УДК 517.5

Т. В. Ломако (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ТЕОРЕМА ЗАМЫКАНИЯ И КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

The paper is devoted to the investigation of the classes of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the integral type imposed on the complex coefficient. The theorem on closure and criterion of compactness are obtained for these classes.

Досліджуються класи регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на комплексний коефіцієнт. Доведено теорему замикання і критерій компактності для таких класів.

1. Введение. Недавно был доказан ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, [1, 2]), что открыло широкое поле исследований экстремальных задач в современных классах отображений на плоскости [3, 4]. В теории экстремальных задач важную роль играют теоремы компактности.

В предыдущей работе автора [5] (см. также [6]) были рассмотрены отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа и найдены достаточные условия компактности. В данной работе получены условия, которые являются не только достаточными, но и необходимыми для компактности классов отображений с интегральными ограничениями.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\big|\mu(z)\big| < 1$ почти всюду, $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + \big|\mu(z)\big|}{1 - \big|\mu(z)\big|} \tag{2}$$

— *максимальной локальной дилатацией* или просто *дилатацией* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$.

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., например, I.1.6 в [7]). В дальнейшем гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ почти всюду. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) почти всюду в D. Функции μ и K_μ называются *комплексной характеристикой* и *дилатацией* отображения f. Отметим, что понятие регулярного решения впервые введено в работе [8].

Напомним также, что функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях* (пишут $f \in \mathrm{ACL}$), если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R (см., например, [9], гл. 2, п. В). Известно, что f принадлежит $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда f принадлежит ACL и частные производные локально интегрируемы в D (см., например, 1.1.3 в [10]).

Далее через h обозначим *сферическое* (*хордальное*) *расстояние* между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$h(z_1, \infty) := \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, \qquad h(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \quad z_1, z_2 \neq \infty.$$

В дальнейшем $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$, через $dS(z) = \left(1+|z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$, а через L^1_S — класс всех функций $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. Через $m(E)$ обозначим меру Лебега множества $E \subseteq \mathbb{C}$. Положим также

$$S(E) = \int\limits_E dS(z).$$

В дальнейшем *непрерывность* функции $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} := [0, \infty]$. Функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty \tag{3}$$

(см. [11], гл. III, п. 3.1.1).

Пусть $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — произвольная функция, где $\mathrm{I} = [1, \infty]$. Обозначим через $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$, $M \geq$ ≥ 0, класс всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\big(K_\mu(z)\big) dS(z) \leq M, \tag{4}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Отметим, что класс $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ не является тривиальным (см. доказательство предложения 3.4 в [12], а также доказательство предложения 13.4 в [3]).

Будем говорить, что функция $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет *экспоненциальный рост на бесконечности*, если

$$\Phi(t) \geq \beta e^{\gamma t} \tag{5}$$

для всех $t \geq T$ при некотором $T \geq 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. В работе [12] (см. теорему 8, а также теорему 13.2 в [3]) доказана компактность классов H^{Φ}_M всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с интегральными ограничениями вида

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\big(K_\mu(z)\big) dm(z) \leq M \tag{6}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ при условии, что функция Φ непрерывна, выпукла, не убывает, имеет экспоненциальный рост на ∞ и $\inf_{t\in \mathrm{I}} \Phi = 0$.

В работе [5] (см. теорему 3) установлена компактность класса $\mathfrak{F}_M^{\Phi}$ при условии, что функция $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ непрерывна, строго выпукла и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \ln \Phi(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau^2} = \infty \tag{7}$$

при некотором $\delta > \delta_0 := \sup\limits_{\substack{\tau\in \mathrm{I}\\ \Phi(\tau)=0}} \tau$. Здесь мы доопределяем $\delta_0 = 1$, если $\Phi(\tau) > 0$ для всех $\tau \in \mathrm{I}$. В связи с изучением таких классов следует также обратить внимание на работы [13, 14]. Заметим, что выпуклая функция $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющая условию (7), удовлетворяет и условию (3). Это устанавливается рассуждением от противного, с использованием того факта, что наклон $\big(\Phi(t) - \Phi(t_0)\big)/(t - t_0)$ при некотором $t_0 \in \mathrm{I}$ не убывает для указанной функций Φ (см., например, предложение I.4.5 в [15]).

