УДК 517.962

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ АНАЛІЗІ АБСОРБЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

К.С. Меркушова, М.А. Мартиненко

DIFFERENCE EQUATIONS AND THEIR APPLICATION TO THE ANALYSIS ABSORPTION PROCESSES

K.S Merkushova, M.A. Martynenko
National University of Food Technologies, Kiev, Ukraine

By solving some linear differential equation of second order with constant coefficients equation for determining the number of plates in the absorption column.

Key words: *difference equation of second order, number plates absorption column, a feature characteristic equation.*

Вступ. Функція цілочисельного (дискретного) аргументу $x(n)$ називається решітчастою функцією. Вираз $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ називається скінченною різницею першого порядку.

Різницею *k*-го порядку називається вираз

$$\Delta^k x(n) = \Delta^{k-1} x(n+1) - \Delta^{k-1} x(n). \tag{1}$$

Рівняння вигляду

$$\Phi(n, x(n), \Delta x(n) \ldots \Delta^k x(n)) = 0, \qquad 2)$$

де $x(n)$ — шукана функція, називається різницевим рівнянням, або рівнянням в скінченних різницях.

Різницеве рівняння вигляду

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = f(n), \tag{3}$$

де $a_1, a_2, \ldots a_k$ — сталі, $f(n)$ — деяка решітчаста функція, називається лінійним різницевим рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Однорідне лінійне рівняння має вигляд

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = 0. \tag{4}$$

Якщо система решітчастих функцій $x_1(n), x_2(n), \ldots x_r(n)$ є розв'язками лінійного рівняння (4), то їх лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{r} b_i x_i$ буде також розв'язком цього рівняння.

Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i(n), \tag{5}$$

де C_i — довільні сталі; $x_i(n)$ — лінійно-незалежні розв'язки цього рівняння.

Розв'язок цього рівняння (4) шукаємо у вигляді

$$x(n) = \lambda^n, \tag{6}$$

де λ — деяке число дійсне або комплексне. Підставляючи рівняння (6) в рівняння (4) одержимо

$$\lambda^{n+k} + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k\lambda^n = 0$$

або

$$\lambda^n(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_1) = 0,$$

корінь $\lambda = 0$ дає тривіальний розв'язок рівняння (4) : $x(n) = 0$.

Рівняння

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots a_k = 0 \tag{7}$$

називається характеристичним рівнянням.

Якщо характеристичне рівняння має тільки прості корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, то загальний розв'язок однорідного рівняння (4) має вигляд

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i^{\,n} . \tag{8}$$

Якщо корені кратні або комплексно-спряжені, то розв'язок (8) записується так як і в теорії звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо один із прикладів.

Методи досліджень. При розрахунку числа тарілок абсорбційної колони як правило спочатку визначають число теоретичних тарілок, які потім ділять на коефіцієнт корисної дії тарілок. Цей метод дає неточний результат, за виключенням таких випадків, коли робоча і рівноважна лінії є паралельними.

Покажемо, що визначення числа тарілок в абсорбційній колоні можна здійснити шляхом розв'язання деякого лінійного різницевого рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Приймемо наступні позначення:
$\boldsymbol{y_n}$ — мольні долі розчинених речовин у газі, які залишають *n*-у тарілку; $\boldsymbol{x_n}$— мольні долі розчинених речовин у рідині, які залишають *n*-у тарілку; y_1 — мольні долі розчинених речовин у газі, що поступає в колону; y_2— мольні долі розчинених речовин у газі, що виходить з колони; $\boldsymbol{x_2}$ — мольні долі розчинених речовин у рідині, що поступає в колону; $\boldsymbol{w_p}$ — швидкість надходження рідини, кмоль/год; $\boldsymbol{w_г}$ — швидкість надходження газу, кмоль/год; η— коефіцієнт корисної дії тарілки (загальний); *n* — порядковий номер тарілки в колоні; ***N*** — загальне число тарілок у колонні;

Результати та обговорення. Прирівнюючи кількість надходження на тарілку розчиненого газу до кількості його при залишенні цієї ж тарілки, отримаємо:

$$w_г y_{n-1} + w_p x_{n+1} = w_г y_n + w_p x_n . \tag{9}$$

Виключимо із (9) x_n і x_{n+1}, скориставшись для цього рівноважним співвідношенням:

$$y^*_n = m x_n + b. \tag{10}$$

Ми отримаємо:

$$\lambda y_{n-1} + y^*_{n+1} = \lambda y_n + y^*_n . \tag{11}$$

Далі, за допомогою формули для коефіцієнта корисної дії тарілки

$$\eta = \frac{y_n - y_{n-1}}{y^*_n - y_{n-1}}$$

виключимо із (11) y^* і y^*_{n+1}, де y^* — рівноважна концентрація.

