

The influence of the smoothness of interpolating trigonometric splines on interpolation error

Volodymyr Denysiuk, Elena Negodenko

National Aviation University, Kyiv, Ukraine

ABSTRACT

Keywords:

Interpolation
Trigonometric
Spline
Smoothness
Gibbs

Introduction. The theory of algebraic interpolated polynomials has some drawbacks: the older members of polynomials rapidly increase with the degree of polynomials used; they rarely leads to any reasonable physical interpretation of the obtained approximations. When modeling it is acute to apply polynomial spline functions or simple splines.

Materials and methods. To identify the impact of smoothness of interpolated trigonometric splines to the interpolation error there are applied theoretical study and mathematical modeling in software package MathCAD.

Results. The influence of differential properties of trigonometric interpolated splines to the interpolation error was determined. There was also defined the impact of spline smoothness properties to the interpolation error at both ends and in the middle of a segment in test cases; there was found that with the increase of spline order the interpolation error increases. It is explained by the fact that with the increase of spline order the harmful effects of the Gibbs phenomenon reinforce.

Article history:

Received 21.08.2013
Received in revised form
13.11.2013
Accepted 25.12.2013

Corresponding author:

Vitaliy Shutuyuk
E-mail:
shutuyuk@i.ua

УДК 519.62

Вплив гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції

Володимир Денисюк, Олена Негоденко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

Вступ

Під час проведення досліджень у галузі процесів та технологій харчових виробництв виникає необхідність подальшої аналітичної обробки здобутих експериментальних закономірностей.

Найчастіше експериментальні дані мають вигляд таблиць чи графіків, які отримані з допомогою певного експериментального обладнання. Для подальшої математичної обробки з метою більш детального дослідження їх, як правило,

представляють у вигляді відповідних формул, які дозволять розраховувати значення дослідженої функції у будь-якій точці дослідженого інтервалу, використовувати аналітичні операції диференціювання, інтегрування та ін.

Для моделювання традиційно застосовують алгебраїчні многочлени. Теорія алгебраїчних інтерполяційних многочленів є простою і добре розвинутою, а використання цих многочленів на практиці часто призводить до задовільних результатів. Разом з тим, алгебраїчні інтерполяційні многочлени мають ряд серйозних недоліків. Так, наприклад, старші члени многочленів швидко зростають із збільшенням степеня використовуваних многочленів. Далі, алгебраїчні інтерполяційні многочлени, побудовані на рівномірних сітках, не завжди збігаються навіть до достатньо простих функцій. Нарешті, використання алгебраїчних інтерполяційних многочленів рідко призводить до будь-якої розумної фізичної інтерпретації отримуваних наближень. Ці та деякі інші вади алгебраїчних інтерполяційних многочленів призводять до доцільності розробки різних модифікацій многочленної інтерпретації, найвдалішою з яких є модифікація, що отримала назву поліноміальних сплайн-функцій або просто сплайнів.

Останнім часом сплайни знаходять все більше застосування у різних галузях науки та техніки. Найчастіше вони використовуються для опису залежностей складного виду, у комп'ютерній графіці тощо [4]. Також сплайни відомі як хорошими наближуваними властивостями так і простотою і ефективністю розрахунків.

Класи поліноміальних сплайнів набули широкого розповсюдження як апарат наближення функцій.

Проте поліноміальні сплайни мають ряд недоліків, які певною мірою стримують їх застосування у різних задачах науки і техніки. До таких недоліків слід віднести складність побудови сплайнів високих степенів. Тому особливу зацікавленість у теперішній час становлять нові класи функцій, які мають переваги поліноміальних сплайнів і є вільними від недоліків поліноміальних сплайнів. До таких нових класів функцій слід віднести класи тригонометричних сплайнів.

Матеріали і методи

Для виявлення впливу гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції застосовано теоретичне дослідження та математичне моделювання в програмному пакеті Mathcad. Задавали N вузлів інтерполяції,

$N = 2n + 1$, де $n = 1, 2, \dots$, крок рівномірної сітки $h = 2\pi \frac{i-1}{N}$, де $i = 1, 2, \dots, N$. Задавали

функцію $f(t)$ на $[0, 2\pi]$. Обчислювали значення функції у вузлах інтерполяції. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і при різному значенні параметра r обчислювали похибку інтерполяції.

