних похибок на економічність скінченно-елементного алгоритму

Н.І. Бахова

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, просп. Акад. Палладіна, 32, Київ 03680, Україна, e-mail: bakhova_nataly@mail.ru

Виконано практичний аналіз розподілу похибок методу скінченних елементів для розподілу температури у двовимірному неоднорідному геологічному середовищі. Розроблено методику визначення необхідної точності обчислень. Запропоновано декілька способів обчислень, за допомогою яких можна досягти найкращих результатів при економічних витратах обчислювального праці.

Ключові слова: геологічне середовище, похибка, метод скінченних елементів, обчислювальний експеримент.

The influence of fatal exception error on the finite element algorithm efficiency

N.I. Bakhova

Institute of Geophysics NAS of Ukraine, 32 Palladin Ave., Kyiv 03680, Ukraine, e-mail: bakhova_nataly@mail.ru

The practical analysis of the distribution of finite element method errors for temperature distribution in two-dimensional heterogeneous geological environment carried out. The method of determining the required accuracy of calculations is developed. Various methods of calculations by which you can achieve the best final results at economical expenditures of computing work are offered.

Keywords: geological environment, error, finite elements method, computing experiments.

Поступила в редакцію 05.06.2015 г.