УДК 917.926

К. А. Касымов (Ин-т математики и механики Каз. нац. ун-та, Алматы, Казахстан),
Д. Н. Нургабыл (Жетысус. гос. ун-т, Талдыкорган, Казахстан),
А. Б. Уаисов (Ин-т математики и механики Каз. нац. ун-та, Алматы, Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

We obtain asymptotic estimates for solutions of singularly perturbed boundary-value problems with initial jumps.

Встановлено асимптотичні оцінки розв'язків сингулярно збурених крайових задач з початковими стрибками.

Для довольно широкого класса сингулярно возмущенных задач были разработаны эффективные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные приближения с любой точностью [1 – 8].

Вместе с тем для широкого класса сингулярно возмущенных краевых задач выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений без предварительного исследования оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам можно отнести и краевые задачи, для которых характерно наличие начального скачка. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в [9 – 11].

Однако в указанных работах рассматривается случай, когда малый параметр содержится только при старшей производной. Естественно возникает вопрос о выделении новых классов краевых задач, имеющих начальный скачок. Именно это и является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r} y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = h(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = \overline{0, l-1}, \qquad \left.\frac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=1} = \beta_i, \quad i = \overline{0, p-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, α_i, β_i — постоянные, $A_{n+m}(t) = 1$, $m + n = l + p$.

В настоящей работе устанавливаются асимптотические оценки и характер роста производных решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$, выделяется класс краевых задач, имеющих начальный скачок.

Потребуем выполнения следующих условий:

1^0. Функции $A_i(t) \in C^{n+m+1}([0,1])$, $i = \overline{0, n+m}$, $h(t) \in C([0,1])$.

2^0. Функция $A_n(t)$ удовлетворяет неравенству $A_n(t) \ne 0$, $0 \le t \le 1$.

3^0. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^m + A_{n+m-1}(t)\mu^{m-1} + \ldots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$$

имеет m различных корней $\mu_1, \ldots, \mu_m$ с отрицательными вещественными частями, причем $m < l$. Пусть $l - m = n_1$.

4^0. Справедливо $\bar{J}_0 = \det\|\sigma_{ij}\| \neq 0$, где элементы $\sigma_{ij} = u_{j0}^{(i-1)}(0)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, l}$, $\sigma_{l+i,j} = u_{j0}^{(i-1)}(1)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, p}$, составлены на основе фундаментальной системы решений $u_{10}(t)$, $u_{20}(t), \ldots, u_{n0}(t)$ уравнения

$$L_0\bar{y} = 0. \tag{3}$$

Пусть $\bar{W}(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (3), тогда $\bar{W}(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$.

5^0. Имеет место

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1} \frac{\bar{J}_i^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i-1} \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} - \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} \int_0^1 \frac{\bar{W}_t^{(i-1)}(1,s)}{\bar{W}(s)A_n(s)} h(s)ds - \alpha_{n_1} \neq 0, \tag{4}$$

где $\bar{J}_k^{(n_1)}(0)$ — определитель n-го порядка, полученный из $\bar{J}_0$ заменой k строки на строку $u_{10}^{(n_1)}(0), \ldots, u_{n0}^{(n_1)}(0)$, определитель $\bar{W}_t^{(q)}(t,s)$ получается из $\bar{W}(s)$ заменой n-й строки на строку $u_{10}^{(q)}(t), u_{20}^{(q)}(t), \ldots, u_{n0}^{(q)}(t)$.

2. Фундаментальная система решений. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное возмущенное уравнение

$$L_\varepsilon y = 0. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$. *Тогда для фундаментальной системы решений* $\tilde{y}_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$, *сингулярно возмущенного однородного уравнения* (5) *справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon \to 0$ *представления*:

$$\tilde{y}_i^{(q)}(t,\varepsilon) = u_{i0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

$$\tilde{y}_{n+r}^{(q)}(t,s) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_r(x)dx\right)\left(u_{n+r}(t)\mu_r^q(t) + O(\varepsilon)\right), \tag{6}$$

$$r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

где $u_{10}(t), u_{20}(t), \ldots, u_{n0}(t)$ — *фундаментальная система решений уравнения* (3), $u_{n+r}(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$.