Результати та обговорення

В даній роботі досліджується вплив диференціальних властивостей тригонометричних інтерполяційних сплайнів [1] на похибку інтерполяції.

Розглянемо функцію $f(t)$ на $[0, 2\pi]$. Задамо N вузлів інтерполяції, $N = 2n + 1$, де $n = 1, 2, \dots$, крок рівномірної сітки $h = 2\pi \frac{i-1}{N}$, де $i = 1, 2, \dots, N$.

Обчислюємо значення функції у вузлах інтерполяції. Будуємо тригонометричний інтерполяційний сплайн [1], який має вигляд (1).

Параметр r визначає гладкість сплайнів, оскільки тригонометричні сплайни r -ого порядку мають абсолютно неперервну похідну ($r-1$ -ого порядку ($r = 1, 2, \dots$)).

Тому при практичному використанні цих сплайнів постає задача про вибір порядку сплайна і його вплив на похибку інтерполяції.

$$S_r(f, \Delta_N, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k(r, N) \left[a_k^* \Phi_k^c(r, N, t) + b_k^* \Psi_k^s(r, N, t) \right],$$

$$\text{де } \Phi_k^c(r, N, t) = \frac{\cos kt}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}} + \frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}} \right] \quad (1)$$

$$\Psi_k^s(r, N, t) = \frac{\sin kt}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}} - \frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}} \right],$$

$$[\alpha_k(r, N)]^{-1} = \frac{1}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(mN+k)^{r+1}} + \frac{1}{(mN-k)^{r+1}} \right],$$

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i), \quad a_k^* = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i) \cos kt_i,$$

$$b_k^* = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i) \sin kt_i,$$

де $k = 1, 2, \dots, n$, r - степінь сплайна.

Розглянемо випадок, коли в ролі наближеної функції вибиралась функція $f(t) = \sin \frac{3}{4}t$, $t \in [0, 2\pi]$. На відрізку $[0, 2\pi]$ задавали 9 вузлів інтерполяції і знаходили значення функції в цих вузлах. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і при різному значенні параметра r обчислювали похибку інтерполяції (рис.1, 2). В результаті порівняння цих похибок виявилось, що із збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції збільшувалась (Таблиця 1).

Це пояснюється тим, що при застосуванні тригонометричних сплайнів для наближення функцій в загальному випадку на кінцях відрізка інтерполяції спостерігається відоме явище Гіббса, яке суттєво впливає на точність наближення.

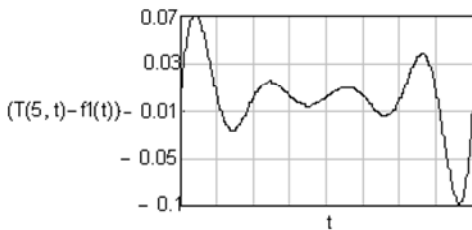


Рис. 1 Похибка інтерполяції при $r = 5$ для функції $f(t) = \sin \frac{3}{4}t$

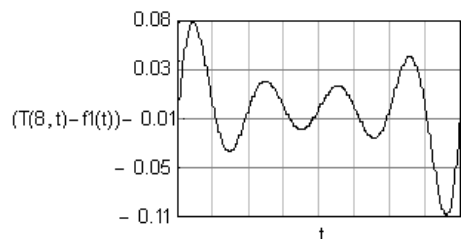


Рис. 2 Похибка інтерполяції при $r = 8$ для функції $f(t) = \sin \frac{3}{4}t$

В іншому прикладі розглядалась функція $f(t) = t + 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Як і раніше на відріжку $[0, 2\pi]$ задавали 9 вузлів інтерполяції і знаходили значення функції в цих вузлах. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і в залежності від порядку сплайна знаходили похибку інтерполяції (рис.3, рис.4). Як і в попередньому прикладі, в результаті порівняння цих похибок виявилось, що із збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції також збільшувалась (Таблиця 1).

