УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ $S^r_{p,\theta}B$ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We obtain order estimates for approximations of functions from the classes $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ by entire functions in the metric of the space L_∞. In particular, exact-order estimates for the corresponding approximation characteristics are established in the one-dimensional case.

Получены порядковые оценки приближения функций из классов $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ целыми функциями в метрике пространства L_∞. В частности, в одномерном случае установлены точные по порядку оценки соответствующих аппроксимативных характеристик.

У цій роботі досліджуються апроксимативні характеристики функцій з класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ [1, 2]. Встановлюються оцінки наближення функцій із цих класів цілими функціями, носій перетворення Фур'є яких зосереджено у східчастому гіперболічному хресті і при цьому похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці. Слід зазначити, що в процесі отримання оцінок суттєву роль відіграє декомпозиційне зображення норм функцій із даних класів, встановлене П. І. Лізоркіним та С. М. Нікольським [3].

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|.$$

Для функції $f(x)$, заданої на $\mathbb{R}^d$, визначимо різницю 1-го порядку з кроком h за змінною x_j таким чином:

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(x)$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^l_{h,j} f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}^{l} f(x).$$

Нехай задано вектори $h = (h_1, \ldots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, та $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$. Тоді мішана різниця k-го порядку з векторним кроком h визначається рівністю

$$\Delta^k_h f(x) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \Delta^{k_2}_{h_2,2} \ldots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(x).$$

Крім цього покладемо $e_d = \{1, 2, \ldots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant d$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant d$, $e \subset e_d$. Задамо невід'ємний вектор $r^e = (r_{j_1}, \ldots, r_{j_m})$, $r_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$, і $\bar{r}^e = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_d)$, де

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_i, & i \in e, \\ 0, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, де r — заданий вектор із невід'ємними координатами, означаються таким чином (див. [3, 4]):

1) якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, то

$$S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d)\colon \|f\|_{S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де норма задається рівністю

$$\|f\|_{S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \left(\int\limits_0^2 \ldots \int\limits_0^2 \prod_{j \in e} h_j^{-\theta r_j - 1} \big\| \Delta^{k^e}_{h^e} f(\cdot) \big\|_p^\theta \prod_{j \in e} dh_j \right)^{1/\theta}; \tag{1}$$

2) якщо $\theta = \infty$, то

$$S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d)\colon \|f\|_{S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\}$$

і

$$\|f\|_{S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \sup_{h>0} \prod_{j \in e} h_j^{-r_j} \big\| \Delta^{k^e}_{h^e} f(\cdot) \big\|_p, \tag{2}$$

де $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$. Зазначимо, що простори функцій $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ були введені Т. І. Амановим [4] і при значенні параметра $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^r_pH(\mathbb{R}^d)$, які ввів С. М. Нікольський [5].

Далі, з метою спрощення записів будемо використовувати замість $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^r_pH(\mathbb{R}^d)$ позначення $S^r_{p,\theta}B$ та S^r_pH відповідно. Крім цього, будемо вважати, що координати вектора $r = (r_1, \ldots, r_d)$ впорядковані таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$.

Наведемо еквівалентне означення норми функцій із просторів $S^r_{p,\theta}B$ [3], яким будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [6]), з використанням якого дається відповідне означення.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$ (див., наприклад, [6], [7] (гл. 2)). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то запис $\langle f, \varphi \rangle$ означає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi\colon S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) e^{-i(\lambda,t)} dt \equiv \widetilde{\varphi}(\lambda),$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ і $(\lambda, t) = \sum_{i=1}^d \lambda_i t_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів λ і t.

Обернене перетворення Фур'є задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(t)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(\lambda)e^{i(\lambda,t)}d\lambda\equiv\widehat{\varphi}(t).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою

$$\langle\mathfrak{F}f,\varphi\rangle=\langle f,\mathfrak{F}\varphi\rangle,\qquad\langle\widetilde{f},\varphi\rangle=\langle f,\widetilde{\varphi}\rangle,$$

де $f\in S'$, а $\varphi\in S$.

