



**Ю. В. Роганов**, канд. физ.-мат. наук, геофизик (Tetrale Group, Канада), roganov\_yuriy@mail.ru,

**А. Стовас**, д-р физ.-мат. наук, профессор (Норвежский университет естественных и технических наук (NTNU), Норвегия)

## НИЗКОЧАСТОТНАЯ ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТЕЙ И КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЛАБОКОНТРАСТНОЙ СРЕДЕ

*Выведены формулы для дисперсии скоростей и эффективного коэффициента отражения в периодической слабоконтрастной среде. Показано, что слабоконтрастная аппроксимация применима для сред с реалистическими значениями контрастов.*

**Ключевые слова:** периодическая слабоконтрастная среда, дисперсия скоростей, коэффициенты отражения.

### Введение

Описание распространения плоских волн в периодических горизонтально-слоистых средах основано на вычислении матрицы-пропатора для периода  $P(\omega)$ , которая в этом случае называется матрицей монодромии. Согласно теореме Флоке вертикальные медленности плоских волн являются собственными числами системной матрицы  $M(\omega)$  для эффективной среды, которая описывается формулой

$$M(\omega) = \frac{1}{i\omega H} \ln P(\omega),$$

где  $H$  – мощность периода. Учитывая, что пропатор можно представить в виде произведения

$$P(\omega) = \exp(i\omega z_N M_N) \dots \exp(i\omega z_1 M_1),$$

в статье [2] выведена формула для низкочастотной аппроксимации системной матрицы  $M(\omega)$  на основе ряда Бэкера-Кемпбелла-Хаусдорфа [3] для количества аргументов  $N$ . Однако, эффективная среда определяется громоздкими уравнениями, которые сложно анализировать.

В данных тезисах выведены формулы для слабоконтрастной низкочастотной дисперсии скоростей распространения

волн по вертикали в периодической среде. Также исследована точность слабоконтрастной низкочастотной аппроксимации коэффициентов отражения от нижнего полупространства, сформированного периодически повторяемыми пачками слоев при инициализации из верхнего полупространства, заполненного однородной средой с параметрами, соответствующими нулевой частоте (осреднению Бакуса). Этот коэффициент отражения показывает, насколько быстро изменяется динамика волн при увеличении частоты. Мы показали, что дисперсия скоростей в основном определяется четными членами, а коэффициент отражения – нечетными членами ряда по частоте. Выведенные аппроксимации сравнивались с аналогичными аппроксимациями Нориса [1] для градиентной среды. Точность формул для слабоконтрастной среды проверена на двух моделях.

### Низкочастотная слабоконтрастная дисперсия скоростей

Рассмотрим периодическую среду с горизонтальными слоями, определенную временами пробега волны через слои  $t_i$  и импедансами  $Z_p$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

В статье [2] показано, что при маленьких частотах  $\omega$ , время распространения плоской волны  $t(\omega)$ , распространяющейся вертикально через один период, определяется соотношением

$$t^2(\omega) = \tau_0 + \omega^2 \tau_2 + O(\omega^4), \quad (1)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \tau_0 &= T_B^2 = a_0 b_0, \\ \tau_2 &= -a_0 b_2 - a_2 b_0 - a_1^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$T_B$  есть время распространения через период для среды с параметрами Бакуса,

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle Z_i \rangle, b_0 = \langle Z_i^{-1} \rangle, \\ a_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq i > j \geq 1} t_i t_j (Z_i Z_j^{-1} - Z_i^{-1} Z_j), \\ a_2 &= -a_0^2 b_0 / 6 + a_0 \langle t_i \rangle / 2 - \langle t_i^2 Z_i \rangle / 3 + f_2, \\ b_2 &= -a_0 b_0^2 / 6 + b_0 \langle t_i \rangle / 2 - \langle t_i^2 Z_i^{-1} \rangle / 3 + g_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{n \geq i > j > k \geq 1} t_i t_j t_k Z_i Z_j^{-1} Z_k, \\ g_2 &= \sum_{n \geq i > j > k \geq 1} t_i t_j t_k Z_i^{-1} Z_j Z_k^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Операторы осреднения по времени определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i t_i, \\ \langle 1 \rangle &= \sum_{i=1}^n t_i \equiv T. \end{aligned} \quad (5)$$

Для введения слабоконтрастной аппроксимации необходимо выбрать референтную среду. Импедансы определим по формуле  $Z_i = Z_0 \exp(F_i)$ , а импеданс референтной среды  $Z_0$  подберем так, чтобы выполнялось равенство  $\langle F_i \rangle = 0$ .