В настоящей работе показано, что указанные условия на функцию Φ с некоторым ослаблением условия непрерывности являются не только достаточными, но и необходимыми для компактности классов $\mathfrak{F}_M^{\Phi}$. Здесь также доказана теорема замыкания.

2. Теорема замыкания. *Нижней огибающей* функции $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть функцию

$$\Phi_0(t) := \sup_{\varphi\in\Psi} \varphi(t), \quad t \in \mathrm{I}, \tag{8}$$

где Ψ — семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\varphi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \le \Phi(t)$, $t \in \mathrm{I}$. С подробным геометрическим описанием нижней огибающей можно ознакомиться в [12] (гл. III, п. 3.1.3) и [3] (гл. 13, п. 13.1.3).

Из общих свойств выпуклых функций (см. [15], гл. I, п. 4.1) получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Нижняя огибающая функции $\Phi : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию $\Phi_0 : \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке*

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t \tag{9}$$

и график которой лежит ниже графика Φ. При этом $\Phi_0(t) \equiv \infty$ для всех $t > Q$ и $\Phi_0(t) < \infty$ для всех $t < Q$.

Лемма 1. *Пусть $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ является выпуклой и удовлетворяет условию* (7). *Тогда ее нижняя огибающая $\Phi_0\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ также удовлетворяет условию* (7).

Доказательство. Пусть $Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $Q < \infty$. Полагаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [1, Q], \\ e^{t-Q} - 1, & t > Q. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда φ принадлежит классу Ψ, который определяет Φ_0 и, следовательно, Φ_0 удовлетворяет (7) очевидным образом.

2. Пусть $Q = \infty$. Прежде всего докажем, что для функции Φ найдется $T \geq 1$ такое, что $\Phi(t)$ возрастает на $[T, \infty)$. Заметим, что функция Φ не может всюду убывать, так как тогда Φ ограничена, а в этом случае нарушается соотношение (7). Таким образом, для функции $\Phi\colon \mathrm{I} \to \to \overline{\mathbb{R}^+}$ найдутся хотя бы два значения $a < b$, $a, b \in \mathrm{I}$, для которых выполнено неравенство $\Phi(a) \leq \Phi(b)$. Покажем, что Φ не убывает на $[b, \infty]$. Предположим противное, тогда при некоторых t_1, $t_2 \in [b, \infty]$, $t_1 \leq t_2$, выполнено обратное неравенство $\Phi(t_1) \geq \Phi(t_2)$. Поскольку наклон выпуклой функции есть функция неубывающая (см. [15], предложение 5, гл. I, п. 4.3), мы, с одной стороны, имеем

$$0 > \frac{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)}{t_2 - t_1} \geq \frac{\Phi(a) - \Phi(t_1)}{a - t_1}, \tag{11}$$

однако, с другой стороны, по той же причине

$$\frac{\Phi(a) - \Phi(t_1)}{a - t_1} = \frac{\Phi(t_1) - \Phi(a)}{t_1 - a} \geq \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b - a} > 0. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) противоречат одно другому, поэтому Φ возрастает на $[b, \infty]$, что и требовалось доказать.

Выберем $T^* \geq T$ так, чтобы

$$\Phi(T^*) = \Phi'(T^*)(T^* - T). \tag{13}$$

В силу выпуклости и возрастания Φ такое T^* всегда существует (см., например, [16], гл. I, п. 10.4).

Полагаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [1, T], \\ \Phi'(T^*)(t - T), & t \in [T, T^*], \\ \Phi(t), & t \in [T^*, \infty]. \end{cases} \tag{14}$$

Докажем, что $\varphi(t) \leq \Phi(t)$ для $t \in [T, T^*)$. Предположим противное, т. е. что существует $t_0 \in [T, T^*)\colon \varphi(t_0) > \Phi(t_0)$, тогда

$$\frac{\Phi(T^*) - \Phi(t_0)}{T^* - t_0} > \Phi'(T^*).$$

Как отмечалось выше, наклон выпуклой функции есть функция неубывающая, тогда при $T \leq \leq t_0 \leq T^* - \Delta t < T^*$ имеет место

$$\frac{\Phi(T^*) - \Phi(T^* - \Delta t)}{\Delta t} \geq \frac{\Phi(T^*) - \Phi(t_0)}{T^* - t_0} > \Phi'(T^*). \tag{15}$$

Устремляя $\Delta t \to 0$ в выражении (15), получаем противоречие.