Обернене перетворення узагальнених функцій також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle\mathfrak{F}^{-1}f,\varphi\rangle=\langle f,\mathfrak{F}^{-1}\varphi\rangle,\qquad\langle\widehat{f},\varphi\rangle=\langle f,\widehat{\varphi}\rangle.$$

Зазначимо, що для кожного $1<p<\infty$ існує природне неперервне вкладення L_p в S', і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Крім цього, для кожного вектора $s=(s_1,\ldots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{1,d}$, розглянемо множини

$$Q_{2^s}=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^d\colon\eta(s_j)2^{s_j-1}\leqslant|\lambda_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\right\},$$

$$\rho(s):=\left\{k=(k_1,\ldots,k_d)\colon\eta(s_j)2^{s_j-1}\leqslant|k_j|<2^{s_j},\ k_j\in\mathbb{Z},\ j=\overline{1,d}\right\},$$

де $\eta(0)=0$ і $\eta(t)=1,\ t>0$.

Нехай $A\subset\mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta_s^*(f,x)=\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f\cdot\chi_{Q_{2^s}}).$$

У прийнятих позначеннях простори $S^r_{p,\theta}B$, $1<p<\infty$, $r>0$, можна означити таким чином [3]:

$$S^r_{p,\theta}B:=\left\{f\in L_p(\mathbb{R}^d)\colon\|f\|_{S^r_{p,\theta}B}<\infty\right\},$$

де

$$\|f\|_{S^r_{p,\theta}B}\asymp\left(\sum_{s\geqslant0}2^{(s,r)\theta}\big\|\delta_s^*(f,\cdot)\big\|_p^\theta\right)^{1/\theta}\tag{3}$$

при $1\leqslant\theta<\infty$ і

$$\|f\|_{S^r_pH}\asymp\sup_{s\geqslant0}2^{(s,r)}\big\|\delta_s^*(f,\cdot)\big\|_p.\tag{4}$$

У випадку, коли $\|f\|_{S^r_{p,\theta}B}\leqslant1$, будемо говорити, що функція f належить класу $S^r_{p,\theta}B$, зберігаючи при цьому для класів $S^r_{p,\theta}B$ ті ж самі позначення, що і для просторів $S^r_{p,\theta}B$.

Для додатних послідовностей $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1\ll\mu_2$ означає, що існує стала $C>0$ така, що $\mu_1(N)\leqslant C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1\asymp\mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1\ll\mu_2$ та $\mu_1\gg\mu_2$. Зазначимо, що всі сталі C_i, $i=1,2,\ldots$, які зустрічаються у роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та вимірності простору $\mathbb{R}^d$.

Сформулюємо теорему, яка буде використана в процесі викладу результатів.

Теорема А [8, с. 150]. *Якщо* $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, *то для цілої функції експоненціального типу* $g = g_\nu \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *має місце нерівність* (*різних метрик*)

$$\|g_\nu\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Наближення функцій із класів $S^r_{p,\theta}$ цілими функціями. Означимо апроксимативну характеристику, яку будемо досліджувати.

Нехай $r = (r_1, \ldots, r_d)$ — вектор з цілочисловими координатами. Поставимо йому у відповідність вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = \overline{1,d}$, а вектору γ в свою чергу — вектор γ', де $\gamma'_j = \gamma_j$, якщо $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1,d}$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d), \gamma_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, позначимо

$$S_{Q_n^\gamma}(f,x) = \sum_{(s,\gamma)\leqslant n} \delta_s^*(f,x). \tag{5}$$

Зазначимо, що $S_{Q_n^\gamma}(f,x)$ — ціла функція зі спектром на множині

$$Q_n^\gamma = \bigcup_{(s,\gamma)\leqslant n} Q_{2^s}.$$

Множина Q_n^γ називається східчастим гіперболічним хрестом і при цьому mes $Q_n^\gamma \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [3]).