Доказательство леммы непосредственно следует из известной теоремы Шлезингера – Биркгофа – Нуайона (см., например, [7, с. 29 – 34]).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (5) возьмем

$$y_i(t,\varepsilon) = \tilde{y}_i(t,\varepsilon), \quad i = 1,\ldots,n, \qquad y_{n+s}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{n_1}\tilde{y}_{n+s}(t,\varepsilon), \quad s = 1,\ldots,m, \tag{7}$$

где $n_1 = l - m$, $p = n - n_1 = n_2$. Составим определитель Вронского $W(t,\varepsilon)$ системы решений (7). С учетом (6) и (7) вынесем функции $\varepsilon^{n_1}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_i(x)dx\right)$, $i = 1,\ldots,m$, за знак определителя $W(t,\varepsilon)$. Тогда получим

$$W(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\chi}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx\right)\rho(t,\varepsilon),$$

где $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_m$, $\chi = n_1 m$, $\rho(t,\varepsilon) = \det\left\|\rho_{ij}(t,\varepsilon)\right\|$ — определитель $(n+m)$-го порядка, элементы которого имеют вид

$$\rho_{ij}(t,\varepsilon) = \begin{cases} u_{j0}^{(i-1)}(t) + O(\varepsilon), & j = 1,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,n+m, \\ \dfrac{1}{\varepsilon^{i-1}}\left(u_{j0}(t)\mu_{j-n}^{i-1} + O(\varepsilon)\right), & j = n+1,\ldots,n+m, \quad i = 1,\ldots,n+m. \end{cases}$$

Теперь исследуем асимптотическое представление определителя $\rho(t,\varepsilon)$. Раскладываем $\rho(t,\varepsilon)$ по всем возможным минорам первых n столбцов. Все эти миноры имеют нулевой порядок по ε. Поэтому в сумме произведений всех этих миноров на их алгебраические дополнения доминирующим членом $\rho(t,\varepsilon)$ будет то произведение, в котором алгебраическое дополнение имеет наименьший порядок по ε. В силу (6), (7) порядок главного члена элементов одного и того же столбца, занимающего с $(n+1)$-й по $(n+m)$-ю строки, начиная с первой строки убывает по мере роста номера строки. Следовательно, алгебраическое дополнение главного минора n-го порядка $w_\varepsilon(t)$, расположенного в левом верхнем углу, имеет наименьший порядок по ε. Поэтому доминирующий член определителя $\rho(t,\varepsilon)$ получается умножением минора $w_\varepsilon(t)$ на его алгебраическое дополнение, которое мы обозначим через $D(t,\varepsilon)$. Тогда, используя представления (6) и (7), для $\rho(t,\varepsilon)$ получаем

$$\rho(t,\varepsilon) = w_\varepsilon(t)\,D(t,\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}\right), \tag{8}$$

где $\lambda = \dfrac{(2n+m-1)m}{2}$. Определитель $w_\varepsilon(t)$ и алгебраическое дополнение $D(t,\varepsilon)$ в первом приближении при достаточно малых ε представимы в виде

$$w_\varepsilon(t) = \bar{W}(t) + O(\varepsilon), \qquad D(t,\varepsilon) = (-1)^{n(n+1)}\frac{1}{\varepsilon^{\lambda}}\pi(t)\,\omega(t)\left(1 + O(\varepsilon)\right), \tag{9}$$

где $n(n+1)$ — четное число; $\pi(t) = \prod_{k=1}^{m} u_{n+k}(t)\,\mu_k^n(t)$; $\omega(t)$ — определитель Вандермонда для корней $\mu_1,\ldots,\mu_m$, который отличен от нуля на $0 \le t \le 1$, так как эти корни попарно различны и отличны от нуля. Согласно процедуре определения функции $u_{n+1}(t),\ldots,u_{n+m}(t)$ также отличны от нуля на отрезке $[0,1]$. Теперь, учитывая представления (9), из (8) имеем

$$\rho(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\lambda}}\bar{W}(t)\,\pi(t)\,\omega(t)\big(1+O(\varepsilon)\big) \neq 0.$$

Тогда

$$W(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{\chi}}{\varepsilon^{\lambda}}\bar{W}(t)\,\pi(t)\,\omega(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(x)dx\right)\big(1+O(\varepsilon)\big) \neq 0. \tag{10}$$

3. Функция Коши и граничные функции.

Определение 1. *Функция* $K(t,s,\varepsilon)$, *определенная при* $0 \le t, s \le 1$, *называется функцией Коши, если она по* t *удовлетворяет однородному уравнению* (5) *и при* $t = s$ — *начальным условиям*

$$K^{(j)}(s,s,\varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0, n+m-2}, \qquad K^{(n+m-1)}(s,s,\varepsilon) = 1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$. *Тогда при достаточно малых* ε *функция Коши* $K(t,s,\varepsilon)$ *при* $0 \le t, s \le 1$ *существует, единственна и выражается формулой*

$$K(t,s,\varepsilon) = W(t,s,\varepsilon)/W(s,\varepsilon), \tag{11}$$

где $W(t,s,\varepsilon)$ — *определитель* $(n+m)$-*го порядка, получаемый из вронскиана* $W(s,\varepsilon)$ *заменой* $(n+m)$-*й строки фундаментальной системой решений* $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), \ldots, y_{n+m}(t,\varepsilon)$ *уравнения* (5).