Будем предполагать, что  $F_i$  настолько малы, что импедансы  $Z_i$  можно аппроксимировать первыми тремя членами ряда

$$\exp(F_i) = 1 + F_i + F_i^2 / 2 + O(F_i^3). \quad (6)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} a_0 &= Z_0 \left( T + \frac{1}{2} \langle F_i^2 \rangle \right) + O(F_i^3), \\ b_0 &= Z_0^{-1} \left( T + \frac{1}{2} \langle F_i^2 \rangle \right) + O(F_i^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Можно получить оценку коэффициентов  $\tau_0$  и  $\tau_2$  из соотношения (2)

$$\tau_0 = T^2 + T \langle F_i^2 \rangle + O(F_i^4), \quad (8)$$

$$\tau_2 = 4(T \langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2) + \frac{T}{3} \langle t_i^2 F_i^2 \rangle + O(F_i^3), \quad (9)$$

$$\text{где } G_i = \sum_{j=1}^{i-1} t_j F_j + \frac{t_i F_i}{2}.$$

Сумма первых двух членов из соотношения (9) для  $\tau_2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_2 &\equiv 4(T \langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2) + \frac{T}{3} \langle t_i^2 F_i^2 \rangle = \\ &= 4T \langle (G_i - T^{-1} \langle G_i \rangle)^2 \rangle + \frac{T}{3} \langle t_i^2 F_i^2 \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Из равенства (10) видно, что  $\bar{\tau}_2 \geq 0$  для любых  $t_i > 0$  и  $F_i$ , и равенство выполняется, только если  $F_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т. е. для однородной среды. Скорости определяются из равенства  $V(\omega) = H/t(\omega)$ , где  $H$  есть мощность пачки слоев, входящих в период. Соотношения (1)–(6) определяют низкочастотную дисперсию, а соотношения (8) и (9) определяют низкочастотную дисперсию для слабоконтрастной аппроксимации.

### Низкочастотное рассеяние

Рассмотрим низкочастотное рассеяние в слабоконтрастной среде. Будем рассматривать обратное и прямое рассеяние плоской волны частоты  $\omega$  как коэффициент отражения  $r$  и коэффициент преломления  $f$  на интерфейсе между нижним полупространством, заполненным теми же слоями, что в периодической среде, и верхним полупространством, определенным как среда, построенная осреднением Бакуса параметров слоев по периоду. Если частота стремится к нулю, то  $r \rightarrow 0$  и  $f \rightarrow 1$ . Заметим, что значение коэффициента преломления  $f$  определяет амплитуду волны Блоха в нижнем полупространстве.

Нижеследующие вычисления выполнены с точностью  $O(\omega^3)$ . Формулы для системных матриц  $M_0$  и  $M(\omega)$ , определяющих свойства верхнего и нижнего полупространств выведены в статье [2]

$$\begin{aligned}
M &= M_0 + i\omega M_1 - \omega^2 M_2, \\
M_0 &= \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ a_0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_1 &= \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \\
M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Собственные числа этих матриц соответственно равны  $\pm T_B$  и  $\pm t(\omega)$ , а матрицы собственных векторов представляются в виде

$$\begin{aligned}
E_0 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ T_B & T_B \\ b_0 & b_0 \end{pmatrix}, \\
E &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t(\omega) + ia_1\omega & t(\omega) - ia_1\omega \\ b_0 - b_2\omega^2 & b_0 - b_2\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Рассеяние задается соотношением

$$E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $f=1-r$ , а коэффициент отражения  $r$  определяется формулой

$$r = \frac{a_1}{2T_B} \omega i + \frac{(a_0 b_2 - a_2 b_0)}{4T_B^2} \omega^2 + O(\omega^3). \quad (14)$$

Поэтому, когда падающая волна с единичной энергией достигает интерфейса между полупространствами, генерируются отраженная и преломленная волны с энергиями  $E_r = \frac{a_1^2 \omega^2}{4T_B^2}$  и  $E_f = 1 - \frac{a_1^2 \omega^2}{4T_B^2}$  соответственно.

Для двухслойной периодической среды соотношение (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
r &= \frac{t_1 t_2 \omega i}{4T_B} \left( \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_2} \right) + \\
&+ \frac{t_1 t_2 (t_2 - t_1) T \omega^2}{12T_B^2} \left( \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_2} \right) + O(\omega^3), \quad (15)
\end{aligned}$$

где  $t_j, j=1, 2$  времена для первого и второго

слоев. Далее мы выводим формулы для слабоконтрастного низкочастотного рассеяния. Для слабоконтрастной среды мы будем сохранять контрасты в ряде с точностью  $O(F_k^3)$  и подставим их в формулу (14). В результате получим, что для слабоконтрастной среды коэффициент отражения задается формулой

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{\langle G_i \rangle}{T} \omega i - \\
&- \left( \frac{1}{12} \langle t_j^2 F_j \rangle - \langle P_j F_j Q_j \rangle \right) \frac{\omega^2}{T} + O(\omega^3), \quad (16)
\end{aligned}$$

где  $P_i = t_1 + \dots + t_{i-1} + t_i/2$ ,  $Q_i = t_i/2 + t_{i+1} + \dots + t_n$ .