Введемо ще такі позначення:

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_\infty = \|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\|_\infty \tag{6}$$

і, відповідно, для функціонального класу $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(S^r_{p,\theta}B)_\infty = \sup_{f\in S^r_{p,\theta}B} \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_\infty. \tag{7}$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку сумі (5) відповідає сума

$$S_{2^n}(f,x) = \sum_{s\leqslant n} \delta_{2^s}^*(f,x),$$

де

$$\delta_{2^s}^*(f,x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{2^s}),$$

χ_{2^s} — характеристична функція півінтервалів $(-2^s, -2^{s-1}]$ та $[2^{s-1}, 2^s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, тобто $S_{2^n}(f,x)$ — ціла функція зі спектром на інтервалі $(-2^n; 2^n)$. Величини (6) та (7) у випадку $d = 1$ позначатимемо $\mathcal{E}_{2^n}(f)_\infty$ та $\mathcal{E}_{2^n}(S^r_{p,\theta}B)_\infty$ відповідно.

Спочатку сформулюємо і доведемо теорему щодо наближення класів $S^r_{p,\theta}B$ в метриці простору L_∞ функціями вигляду (5).

Зазначимо, що у процесі доведення одержаних результатів будемо використовувати деякі міркування, запропоновані А. С. Романюком [9], з відповідною модифікацією до наближення цілими функціями.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді справджується порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(S^r_{p,\theta}B)_\infty \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Доведення. Нехай f належить $S^r_{p,\theta}B$. Тоді, використавши нерівність Мінковського та теорему А, можемо записати

$$\big\|f(\cdot) - S^{\gamma}_n(f,\cdot)\big\|_\infty = \Big\|f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma)\leqslant n} \delta^*_s(f,\cdot)\Big\|_\infty \leqslant \sum_{(s,\gamma)>n} \big\|\delta^*_s(f,\cdot)\big\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \big\|\delta^*_s(f,\cdot)\big\|_p. \tag{8}$$

Щоб продовжити оцінку (8), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до останньої суми нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = \infty$), будемо мати

$$\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \big\|\delta^*_s(f,\cdot)\big\|_p \leqslant \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta^*_s(f,\cdot)\big\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-\left(s,r-\frac{1}{p}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{S^r_{p,\theta}B} \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-\left(s,r-\frac{1}{p}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,\bar{\gamma})\left(r_1-\frac{1}{p}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} = \mathfrak{I}_1, \tag{9}$$

де $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_d)$ — вектор з координатами $\bar{\gamma}_j = \dfrac{r_j - 1/p}{r_1 - 1/p}$, $j = \overline{1,d}$, а $r - \dfrac{1}{p}$ позначає вектор з координатами $r_j - \dfrac{1}{p}$, $j = \overline{1,d}$. Якщо $j = \overline{1,\nu}$, то $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$, і $1 < \gamma_j \leqslant \gamma_j$, якщо $j = \overline{\nu+1,d}$. Тоді, використавши відоме співвідношення (див., наприклад, [10, с. 11])

$$\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,\gamma)} \asymp 2^n n^{\nu-1},$$

отримаємо оцінку величини $\mathfrak{I}_1$

$$\mathfrak{I}_1 \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{10}$$

Отже, згідно з (8)–(10) будемо мати

$$\sup_{f\in S^r_{p,\theta}B} \big\|f(\cdot) - S^{\gamma}_n(f,\cdot)\big\|_\infty \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, беручи до уваги, що

$$\left\|\delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p \ll 2^{-(s,r)},$$

для останньої суми у (8) можемо записати

$$\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \left\|\delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p \ll \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-\left(s,r-\frac{1}{p}\right)} = \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,\bar{\gamma})\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{\nu-1}. \qquad (11)$$

Таким чином, співставляючи (8) і (11), отримуємо оцінку

$$\sup_{f\in S^r_{p,\theta}B} \left\|f(\cdot) - S_n^\gamma(f,\cdot)\right\|_\infty \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{\nu-1}.$$

Теорему доведено.

У наступному твердженні ми розглянемо одновимірний випадок і встановимо точну за порядком оцінку величини $\mathcal{E}_{2^n}(S^r_{p,\theta}B)_\infty$.