Лемма 2. *Если выполнены условия* $1^0 - 3^0$, *то при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *функция Коши* $K(t,s,\varepsilon)$ *при* $0 \le s \le t \le 1$ *представима в виде*

$$K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^m\left(\frac{\bar{W}_t^{(q)}(t,s)}{\bar{W}(s)A_n(s)} + \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^q}\frac{\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)}{\omega(s)} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^q}\frac{\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)}{\omega(s)}\right)\right), \tag{12}$$

где $\bar{W}_t^{(q)}(t,s)$ — *определитель из* (4), *а* $\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ — *определитель* m-*го порядка, полученный из* $\omega(s)$ *заменой* m-*й строки на строку*

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_1(x)dx\right)\frac{u_{n+1}(t)\,\mu_1^q(t)}{u_{n+1}(s)\,\mu_1^n(s)}, \ldots, \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_m(x)dx\right)\frac{u_{n+m}(t)\,\mu_m^q(t)}{u_{n+m}(s)\,\mu_m^n(s)}. \tag{13}$$

Доказательство. Из (11) определим $W_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)$. С учетом (6) и (7) вынесем за знак определителя $W_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ функции $\varepsilon^{n_1}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu_i(x)\,dx\right)$, $i = 1,\ldots,m$. Тогда получим

$$W_t^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^{\chi}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(x)dx\right)\rho^{(q)}(t,s,\varepsilon), \tag{14}$$

где $\rho^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ — определитель $(n+m)$-го порядка, полученный из $\rho(s,\varepsilon)$ заменой $(n+m)$-й строки на строку $y_1^{(q)}(t,\varepsilon),\ldots,y_n^{(q)}(t,\varepsilon), v_{n+1}(t,s,\varepsilon),\ldots,v_{n+m}(t,s,\varepsilon)$, причем функции $v_{n+j}(t,s,\varepsilon)$ при достаточно малых ε представимы в виде

$$v_{n+j}(t,s) = \frac{1}{\varepsilon^q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(x)dx\right)\Big(u_{n+j}(t)\,\mu_j^q(t)+O(\varepsilon)\Big), \qquad j=\overline{1,m}, \quad q=\overline{0,n+m-1}. \tag{15}$$

Раскладывая $\rho^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ по элементам $(n+m)$-й строки, получаем

$$\rho^{(q)}(t,s,\varepsilon) = y_1^{(q)}(t,\varepsilon)\,M_{n+m,1}(s,\varepsilon)+\ldots+y_{n_1}^{(q)}(t,\varepsilon)\,M_{n+m,n_1}(s,\varepsilon)+$$
$$+\,v_{n+1}(t,s,\varepsilon)\,M_{n+m,n+1}(s,\varepsilon)+\ldots+v_{n+m}(t,s,\varepsilon)\,M_{n+m,n+m}(s,\varepsilon). \tag{16}$$

Исследуя теперь алгебраические дополнения $M_{n+m,j}(s,\varepsilon)$ так же, как и при выводе формул (8) – (10), находим

$$M_{n+m,j}(s,\varepsilon) = \frac{(-1)^{n+m+j}\varepsilon^m\pi(s)\omega(s)}{\varepsilon^\lambda\prod_{k=1}^m\mu_k(s)}\Big(\bar{W}_{nj}(s)+O(\varepsilon)\Big), \quad j=1,\ldots,n, \tag{17}$$

где $\bar{W}_{nj}(s)$ — определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя $\bar{W}(s)$ вычеркиванием n-й строки и j-го столбца; $\omega(t)$ — определитель Вандермонда для корней $\mu_1,\ldots,\mu_m$.

Аналогичным образом для $M_{n+m,n+j}(s,\varepsilon)$ получаем представление

$$M_{n+m,n+j}(s,\varepsilon) = (-1)^{2n+m+j}\,\frac{\varepsilon^{n+m-1}\pi(s)\bar{W}(s)}{\varepsilon^\lambda}\left(\frac{\omega_{mj}(s)}{u_{n+j}(s)\,\mu_j^n(s)}+O(\varepsilon)\right), \quad j=\overline{1,m}, \tag{18}$$

где $\omega_{mj}(s)$ — определитель $(m-1)$-го порядка, полученный из определителя Вандермонда $\omega(s)$ вычеркиванием m-й строки и j-го столбца.

С учетом (6), (7), (15), (17), (18), а также формулы $A_n(s)=(-1)^m\prod_{k=1}^m\mu_k(s)$ разложение (16) примет вид

$$\rho^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^m\pi(s)}{\varepsilon^\lambda}\left(\frac{\bar{W}_t^{(q)}(t,s)\omega(s)}{A_n(s)}+\frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^q}\,\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)\bar{W}(s)+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^q}\,\bar{W}(s)\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)\right)\right), \tag{19}$$

где $\omega^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ — определитель m-го порядка, который получается из определителя $\omega(s)$ заменой m-й строки на строку (13).