Ми знайдемо, що лінійне різницеве рівняння, яке підлягає розв'язку має наступний вигляд:

$$y_{n+1} - (k+1)\cdot y_n + k \cdot y_{n-1} = 0, \qquad (12)$$

де $k = 1 + \eta \cdot (\lambda - 1)$.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді

$$y_n = \beta^n.$$

Тоді отримаємо:

$$\beta^2 - (k+1)\cdot\beta + k = 0.$$

Корні цього рівняння будуть:

$$\beta_1 = 1;\ \beta_2 = k.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (12) запишемо у вигляді:

$$y_n = c_1 + c_2 k^n. \qquad (13)$$

Константи c_1 і c_2 визначаються на основі граничних умов. Гранична умова на вході газу в колону наступне:

$$y_1 = c_1 + c_2. \qquad (14)$$

Перед тим як ввести другу граничну умову $x_n = x_2$ при $n = N+1$ встановимо залежність x_n від *n*. Цей зв'язок може бути знайдений шляхом виключення y_n з (10), (11) і (13):

$$m\cdot x_n + b = \frac{1}{\eta}\cdot y_{n+1} - \frac{1-\eta}{\eta} y_n = c_1 + c_2\cdot\eta\cdot k^n. \qquad (15)$$

Із другої граничної умови отримаємо:

$$m\cdot x_{N+1} + b = m\cdot x_2 + b = y^{*}_2 = c_1 + c_2\cdot\lambda\cdot k^{N+1} \qquad (16)$$

Розв'язуючи одночасно (14) і (16), будемо мати:

$$c_1 = y_1 - \frac{y_1 - y^{*}_2}{1-\lambda\cdot k^N}$$

і

$$c_2 = \frac{y_1 - y^{*}_2}{1-\lambda\cdot k^N}.$$

Для значення y_n у формулі (15) маємо

$$\frac{y_1 - y_n}{y_1 - y^{*}_2} = \frac{1-k^N}{1-\lambda\cdot k^N}$$

і концентрація розчиненого у газі, що виходить, визначається формулою:

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y^{*}_2} = \frac{1-k^N}{1-\lambda\cdot k^N}.$$

Напишемо цю рівність у такому вигляді:

$$\frac{y_1 - y^{*}_2}{y_2 - y^{*}_2} = \frac{1}{1 - \dfrac{y_1 - y_2}{y_1 - y^{*}_2}} = \frac{1-\lambda k^N}{(1-\lambda)\cdot k^N}. \qquad (17)$$

Розв'язуючи (17) відносно N, отримаємо:

$$N = \frac{\lg\left[(1-\lambda)\dfrac{y_1 - y_2}{y_1 - y^{*}_2} + \lambda\right]}{-\lg k}. \tag{18}$$

Висновки. На сьогоднішній день розрахунок необхідної кількості тарілок виконують графічно, використовуючи кінетичні закономірності – рівняння масопередачі і розрахункові залежності для коефіцієнтів масовіддачі (або кількості одиниць перенесення) у паровій і рідкій фазах на тарілці.

Під час наближених розрахунків застосовують теоретично менш обґрунтований, але простіший метод визначення кількості тарілок за допомогою так званого середнього ККД тарілок. Запропонований метод визначення тарілок за допомогою різницевих рівнянь є більш точним, хоча і трохи громіздким. За отриманим результатом легко можна робити подальші розрахунки і проектувати абсорбційну колону.

Література.

1. *Мартиненко М.А., Юрик І.І.* Аналітичні функції. Операційне числення. Різницеві рівняння: Навч. посіб.—К.:НУХТ, 2007.—240с.
2. *Легеза В.П.* Вища математика: нав. посіб. для студ. вищ. навч. закл./ В.П. Легеза, М.А. Мартиненко, Ю.І. Іванова. — К.: Четверта хвиля, 2011. — 664 с.
3. *Рудницький В.Б., Кантемир І.І.* Практичні заняття з курсу вищої математики. – Хмельницький, 2000. – ч.2. – 315 с.

Авторська довідка:

*1. **Меркушова Катерина Сергіївна**, магістр технологій продуктів бродіння і виноробства, Національний університет харчових технологій, merkywatko@mail.ru*

*2. **Мартиненко Михайло Антонович**, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій.*

Надійшла до редакції 14.05.2012

Надійшла після рецензування 16.05.2012