Теорема 2. *Нехай $d = 1$. Тоді при $1 < p < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p}$ і $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ має місце співвідношення*

$$\mathcal{E}_{2^n}(S^r_{p,\theta}B)_\infty \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)}. \qquad (12)$$

Доведення. Оцінку зверху в (12) одержано в теоремі 1 при $\nu = 1$.

Для встановлення відповідної оцінки знизу побудуємо екстремальну функцію, для якої буде мати місце співвідношення

$$\mathcal{E}_{2^n}(f)_\infty \gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$D_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2k+1}{2}x\right)\cdot x^{-1}$$

і відповідно

$$D_{\frac{1}{2}}(x) = D_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x}.$$

У подальших міркуваннях суттєве значення має той факт, що (див. [1])

$$\mathfrak{F}D_k(x) = \chi_k(x),$$

де

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & k < |x| < k+1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = k \text{ або } |x| = k+1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(t) = D_k(x).$$

Розглянемо функцію

$$f(x) = C_1 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{k\in\rho(n+1)} D_k(x), \quad C_1 > 0.$$

Нагадаємо, що $\rho(n+1) = \left\{k\colon 2^n \leqslant k < 2^{n+1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

Покажемо, що дана функція належить класу $S^r_{p,\theta}B$. Попередньо зазначимо, що має місце така порядкова рівність (див., наприклад, [1]):

$$\left\| \sum_{k\in\rho(n)} D_k(\cdot) \right\|_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{13}$$

У випадку $1 \leqslant \theta < \infty$, використавши (3) та (13), отримаємо

$$\|f\|_{S^r_{p,\theta}B} \asymp \left(2^{(n+1)r\theta}\left\|\delta^*_{n+1}(f,\cdot)\right\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{nr\theta}2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)\theta} \left\| \sum_{k\in\rho(n+1)} D_k(\cdot) \right\|_p \ll 1.$$

Аналогічно встановлюємо, що $\|f\|_{S^r_{p,\infty}B} \ll 1$.

Отже, f належить $S^r_{p,\theta}B$.

За рахунок вибору функції f маємо $S^\gamma_{Q_n}(f,\cdot) = 0$. Таким чином, отримаємо

$$\left\|f(\cdot) - S_{2^n}(f,\cdot)\right\|_\infty = \left\|f(\cdot)\right\|_\infty \asymp 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{k\in\rho(n+1)} D_k(\cdot) \right\|_\infty = 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)}\mathfrak{I}_2. \tag{14}$$

Щоб продовжити (14), оцінимо величину $\mathfrak{I}_2$. Маємо

$$\mathfrak{I}_2 = \left\| \sum_{k\in\rho(n+1)} D_k(\cdot) \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} D_k(\cdot) \right\|_\infty = \left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{n+1}x - \sin 2^n x}{x} \right\|_\infty \asymp 2^n.$$

Отже,

$$\left\|f(\cdot) - S_{2^n}(f,\cdot)\right\|_\infty \asymp 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)}2^n = 2^{-n\left(r-\frac{1}{p}\right)}.$$

Оцінки знизу в (12) встановлено.

Теорему доведено.

На завершення зазначимо наступне. Відшуканню точних за порядком оцінок величини $\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}(S^r_{p,\theta}B)_q$ присвячено роботи [1, 2]. Дослідження величини наближення за допомогою цілих функцій з носієм їх перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті на класах $S^\Omega_{p,\theta}B$, які є узагальненням класів $S^r_{p,\theta}B$, проводилися у роботах [11, 12].

1. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11**, № 4. – P. 454 – 466.
2. *Янченко С. Я.* Порядкові оцінки апроксимативних характеристик класів функцій визначених на $\mathbb{R}^d$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 244 – 262.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
4. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
5. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1342 – 1364.
6. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
9. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 113.
11. *Стасюк С. А., Янченко С. Я.* Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 367 – 384.
12. *Янченко С. Я.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 123 – 135.

Одержано 16.03.12