Теперь, используя представление (19) и формулы (8), (14), из (13) при достаточно малых ε получаем искомую оценку (12).

Лемма доказана.

Определение 2. *Функции* $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k=\overline{1,n+m}$, *называются граничными функциями краевой задачи* (1), (2), *если они удовлетворяют однородному уравнению* (5) *и краевым условиям*

$$\begin{gathered}
\Phi_k^{(j-1)}(0,\varepsilon) = 1 \quad \textit{при} \quad k = j, \quad j = \overline{1,l}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(0,\varepsilon) = 1 \quad \textit{при} \quad k \neq j, \quad j = \overline{1,l}, \quad k = \overline{1,n+m}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(1,\varepsilon) = 1 \quad \textit{при} \quad k = l+j, \quad j = \overline{1,p}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(1,\varepsilon) = 0 \quad \textit{при} \quad k \neq l+j, \quad j = \overline{1,p}, \quad k = \overline{1,n+m}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Рассмотрим определитель $J(\varepsilon) = \det \| \delta_{ij} \|$, $i, j = \overline{1,n+m}$, где элементы

$$\begin{gathered}
\delta_{ij} = y_j^{(i-1)}(0,\varepsilon), \quad j = \overline{1,n+m}, \quad i = \overline{1,l}, \\
\delta_{ij} = y_j^{(i-l-1)}(1,\varepsilon), \quad j = \overline{1,n+m}, \quad i = \overline{l+1,l+p},
\end{gathered}$$

в силу (6) и (7) представимы в виде

$$\begin{gathered}
\delta_{ij} = u_{j0}^{(i-1)}(0) + O(\varepsilon), \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,l}, \\
\delta_{l+i,j} = u_{j0}^{(i-1)}(1) + O(\varepsilon), \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,p}, \\
\delta_{i,n+j} = \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^{i-1}}\Big(u_{n+j,0}(0)\mu_j^{i-1}(0) + O(\varepsilon)\Big), \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,l}, \\
\delta_{l+i,n+j} = \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^{i-1}}\Big(u_{n+j,0}(1)\,\mu_j^{i-1}(1) + O(\varepsilon)\Big) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \mu_j(x)dx \right) = o(\varepsilon^N), \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,p}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь N — любое натуральное число.

Теперь с учетом (21) будем раскладывать $J(\varepsilon)$ по всем возможным минорам первых n столбцов. Все эти миноры имеют нулевой порядок по ε. Тогда в сумме произведений всех этих миноров на их алгебраические дополнения доминирующим членом $J(\varepsilon)$ будет то произведение, в котором алгебраическое дополнение имеет наименьший порядок по ε. Алгебраическое дополнение минора $J_0(\varepsilon)$ порядка n, расположенного в первых n столбцах и строках с номерами $1 \le k \le n_1$, $l+1 \le k \le l+n_2$, имеет наименьший порядок по ε, так как в силу (6), (7) порядок элементов определителя $J(\varepsilon)$, занимающих строки с первой по l-ю и столбцы с $(n+1)$-го по $(n+m)$-й, убывает по мере роста номера строки. Следовательно, доминирующий член определителя $J(\varepsilon)$ получается умножением минора $J_0(\varepsilon)$ на его алгебраическое дополнение $D(\varepsilon)$, и поэтому определитель $J(\varepsilon)$ в первом приближении равен произведению определителей $J_0(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon) = J_0(\varepsilon)\, D(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1 - 1}} \right).$$

Здесь $\lambda_1 = \dfrac{m(m-1)}{2}$, определители $D(\varepsilon)$ и $J_0(\varepsilon)$ при достаточно малых ε имеют вид

$$J_0(\varepsilon) = \bar{J}_0 + O(\varepsilon), \qquad D(\varepsilon) = (-1)^{mn_2} \frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1}} \big(\pi(0)\, \omega(0) + O(\varepsilon) \big), \tag{22}$$

где $\bar{J}_0 \neq 0$, $\pi(0) = \prod_{s=1}^{m} u_{n+s}(0)\, \mu_s^{n_1}(0)$ и $\omega(0) = \omega\big(\mu_1(0), \ldots, \mu_m(0)\big)$ отличны от нуля. Тогда для определителя $J(\varepsilon)$ с учетом (22) при достаточно малых ε на отрезке $0 \le t \le 1$ имеет место представление

$$J(\varepsilon) = (-1)^{mn_2} \frac{\bar{J}_0}{\varepsilon^{\lambda_1}} \pi(0)\, \omega(0) \big(1 + O(\varepsilon)\big) \neq 0\,. \tag{23}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 4^0$. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *граничные функции* $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$, *на отрезке* $[0,1]$ *существуют, единственны и выражаются формулой*

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = J_i(t,\varepsilon)/J(\varepsilon), \qquad i = \overline{1, n+m}, \tag{24}$$

где $J_i(t,\varepsilon)$ *— определитель, полученный из* $J(\varepsilon)$ *заменой* i*-й строки фундаментальной системой решений* $y_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{1, n+m}$, *уравнения* (5).