Заметим, что при $t = T^*$ касательная к графику функции $\Phi(t)$ проходит через точку $(\Phi, t) = (0, T)$, что эквивалентно (13), поэтому функция $\varphi(t)$ принадлежит классу Ψ, который определяет Φ_0 и, следовательно, имеет место (7).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — *неубывающая выпуклая функция, такая, что* $Q < \infty$ *и* $\Phi(Q) < \infty$, *где* Q *определено в* (9). *Тогда найдется последовательность непрерывных строго выпуклых функций* $\Phi_m\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *таких, что* $\Phi_m(t) \le \Phi(t)$ *для всех* $m = 1, 2, \ldots,$ $t \in \mathrm{I}$ *и* $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ *при* $m \to \infty$ *для всех* $t \in \mathrm{I}$.

Доказательство. Действительно, если $Q = 1$ и $\Phi(1) < \infty$, то в качестве Φ_m можно взять последовательность функций $\Phi_m(t) = \Phi(1) + e^{mt} - e^m$. Пусть теперь $Q \in (1,\, \infty)$. Тогда найдется возрастающая последовательность точек $t_m \in (1,\, Q)$ такая, что $t_m \to Q$ при $m \to \infty$, в которых существуют производные $\Phi'(t_m)$, $m = 1, 2, \ldots$ (см., например, следствие 2 в I.4.3 [15]). Полагаем $\Phi_m(t) = \Phi(t)$, $t \in [1,\, t_m]$, $\Phi_m(t) = \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m)$, $t \in (t_m,\, Q]$, и $\Phi_m(t) = \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(Q - t_m) + e^{mt} - e^{mQ}$ при $t \in (Q,\, \infty]$. Очевидно, что функции Φ_m непрерывны и строго выпуклы и, кроме того, $\Phi_m(t) \le \Phi(t)$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ и $t \in \mathrm{I}$ (см., например, следствие 7 в I.4.3 [15]). Остается заметить, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ при $m \to \infty$ для всех $t \in \mathrm{I}$.

Лемма доказана.

Прототип следующей теоремы для функций Φ с экспоненциальным ростом на бесконечности можно найти в работе [12] (теорема 7) и [3] (теорема 13.1).

Теорема 1. *Пусть для нижней огибающей* $\Phi_0\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *функции* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *выполнено условие вида* (7). *Тогда в топологии равномерной сходимости в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики*

$$\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}} \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M} \qquad \forall\, M \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty). \tag{16}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\Phi(t) \equiv \infty \equiv \Phi_0(t)$, то класс $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$ пуст для любого $M \in \mathbb{R}^+$ и тогда включение (16) очевидно. Напомним также, что класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$ является компактным по теореме 3 из работы [5], если Φ_0 — непрерывная в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ функция. Рассмотрим случай, когда $Q < \infty$ и $\Phi_0(Q) < \infty$. Воспользуемся леммой 2, в которой в качестве Φ и Φ_m возьмем функции Φ_0 и Φ_{0m} соответственно. Поскольку класс $\mathfrak{F}^{\Phi_{0m}}_{M}$ является компактным по теореме 3 из работы [5] и $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M} \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_{0m}}_{M}$ для всех $m = 1, 2, \ldots,$ то класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$ является нормальным и, согласно лемме Фату (см., например, теорему I(12.10) в [18]), замкнутым. Следовательно, класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$ является компактным. Докажем на этой основе включение (16). Действительно, по определению нижней огибающей $\Phi_0(t) \le \Phi(t)$, $t \in \mathrm{I}$. Кроме того, в силу предложения 1 функция Φ_0 измерима по Борелю, т. е. прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество. Следовательно, Φ_0 суперпозиционно измерима (см., например, [17], гл. IV п. 19). Таким образом, если K_μ — дилатация отображения $f \in \mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$, то суперпозиция $\Phi_0\big(K_\mu(z)\big)$ является измеримой функцией и $0 \le \Phi_0\big(K_\mu(z)\big) \le \Phi\big(K_\mu(z)\big)$, т. е. $f \in \mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M} \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$, а потому и $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}} \subseteq \overline{\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}}$. Наконец, $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}} = \mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$ в силу компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi_0}_{M}$ и, таким образом, получаем (16).