Для двухслойной периодической среды соотношение (15) сводится к равенству

$$r = -\frac{t_1 F_1}{2} \omega i - \frac{t_1 (t_2 - t_1) F_1}{6} \omega^2 + O(\omega^3), \quad (17)$$

где  $F_1 = \log(Z_1/Z_0)$ , импеданс референтной среды равен  $Z_0 = \exp[(t_1 \log Z_1 + t_2 \log Z_2)/(t_1 + t_2)]$ .

А. Норис в работе [1] вывел коэффициенты для ряда  $r(\omega) = r_0 + r_1 \omega + r_2 \omega^2$  в виде кратных интегралов. Это представление аналогично формуле (14).

### Численный пример

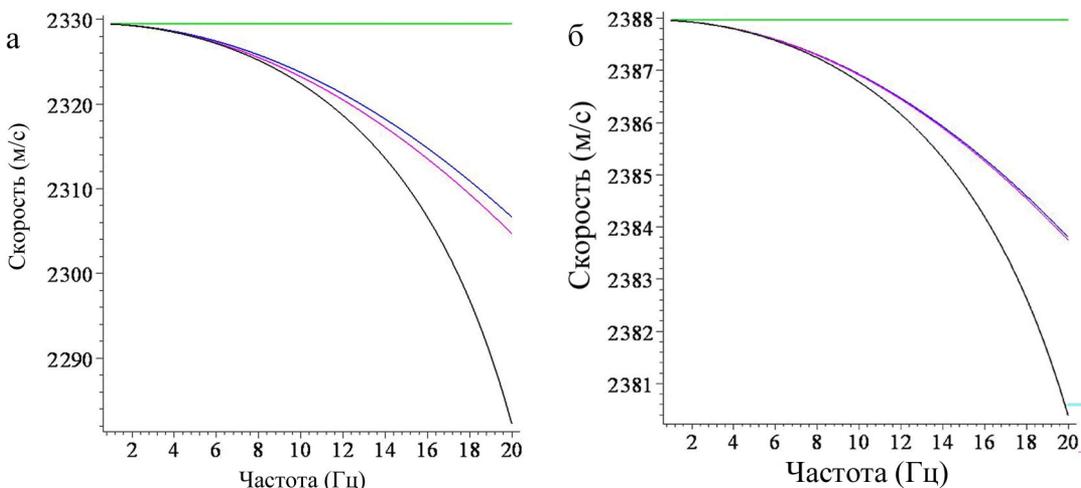
Проиллюстрируем полученные выше соотношения для вычисления низкочастотной дисперсии на двух примерах двухслойных периодических сред с параметрами, приведенными в таблице. Коэффициент отражения на границе раздела между слоями для модели 1 равен  $r_1 = \pm 0,245$ , а для модели 2 –  $r_2 = \pm 0,102$ .

На рис. 1 изображены графики для низкочастотной дисперсии скоростей, вычисленной для обеих моделей. Сравнение скоростей, вычисленных по уравнениям (2) (точная формула) и (25) (слабоконтрастное приближение), показывает хорошую точность при использовании слабоконтрастного приближения (отклонения составляют 2 м/с для модели 1 и 0,06 м/с для модели 2 при частоте 20 Гц).

На рис. 2 показаны коэффициенты отражения в зависимости от частоты для вертикально распространяющейся плоской волны, которые определены на границе двух полупространств, нижнее из