Отметим, что функция Коши $K\big(t,s,\varepsilon\big)$ и граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$, не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (5).

Лемма 3. *Если выполнены условия* $1^0 - 4^0$, *то граничные функции* $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$, *на отрезке* $0 \le t \le 1$ *имеют асимптотические при* $\varepsilon \to 0$ *представления*

$$\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\bar{J}_i^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} - \varepsilon^{n_1 - q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \frac{\bar{J}_i^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{n_1 - q + 1} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \right), \qquad i = \overline{1, n_1}\,, \tag{25}$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} - \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \frac{\bar{J}_{n_1+m+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n_1+1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \right), \qquad i = \overline{1, n_2}\,, \tag{26}$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(q)}(t,\varepsilon) = \varepsilon^i \left(\frac{\bar{J}_{n_1}^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} \frac{\omega_i}{\omega(0)} - \frac{\varepsilon^{n_1 - 1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_i^{(q)}(t)}{\omega(0)} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_i^{(q)}(t)}{\omega(0)} \right) \right), \qquad i = \overline{1, m}\,, \tag{27}$$

$$q = \overline{0, n+m-1},$$

где $\bar{J}_k^{(q)}(t)$ *— определитель* n*-го порядка, полученный из* $\bar{J}_0$ *заменой* k*-й строки на строку* $u_{10}^{(q)}(t), u_{20}^{(q)}(t), \ldots, u_{n0}^{(q)}(t)$; ω_i *— определитель* m*-го порядка, получаемый из определителя Вандермонда* $\omega(0)$ *заменой* i*-й строки на строку* $\mu_1^{-1}(0), \ldots, \mu_m^{-1}(0)$; $\omega_i^{(q)}(t)$ *— определитель* m*-го порядка, который получается из определителя* $\omega(0)$ *заменой* i*-й строки на строку*

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_1(x)dx \right) \frac{u_{n+1}(t)\, \mu_1^q(t)}{u_{n+1}(0)\, \mu_1^n(0)}, \ldots, \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_m(x)dx \right) \frac{u_{n+m}(t)\, \mu_m^q(t)}{u_{n+m}(0)\, \mu_m^n(0)}\,. \tag{28}$$

Доказательство. Разложим определитель $J_i^{(q)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n_1}$, $q=\overline{0,n+m-1}$, по элементам i-й строки, состоящей из фундаментальной системы решений $y_k^{(q)}(t,\varepsilon)$, $k=\overline{1,n+m}$, $q=\overline{0,n+m-1}$, уравнения (5):

$$J_i^{(q)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}y_j^{(q)}(t,\varepsilon)M_{ij}(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+n+j}y_{n+j}^{(q)}(t,\varepsilon)M_{in+j}(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n_1}. \tag{29}$$

Разложим определитель $M_{ij}(\varepsilon)$ по всем возможным минорам первых $n-1$ столбцов. При достаточно малых ε доминирующий член определителя $M_{ij}(\varepsilon)$ получается умножением минора $J_{ij}(\varepsilon)$ порядка $n-1$, расположенного в первых $n-1$ столбцах и строках с номерами $1\le k\le n_1-1$, $l\le k\le l+n_2-1$, на его алгебраическое дополнение $D(\varepsilon)$. Тогда для определителя $M_{ij}(\varepsilon)$ в первом приближении справедливо представление

$$M_{ij}(\varepsilon) = (-1)^{mn_2}\left(J_{ij}(\varepsilon)D(\varepsilon)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1-1}}\right)\right),$$

причем минор $J_{ij}(\varepsilon)$ в силу (6), (7) при достаточно малых ε имеет вид

$$J_{ij}(\varepsilon) = \bar{J}_{ij}+O(\varepsilon). \tag{30}$$

Здесь $\bar{J}_{ij}$ — дополнительный минор элемента $u_j^{(i-1)}(0)$ в определителе $\bar{J}_0$. Тогда, использовав (22), (30), определитель $M_{ij}(\varepsilon)$ при достаточно малых ε можно представить в виде

$$M_{ij}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2}}{\varepsilon^{\lambda_1}}\pi(0)\,\omega(0)\,\bar{J}_0\left(\frac{\bar{J}_{ij}}{\bar{J}_0}+O(\varepsilon)\right). \tag{31}$$