Теорема доказана.

3. Критерий компактности. Для доказательства критерия компактности нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть для функции* $\Phi\colon [1,\, Q] \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $1 < Q < \infty$, *не выполнено хотя бы одно из условий*: $\Phi(t)$ *непрерывна, не убывает и выпукла на* $[1,\, Q]$. *Тогда найдется последовательность* Q*-квазиконформных отображений* f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *на себя, сходящаяся* *равномерно к Q-квазиконформному отображению f, такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,\Psi(z)\,dm(z) \,<\, \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu_f}(z))\,\Psi(z)\,dm(z) \tag{17}$$

для любого открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ с $m(\Omega) < \infty$ и любой равномерно непрерывной функции $\Psi(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ такой, что $1/\Psi(z)$ локально ограничено в $\mathbb{C}$. При этом можно дополнительно предполагать, что:

1) *если существуют пара точек $1 \le t_1 < t_2 \le Q$ и число $\lambda \in (0, 1)$, для которых $\lambda\,\Phi(t_1) \,+\, (1-\lambda)\,\Phi(t_2) \,<\, \Phi\big(\lambda\,t_1 + (1-\lambda)\,t_2\big)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \big[\lambda\,\Phi(t_1) + (1-\lambda)\,\Phi(t_2)\big]\nu(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \Phi\big(\lambda\,t_1 + (1-\lambda)\,t_2\big)\nu(\Omega);$$

2) *если существуют $1 \le t_1 < t_2 \le Q$, для которых $\Phi(t_2) < \Phi(t_1)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \Phi(t_2)\ \nu(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \Phi(t_1)\ \nu(\Omega);$$

3) *если функция $\Phi(t)$ не убывает и $\Phi(Q-0) < \Phi(Q)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \Phi(Q-0)\ \nu(\Omega),$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,\Psi(z)\,dm(z) = \Phi(Q)\ \nu(\Omega),$$

где

$$\nu(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \Psi(z)\,dm(z)\,.$$

Доказательство. В силу леммы Фату и счетной аддитивности интеграла (см., например, теоремы I(12.7) и I(12.10) в [18]) утверждение достаточно доказать для ограниченных множеств Ω. На таком множестве по условию леммы функция $\Psi(z)$ ограничена сверху и $\Psi(z) \ge C > 0$ для всех $z \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать также, что правая часть в (17) конечна и, следовательно, конечна левая часть в (17) с $\Psi(z) \equiv 1$ в силу соотношения (19) из леммы 2 работы [19].

Пусть $K(z, h) \subset \Omega$ — квадрат с центром в точке z и длиной стороны h, ребра которого ориентированы параллельно осям координат. Из равномерной непрерывности $\Psi(z)$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $z,\, z' \in \Omega$ из того, что $z \in K(z',\, h)$, $h < \delta(\varepsilon)$, следует неравенство $\big|\Psi(z) - \Psi(z')\big| < \varepsilon$.

Система квадратов $K(z,\, h)$, $z \in \Omega$, $h < \delta(\varepsilon)$, образует покрытие множества Ω в смысле Витали и по теореме Витали (см., например, теорему IV(3.1) в [18]) можно выбрать последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m,\, h_m) \subseteq \Omega$, $m = 1,\, 2, \ldots$, из указанного покрытия такую, что $m\,(\Omega \setminus \cup E_m) = 0$.

Согласно лемме 2 в [19], при $\varepsilon < C$ получаем

$$\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_\mu(\zeta)\big)\Psi(\zeta)\,dm(\zeta)\ >$$

$$> \big(\Psi(z_m) + \varepsilon\big)\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_\mu(\zeta)\big)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_\mu(\zeta)\big)\,dm(\zeta)\ >$$

$$> \big(\Psi(z_m) + \varepsilon\big)\varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_{\mu_n}(\zeta)\big)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_\mu(\zeta)\big)\,dm(\zeta)\ >$$

$$> \varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_{\mu_n}(\zeta)\big)\Psi(\zeta)\,dm(\zeta) - 2\varepsilon\int\limits_{E_m} \Phi\big(K_\mu(\zeta)\big)\,dm(\zeta).$$

Из последнего неравенства, согласно счетной аддитивности интеграла и лемме Фату, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_\mu(z)\big)\big(\Psi(z) + 2\varepsilon\big)\,dm(z)\ > \varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_n}(z)\big)\Psi(z)\,dm(z),$$

откуда в силу произвольного выбора ε получаем неравенство (17).