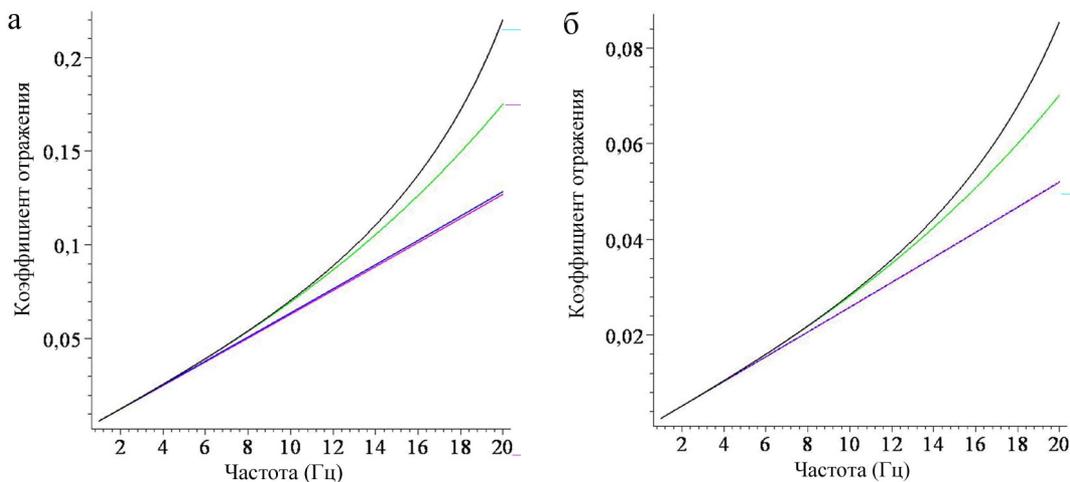
**Таблица. Упругие свойства двухслойных периодических сред**

Модель	$V_1, \text{м/с}$	$V_2, \text{м/с}$	$\rho_1, \text{кг/м}^3$	$\rho_2, \text{кг/м}^3$	$h_1, \text{м}$	$h_2, \text{м}$
1	2000	3000	2000	2200	20	20
2	2000	3000	2200	1800	20	20



**Рис. 1. Низкочастотная дисперсия: а – для модели 1, б – для модели 2**

Точное соотношение – черная кривая, низкочастотная аппроксимация (соотношение (1)) – розовая кривая, слабоконтрастная низкочастотная аппроксимация – синий цвет и скорость осреднения по Бакусу – зеленый цвет



**Рис. 2. Зависимость абсолютного значения коэффициента отражения от частоты: а – для модели 1, б – для модели 2**

Рассматривается интерфейс между средой с осреднением по Бакусу и периодической двухслойной средой. Точное значение коэффициента отражения показано черной кривой, низкочастотная аппроксимация – розовой кривой и низкочастотная слабоконтрастная аппроксимация – синей кривой. Низкочастотная аппроксимация с третьим членом ряда показана зеленым цветом

которых состоит из периодической двухслойной среды, а верхнее состоит из однородной среды Бакуса. Видно, что слабоконтрастное приближение имеет очень хорошую точность для обеих моделей (отклонения составляют 0,0014 для модели 1 и 0,0001 для модели 2, определенные при частоте 20 Гц). Тем не менее, основной вклад в  $r(\omega)$  вносится чисто мнимыми коэффициентами ряда по  $\omega$ , имеющими нечетные степени. Таким образом, все приближения остаются квазипрямыми линиями, касающимися  $r(\omega)$ . Принимая во внимание третий коэффициент ряда по  $\omega$ , можно в значительной степени повысить точность аппроксимации (рис. 2).

### Выводы

Для тонкослойной периодической среды получено соотношение, определяющее слабоконтрастное приближение для дисперсии скоростей и коэффициента

отражения на низких частотах. Результаты проиллюстрированы на примерах двух двухслойных периодических сред. Полученные уравнения соответствуют уравнениям, выведенным в работе [1] для градиентной среды. Анализ показывает, что дисперсия скоростей определяется четными членами ряда по частоте, в то время как коэффициент отражения контролируется нечетными членами ряда по частоте.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Norris A. N. Waves in periodically layered media: A comparison of two theories//SIAM Journal of Applied Mathematics. 1993. 53. P. 1195–1209.*
2. *Roganov Yu., Stovas A. Low-frequency wave propagation in layered media//Geophysical Prospecting. 2012. 60. No. 5. P. 825–837.*
3. *Serre J.-P. Lie algebras and Lie groups. W. A. Benjamin, Inc., New York. 1965.*

Р у к о п и с о т р и м а н о 25.10.2013.

*Виведено формули для дисперсії швидкостей та ефективного коефіцієнта відбиття в періодичному слабоконтрастному середовищі. Показано, що слабоконтрастну апроксимацію можна застосовувати для середовищ з реалістичними значеннями контрастів.*

**Ключові слова:** *періодичне слабоконтрастне середовище, дисперсія швидкостей, коефіцієнти відбиття.*

*We derive the velocity dispersion and effective reflection coefficient from a periodical weak-contrast horizontally layered medium. The low-frequency approximation is used to define a dynamic effective medium. We show that the low-frequency weak-contrast approximation is valid for models with realistic contrasts.*

**Keywords:** *periodical weak-contrast medium, velocity dispersion, reflection coefficients.*