Аналогично тому, как была получена оценка (31) для $M_{ij}(\varepsilon)$, нетрудно показать, что

$$M_{i,n+j}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2+n_1-i-n_2}\pi(0)\,\omega_{1j}(0)}{\varepsilon^{\lambda_1}u_{n+j}(0)\,\mu_j^{n_1}(0)}\left(\bar{J}_i^{(n_1)}+O(\varepsilon)\right), \quad i=\overline{1,n_1}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{32}$$

где $\bar{J}_i^{(n_1)}$ — определитель n-го порядка, который получается из $\bar{J}_0$ заменой i-й строки на строку $u_1^{(n_1)}(0),\ldots,u_n^{(n_1)}(0)$; $\omega_{1j}(0)$ — определитель $(m-1)$-го порядка, получаемый из определителя Вандермонда $\omega(0)$ вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Из разложения (29) с учетом (31) и (32) находим

$$J_i^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2}\bar{J}_0\omega(0)\pi(0)}{\varepsilon^{\lambda}}\times$$

$$\times\left(\frac{\bar{J}_i^{(q)}(t)}{\bar{J}_0}-\frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q}\frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)}\frac{\bar{J}_i^{(n_1)}}{\bar{J}_0}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^{n_1+1}}{\varepsilon^q}\frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)}\right)\right), \quad i=\overline{1,n_1}. \tag{33}$$

Используя (24), (23) и (33), получаем для функции $\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)$ соотношение (25).

Исследуя функции $\Phi^{(q)}_{n_1+m+i}(t,\varepsilon)$, $\Phi^{(q)}_{n_1+i}(t,\varepsilon)$ аналогично тому, как была получена оценка (25), для функций $\Phi^{(q)}_{n_1+m+i}(t,\varepsilon)$, $\Phi^{(q)}_{i}(t,\varepsilon)$ легко получаем оценки (26) и (27).

Лемма доказана.

4. Аналитическое представление и оценка решения. Рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу (1), (2).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1^0-4^0. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *решение сингулярно возмущенной краевой задачи* (1), (2) *на отрезке* $[0,1]$ *существует, единственно и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l}\alpha_{i-1}\Phi_i(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{p}\beta_{i-1}\Phi_{l+i}(t,\varepsilon) -$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\Phi_{l+i}(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^1 K_t^{(j-1)}(1,s,\varepsilon)h(s)\,ds+\frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)h(s)\,ds\,. \qquad (34)$$

Доказательство. Решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i\Phi_i(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)h(s)\,ds\,, \qquad (35)$$

где c_i — неизвестные постоянные. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y(t,\varepsilon)$, заданная по формуле (34), является решением уравнения (1). Для определения c_i подставим (35) в краевые условия (2). Тогда с учетом краевых условий (20) однозначно получим

$$c_i=\alpha_{i-1}, \quad i=\overline{1,l}, \qquad c_{l+j} = \beta_{j-1} - \frac{1}{\varepsilon^m}\int_0^1 K_t^{(j-1)}(1,s,\varepsilon)h(s)\,ds, \qquad j=\overline{1,p}.$$

Подставляя их в (35), получаем (34). Единственность решения доказывается от противного.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1^0-4^0. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *для решения* $y(t,\varepsilon)$ *краевой задачи* (1), (2) *и его производных на отрезке* $0\le t\le 1$ *справедливы оценки*

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left[\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{i-1}+\sum_{i=1}^{n_2}\beta_{i-1}+\max_{0\le t\le 1}|h(t)|+\varepsilon^{n-q}\max_{0\le t\le 1}|h(t)| +\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon^{n_1-q}\exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{i-1}+\sum_{i=1}^{n_2}\beta_{i-1}+\max_{0\le t\le 1}|h(t)|+\alpha_{n_1}\right)\right], \qquad q=\overline{0,n+m-1}. \qquad (36)$$

Доказательство. Из формул (12), (25) – (27) в силу условий 1^0-3^0 имеем следующие оценки:

$$\left|K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^m\left(1+\varepsilon^{n-1-q}\exp\left(-\frac{\nu(t-s)}{\varepsilon}\right)\right), \qquad q=\overline{0,n+m-1}, \tag{37}$$

$$\left|\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\varepsilon^{n_1-q}\exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right)\right), \quad i=\overline{1,n_1}, \quad q=\overline{0,n+m-1},$$

$$\left|\Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\varepsilon^{n_1-q}\exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right)\right), \quad i=\overline{1,n_2}, \quad q=\overline{0,n+m-1}, \tag{38}$$

$$\left|\Phi_{n_1+i}^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^i\left(1+\varepsilon^{n_1-1-q}\exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right)\right), \quad i=\overline{1,m}, \quad q=\overline{0,n+m-1}.$$

Оценивая решение (34) с учетом (37), (38), получаем оценку (36).