Наконец, пункты 1 – 3 следуют, аналогично вышеприведенным рассуждениям, из пунктов 1 – 3 леммы 2 в работе [19].

Лемма доказана.

Для полноты изложения на основе леммы 3 сформулируем аналог леммы 2 из работы [19] в терминах сферической площади.

Лемма 4. *Пусть для функции* $\Phi\colon [1,\, Q] \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $1 < Q < \infty$, *не выполнено хотя бы одно из условий*: $\Phi(t)$ *непрерывна, не убывает и выпукла на* $[1,\, Q]$. *Тогда найдется последовательность* Q-*квазиконформных отображений* f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *на себя, сходящаяся равномерно относительно сферической метрики в* $\overline{\mathbb{C}}$ *к* Q-*квазиконформному отображению* f, *такая, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,dS(z) < \int\limits_{\Omega} \Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z) \qquad (18)$$

для любого открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. *При этом можно дополнительно предполагать, что*:

1) *если существуют пара точек* $1 \le t_1 < t_2 \le Q$ *и число* $\lambda \in (0, 1)$, *для которых* $\lambda\,\Phi(t_1) + (1-\lambda)\,\Phi(t_2) < \Phi\big(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2\big)$, *то*

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,dS(z) = \big[\lambda\,\Phi(t_1) + (1-\lambda)\,\Phi(t_2)\big]\,S(\Omega),\\ \int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z) = \Phi\big(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2\big)\,S(\Omega)\,;\end{gathered} \tag{19}$$

2) *если существуют* $1 \le t_1 < t_2 \le Q$, *для которых* $\Phi(t_2) < \Phi(t_1)$, *то*

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,dS(z) = \Phi(t_2)\,S(\Omega),\\ \int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z) = \Phi(t_1)\,S(\Omega)\,;\end{gathered} \tag{20}$$

3) *если функция* $\Phi(t)$ *не убывает и* $\Phi(Q-0) < \Phi(Q)$, *то*

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,dS(z) = \Phi(Q-0)\,S(\Omega),\\ \int\limits_{\Omega}\Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z) = \Phi(Q)\,S(\Omega).\end{gathered} \tag{21}$$

В связи с оценками (17) и (18) следует упомянуть работы [20] и [21].

Наконец, приведем необходимые и достаточные условия компактности для классов $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^{+}}$, $\Phi(\infty) = \infty$, *удовлетворяет условию* (7). *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *классы* $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$ *компактны в топологии равномерной сходимости в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики*;

2) *функция* Φ *непрерывна в смысле* $\overline{\mathbb{R}^{+}}$ *слева в точке* Q *из* (9) *и строго выпукла.*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1). Если функция Φ непрерывна в точке Q, то класс $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$ компактен по теореме 3 работы [5]. Если же $Q < \infty$ и $\Phi_0(Q) < \infty$, то компактность класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_{M}$ следует из теоремы 3 работы [5], леммы 2 и леммы Фату (см., например, теорему I(12.10) в [18]).

1) $\Rightarrow$ 2). а) Предположим, что функция Φ не является выпуклой на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, т. е. существуют $t_l \in \mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, $l = 1, 2$, $t_1 < t_2$, и $\lambda \in (0,1)$ такие, что

$$\lambda\,\Phi(t_1) \;+\; (1-\lambda)\,\Phi(t_2) < \Phi\big(\lambda\, t_1 + (1-\lambda)\, t_2\big). \tag{22}$$

Тогда, согласно пункту 1 леммы 4, найдется последовательность квазиконформных отображений $f_n\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, которая сходится равномерно к квазиконформному отображению $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{C}}\Phi(K_{\mu_{f_n}}(z))\,dS(z) \;<\; \int\limits_{\mathbb{C}}\Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z) \tag{23}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{C}}\Phi\big(K_{\mu_{f_n}}(z)\big)\,dS(z)=\big[\lambda\,\Phi(t_1)+(1-\lambda)\,\Phi(t_2)\big]\,\pi,$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\Phi\big(K_{\mu_f}(z)\big)\,dS(z)=\Phi\big(\lambda\,t_1+(1-\lambda)\,t_2\big)\big)\,\pi.$$

Однако это противоречит замкнутости и, следовательно, компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ при $M = = \pi\big\{\lambda\Phi(t_1)+(1-\lambda)\Phi(t_2)\big\}$.