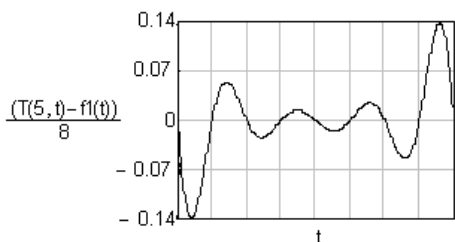


Рис. 3 Похибка інтерполяції при $r = 5$ для функції $f(t) = t + 1$

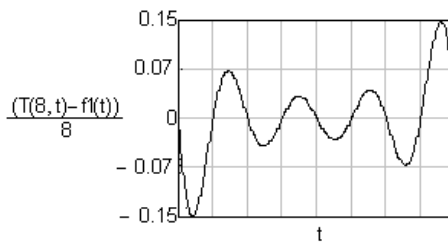


Рис. 4 Похибка інтерполяції при $r = 8$ для функції $f(t) = t + 1$

Якщо ж розглядати середню частину відрізка, то можна спостерігати посилення впливу явища Гіббса на середину відрізка інтерполяції (Таблиця 1).

Таблиця 1

Залежність похибки інтерполяції від порядку сплайна

Функція	Порядок сплайна, r	Похибка інтерполяції на кінцях відрізка	Похибка інтерполяції в середині відрізка
$f(t) = \sin \frac{3}{4}t$	3	0,086	0,023
	5	0,1	0,039
	8	0,105	0,052
	10	0,107	0,053
$f(t) = t + 1$	3	0,125	0,035
	5	0,145	0,048
	8	0,155	0,072
	10	0,165	0,083

Висновки

Розглянуто задачу інтерполяції, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни [1]; досліджено вплив властивостей гладкості сплайнів на похибку інтерполяції як на кінцях так і на середині відрізка на тестових прикладах і встановлено, що із збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції збільшується. Це пояснюється тим, що із збільшенням порядку сплайну посилюється шкідливий вплив явища Гіббса.

Література

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали. – К: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.
2. Р.В. Хемминг. Численные методы. – М. - 1998 г. – 400 с.
3. В.П. Денисюк «Про деякі методи покращення збіжності рядів Фур'є та інтерполяційних тригонометричних многочленів». Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – К: НАУ, 2012. – Випуск 3(39). – С. 39-43.
4. Tom Lyche, Larry L. Schumaker, Sonya Stanley. Quasi-interpolants Based on Trigonometric Splines *Journal of Approximation Theory*. - Vol. 95. - Is. 2. – 1998. - Pp. 280-309.
5. Роджерс Д.,Адамс Дж. Математические основы машинной графики (вид. другое). Москва: Мир. – 2001. – 604 с.
6. Lanlan Yan, Jiongfeng Liang. A class of algebraic–trigonometric blended splines / *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2011. – Vol. 235. – Is. 6. pp. 1713-1729
7. Benyue Su, Liping Zou. Manipulator Trajectory Planning Based on the Algebraic-Trigonometric Hermite Blended Interpolation Spline / *Procedia Engineering*. -2012. – Vol. 29. – pp. 2093-2097.
8. Alexandru Mihai Bica, Constantin Popescu. Fuzzy spline interpolation with optimal property in parametric form / 2013. - *Information Sciences*. – Vol. 236. – pp. 138-155.

References

1. Denysiuk V.P. (2007), *Splainy ta syhnaly*, VIPOL, Kyiv.
2. R.V. Khemming (1998), *Chislennye metody*, Moskva.
3. V.P. Denysiuk (2012), Pro deiaki metody pokrashchennia zbizhnosti riadiv Furie ta interpoliatsiinykh tryhonometrychnykh mnohochleniv, *Problemy informatyzatsii ta upravlinnia: Zbirnyk nauk. prats*, 3(39), pp. 39-43.
4. Tom Lyche, Larry L. Schumaker, Sonya Stanley (1998), Quasi-interpolants Based on Trigonometric Splines, *Journal of Approximation Theory*, 95(2), pp. 280-309.
5. Rodzhers D., Adams Dzh. (2001), *Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki*, Mir, Moskva.
6. Lanlan Yan, Jiongfeng Liang (2011), A class of algebraic–trigonometric blended splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(6)б pp. 1713-1729
7. Benyue Su, Liping Zou (2012), Manipulator Trajectory Planning Based on the Algebraic-Trigonometric Hermite Blended Interpolation Spline, *Procedia Engineering*, 29, pp. 2093-2097.
8. Alexandru Mihai Bica, Constantin Popescu (2013), Fuzzy spline interpolation with optimal property in parametric form, *Information Sciences*, 236, pp. 138-155.