Теорема доказана.

Теперь определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных рассуждений мы не можем сформулировать краевые условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0\bar{y} = h(t), \tag{39}$$

получаемого из (1) при $\varepsilon=0$. Такие дополнительные рассуждения мы можем получить из теоремы 4. Из оценки (36) при $q=0$ следует, что предельная функция для $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ не будет содержать $\alpha_{n_1},\alpha_{n_1+1},\dots,\alpha_{l-1}$, так как коэффициенты при α_i, $i=\overline{0,n_1-1}$, и β_i, $i=\overline{0,n_2-1}$, имеют порядок $O(1)$, а при $\alpha_{n_1},\alpha_{n_1+1},\dots,\alpha_{l-1}$ — порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, краевые условия для решения $\bar{y}(t)$ невозмущенного уравнения (39) определяются с помощью краевых условий (2), содержащих α_i, $i=\overline{0,n_1-1}$, и β_i, $i = \overline{0,n_2-1}$:

$$\left.\frac{d^i\bar{y}}{dt^i}\right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i=0,1,\dots,n_1-1, \qquad \left.\frac{d^i\bar{y}}{dt^i}\right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i=0,1,\dots,n_2-1, \tag{40}$$

где $n_1=l-m$, $n_2=n-n_1=p$. Ниже покажем, что уравнение (39) и краевые условия (40) действительно определяют вырожденную задачу.

По аналогии с (11), (24) для задачи (39), (40) введем функцию Коши и граничные функции

$$\bar{K}(t,s) = \frac{\bar{W}(t,s)}{\bar{W}(s)}, \qquad \bar{\Phi}_k(t) = \frac{\bar{J}_k(t)}{\bar{J}_0}, \qquad k=1,\dots,n, \tag{41}$$

где определители $\bar{J}_0$, $\bar{W}(t)$, $\bar{W}(t,s)$ введены в пункте 1, $\bar{J}_k(t)$ — определитель из леммы 3 при $q=0$.

Очевидно, что $\bar{K}(t,s)$ — функция Коши: $L_0\bar{K}(t,s)=0$ при $0\le t,s\le 1$, $\bar{K}^{(j)}(s,s)=0$, $j=\overline{0,n-2}$, $\bar{K}^{(n-1)}(s,s)=1$, а $\bar{\Phi}_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, — граничные функции краевой задачи (39), (40):

$$L_0\overline{\Phi}_k(t) = 0, \quad \Phi_k^{(j)}(0) = 1 \quad \text{при} \quad j = k-1, \quad \Phi_k^{(j)}(0) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k-1, \quad k = \overline{1, n_1},$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(j)}(1) = 1 \quad \text{при} \quad j = i-1, \quad \Phi_{n_1+i}^{(j)}(1) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i-1, \quad i = \overline{1, n_2}.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 4^0$. *Тогда краевая задача* (39), (40) *на отрезке* $0 \le t \le 1$ *имеет единственное решение*

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1}\overline{\Phi}_i(t) + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_{i-1}\overline{\Phi}_{n_1+i}(t) - \sum_{i=1}^{n_2} \overline{\Phi}_{n_1+i}(t) \int_0^1 \frac{\overline{K}_t^{(i-1)}(1,s)}{A_n(s)} h(s)\, ds + \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_n(s)} h(s)\, ds. \tag{42}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Заметим, что условие 5^0 в силу (41), (42) примет вид $\Lambda_0 = \alpha_{n_1} - \overline{y}^{(n_1)}(0) \neq 0$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 4^0$. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left| y^{(q)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(q)}(t) \right| \le C\left(\varepsilon + \varepsilon^{n_1 - q} \exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{n+1-q} \right), \quad 0 \le t \le 1. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $y(t,\varepsilon) - \overline{y}(t) = u(t,\varepsilon)$. Тогда из (1), (2) относительно $u(t,\varepsilon)$ получаем задачу

$$\begin{gathered} L_\varepsilon u = f(t,\varepsilon), \qquad f(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad 0 \le t \le 1, \\ \left.\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, n_1 - 1}, \qquad \left.\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{t=1} = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \left.\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{t=0} = \alpha_i - \overline{y}^{(i)}, \quad i = \overline{n_1, l-1}. \end{gathered} \tag{44}$$

Применяя теорему 4 к краевой задаче (44), получаем искомые оценки (43).

Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 6 непосредственно следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) при стремлении малого параметра ε к нулю стремится к решению $\overline{y}(t)$ вырожденной задачи (39), (40):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(q)}(t), \qquad 0 \le t \le 1, \quad q = 0, 1, \ldots, n_1 - 1, \tag{45}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(q)}(t), \qquad 0 < t \le 1, \quad q = n_1, \ldots, n_1 + n_2. \tag{46}$$

Заметим, что предельные переходы (46) не являются равномерными в окрестности точки $t = 0$.

5. Определение начального скачка решения. В силу теоремы 6 и предельных равенств (45), (46) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(0,\varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(0), \quad q=\overline{0, n_1-1}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(n_1)}(0,\varepsilon) = \bar{y}^{(n_1)}(0)+\Lambda,$$
$$y^{(n_1+j)}(0,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-j}\right), \quad j=\overline{1, n_2+m-1}, \tag{47}$$

где Λ — некоторая величина, $y(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ — решение вырожденной задачи (39), (40). В этом случае будем говорить, что задача (1), (2) имеет начальный скачок n_1-го порядка в точке $t=0$ (Λ является величиной начального скачка решения задачи (1), (2)).

Определим Λ — величину скачка. Из формул (12), (25) – (27) с учетом формулы (41) и условий $1^0 - 4^0$ находим следующие асимптотические представления:

$$K_t^{(j)}(1,s,\varepsilon) = \varepsilon^m\left(\frac{\bar{K}^{(j)}(1,s)}{A_n(s)}+O(\varepsilon)\right), \quad j=\overline{0,n_2-1}, \tag{48}$$

$$\Phi_i^{(n_1)}(0,\varepsilon) = \bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(t)}{\omega(0)}\bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n_1},$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(n_1)}(t,\varepsilon) = \bar{\Phi}_{n_1+i}^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)}\bar{\Phi}_{n_1+m+i}^{(n_1)}(0)+O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n_2}, \tag{49}$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(n_1)}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{i-1}\left(\frac{\omega_i^{(n_1)}(0)}{\omega(0)}+O(\varepsilon)\right), \quad i=\overline{1,m}.$$

Теперь из (34) в силу (48), (49) получаем

$$y^{(n_1)}(0,\varepsilon) = \bar{y}^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)}\left[\bar{y}^{(n_1)}(0)-\alpha_{n_1}\right] + O(\varepsilon). \tag{50}$$

Если выполнены условия $1^0 - 4^0$, то из (53) находим формулу начального скачка

$$\Lambda = \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)}\left(\alpha_{n_1} - \bar{y}^{(n_1)}(0)\right). \tag{51}$$

Выясним характер роста производных n_1+j порядков решения задачи (1), (2), в окрестности точки $t=0$. Из (25) – (27) находим

$$\Phi_i^{(n_1+j)}(0,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^j}\frac{\omega_1^{(n_1+j)}(0)}{\omega(0)}\left(\bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0)+O(\varepsilon)\right), \quad i=\overline{1, n_1}, \quad j=\overline{1, m+n_2-1},$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(n_1+j)}(0,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^j}\frac{\omega_1^{(n_{+}j_1)}(0)}{\omega(0)}\left(\bar{\Phi}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)+O(\varepsilon)\right), \quad i=\overline{1, n_2}, \quad j=\overline{1, m+n_2-1}, \tag{52}$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(n_1+j))}(0,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{i-1}}{\varepsilon^j}\left(\frac{\omega_i^{(n_1+j)}(0)}{\omega(0)}+O(\varepsilon)\right), \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,m+n_2-1}.$$

Подставляя (48), (52) в формулу (34), находим более точную оценку для $y^{(n_1+j)}(0,\varepsilon)$, чем (47):

$$y^{(n_1+1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), y^{(n_1+2)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \ldots, y^{(n+m-1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m-1}}\right).$$

Исходя из (51) и характера роста производных, заключаем, что сингулярно возмущенная краевая задача в окрестности точки $t = 0$ имеет начальный скачок n_1-го порядка, что является одной из особенностей изучаемой задачи.

Замечание. Установленный рост производных позволяет свести краевую задачу (1), (2) к задаче Коши с начальным скачком, что в свою очередь служит основой для построения асимптотических разложений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач с начальными скачками.

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. – 1948. – **22 (64)**, № 2. – С. 193 – 204.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3 – 122.
3. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной // Докл. АН СССР. – 1958. – **123**, № 4. – С. 583 – 586.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1979. – 154 с.
6. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1962. – Т. 2. – С. 21 – 39.
7. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
8. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 5. – С. 997 – 1000.
9. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 6. – С. 1242 – 1245.
10. *Касымов К. А., Нургабыл Д. Н.* Асимптотическое поведение решений линейных сингулярно возмущенных общих разделенных краевых задач, имеющих начальный скачок // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 11. — С. 1496 – 1508.
11. *Касымов К. А., Нургабыл Д. Н.* Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 597 – 607.

Получено 08.07.12