б) Пусть Φ не является неубывающей на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, т. е. найдутся точки t_1 и $t_2\in\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$, $t_1<t_2$, такие, что $\Phi(t_1)>\Phi(t_2)$. Тогда получаем противоречие аналогично пункту а) доказательства в силу пункта 2 леммы 4.

в) Пусть Φ не является непрерывной слева в точке $\mathrm{T}:=\sup_{\Phi(t)<\infty}\ t<\infty$. Тогда получаем противоречие аналогично пункту а) доказательства в силу пункта 3 леммы 4.

Наконец, пусть $T=\infty$ и Φ не является непрерывной слева в ∞, т. е. $\Phi(\infty-0)<\infty$. Согласно пунктам а) и б) доказательства, можем предполагать, что Φ является неубывающей и выпуклой на $\mathrm{I}\setminus\{\infty\}$. Мы также можем предполагать, что функцию Φ можно продолжить с I в $\overline{\mathbb{R}^+}$, согласно равенству $\Phi(t)\equiv\Phi(1)$ для всех $t\in[0,1)$. Таким образом, продолженная функция Φ является неубывающей и выпуклой (см., например, предложение I.4.8 в [15]). Поскольку Φ не является константой на I в силу условия (7), то $t_0=\sup_{\Phi(t)=\Phi(0)}t<\infty$ и, выбирая $t_*\in(t_0,\infty)$, получаем

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t}\ \geq\ \frac{\Phi(t_*)-\Phi(0)}{t_*}\ >\ 0\qquad\forall\,t\in[t_*,\infty)$$

согласно выпуклости Φ (см., например, предложение I.4.5 в [15]), т. е. $\Phi(t)\geq at$ для $t\geq t_*$, где $a=\big[\Phi(t_*)-\Phi(0)\big]/t_*>0$. Тогда $\Phi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, т. е. Φ является непрерывной в ∞.

Полученное противоречие опровергает предположение.

Теорема доказана.

Замечание. Условие (7) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности и, следовательно, для компактности класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$, если Φ непрерывна, выпукла и не убывает (см. теорему 5.1 в [22], а также работу [23]).

В заключение отметим, что теоремы компактности имеют важные приложения в теории экстремальных задач и теории вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе нелинейных, функционалов. Кроме того, в компактных классах отображений с интегральными ограничениями множество комплексных характеристик выпукло, что значительно упрощает построение вариаций (см., например, [3, 4]).

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Develop. math. – New York: Springer, 2012. – **26**. – 301 p.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вестн. – 2010. – **7**, № 4. – С. 467 – 515.
3. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.

4. *Гутлянский В. Я., Ломако Т. В., Рязанов В. И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вестн. – 2011. – **8**, № 4. – С. 513 – 536.
5. *Ломако Т. В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 341 – 349.
6. *Ломако Т. В.* Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Доп. НАН України. – 2011. – № 5. – С. 28 – 31.
7. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.
8. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equat. – 2009. – **54**, № 10. – P. 935 – 950.
9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
10. *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
11. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
12. *Рязанов В. И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Донецк, 1993. – 281 с.
13. *Lomako T., Salimov R., Sevostyanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. sci. Bucharest. Ser. Math. – 2010. – **59**, № 2. – P. 263 – 274.
14. *Салимов С. С., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 6. – С. 131 – 158.
15. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
16. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
17. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 291 с.
18. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
19. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику Лаврентьева М. А. // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 2. – С. 21 – 36.
20. *Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Ryazanov V. I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. – 1998. – **10**. – P. 353 – 375.
21. *Sevost'yanov E.* Compactness theory and mappings with finite length distortion // Sib. Adv. Math. – 2009. – **19**, № 3. – P. 179 – 191.
22. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 3. – С. 665 – 679.
23. *Севостьянов Е. А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ. – 2012. – **24**, № 1. – С. 131 – 156.

Получено 12.12.12,
после доработки — 18.03.13