УДК 517.51

А. П. Мусієнко, А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА МНОЖИНАХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

For functions from a sets $C^\psi_\beta L_s$, $1 \le s \le \infty$, where $\psi(k) > 0$ and $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$, we obtain asymptotically unimprovable estimates for the norms of deviations (in the uniform metric) of de la Vallée Poussin sums, which are represented in terms of the best approximations of (ψ,β)-derivatives of functions of this sort by trigonometric polynomials in the metrics of the spaces L_s. We show that the estimates obtained are unimprovable on some important functional subsets.

Для функций из множеств $C^\psi_\beta L_s$, $1 \le s \le \infty$, где $\psi(k) > 0$ и $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$, получены асимптотически неулучшаемые оценки норм уклонений в равномерной метрике сумм Валле Пуссена, которые выражаются через значения наилучших приближений (ψ,β)-производных таких функций тригонометрическими многочленами в метриках пространств L_s. Показана неулучшаемость полученных оценок на некоторых важных функциональных подмножествах.

Дана стаття є продовженням роботи [1], в якій для функцій із множин $C^\psi_\beta C$ та $C^\psi_\beta L_s$, $1 \le$ $\le s \le \infty$, одержано асимптотично непокращувані оцінки відхилень у рівномірній метриці сум Валле Пуссена, які виражаються через значення найкращих наближень (ψ,β)-похідних таких функцій тригонометричними поліномами в метриках просторів L_s, де послідовності $\psi(k) > 0$ задовольняють умову Даламбера $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$. Метою даної роботи є отримання аналогів нерівності Лебега у випадку, коли послідовності $\psi(k) > 0$ такі, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{1}$$

При цьому будемо використовувати запис $\psi \in \mathcal{D}_0$.

Через C і L_s, $1 \le s \le \infty$, позначимо простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_s$.

Нехай, далі, $L^\psi_\beta \mathfrak{N}$ — клас 2π-періодичних сумовних функцій $f (f \in L_1)$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{N} \subset L_1, \quad \varphi \perp 1, \tag{2}$$

з сумовним ядром $\Psi_\beta(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_\beta(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \psi(k) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Наслідуючи О. І. Степанця [2], функцію φ в рівності (2) називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β. Також покладемо $C^\psi_\beta = L^\psi_\beta \bigcap C$, $C^\psi_\beta \mathfrak{N} = L^\psi_\beta \mathfrak{N} \bigcap C$. Зрозуміло, що для функцій $f \in C^\psi_\beta \mathfrak{N}$ рівність (2) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$. Далі роль $\mathfrak{N}$ відіграватимуть простори C чи L_s, $1 \le s \le \infty$, або ж деякі їх підмножини.

Якщо $\psi \in \mathcal{D}_0$, то множини $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто з цілих функцій (див., наприклад, [2, с. 139 – 145]).

У випадку, коли послідовність $\psi(k)$ має вигляд

$$\psi(k) = e^{-\alpha k^r}, \qquad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

множини $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо позначати через $L^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ відповідно. Множини $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з узагальнених інтегралів Пуассона (див., наприклад, [3, с. 926]), тобто з функцій вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{\alpha,r,\beta}(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{N}, \quad \varphi \perp 1, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$ — узагальнені ядра Пуассона з параметрами $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо функції f і φ пов'язані рівністю (4), то функцію φ в цій рівності будемо позначати через $f^{\alpha,r}_{\beta}$.

При $r = 1$ ядра $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ є звичайними ядрами Пуассона, тобто функціями вигляду $P_{\alpha,1,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$. Неважко переконатись, що послідовність $\psi(k)$ вигляду (3) задовольняє умову $\mathcal{D}_0$ при $r > 1$.

Одиничну кулю в L_s, $1 \le s \le \infty$, позначимо через U_s і покладемо $C^{\psi}_{\beta,s} = C^{\psi}_{\beta} U_s$, $L^{\psi}_{\beta,s} = L^{\psi}_{\beta} U_s$.

Нехай $E_m(f)_{L_s}$ — найкраще наближення функції $f \in L_1$ у метриці простору L_s, $1 \le s \le \infty$, тригонометричними поліномами t_{m-1} порядку $m-1$, тобто $E_m(f)_{L_s} = \inf_{t_{m-1}} \left\| f - t_{m-1} \right\|_{L_s}$.

Тригонометричні поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_k(f) = S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, а $p = p(n)$, $p \le n$, — певний натуральний параметр, називають сумами Валле Пуссена функції f. При $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f)$ є звичайними частинними сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$ порядку $n-1$, якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$ порядку $n-1 : \sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x)$.

Апроксимаційні властивості сум $V_{n,p}(f;x)$ на класах (ψ,β)-диференційовних функцій досліджувались у роботах [1, 4 – 11]. Також з результатами у даному напрямку можна ознайомитись у монографіях [2, 12, 13].

У даній роботі для функцій f з множин $C^{\psi}_{\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена, тобто нерівності, в яких норми відхилень $\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C$, де $\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x)$, визначаються через найкращі наближення (ψ,β)-похідних таких функцій у метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, виконується нерівність*

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_C \le \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) \right) E_{n-p+1}\big(f^{\psi}_{\beta}\big)_{L_s}. \tag{5}$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$, і довільних n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, у множині $C^{\psi}_{\beta} L_s$, $1 \le s < \infty$, знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s} = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}$, і для неї при $n-p \to \infty$ виконується рівність

$$\big\|\rho_{n,p}(F;x)\big\|_C = \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p} \psi(n-p+1) + O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) \right) E_{n-p+1}\big(F^{\psi}_{\beta}\big)_{L_s}, \tag{6}$$

де $s' = \dfrac{s}{s-1}$. У (5) *і* (6) *коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ означаються рівністю*

$$\tau_{n,p}(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-k}{p}, & n-p+1 \le k \le n-1, \\ 1, & k \ge n, \end{cases} \tag{7}$$

а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$. Тоді в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [5, с. 810]) має місце інтегральне зображення

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t) \Psi_{1,n,p}(t) dt =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t) \cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t) \Psi_{2,n,p}(t) dt, \tag{8}$$

де $\Psi_{j,n,p}(t)$ означається рівністю

$$\Psi_{j,n,p}(t) = \sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k)\psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Функції $\cos\left((n-p+1)t - \dfrac{\beta\pi}{2} \right)$ та $\Psi_{2,n,p}(t)$ ортогональні до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p} порядку не вищого за $n-p$, тому згідно з (8)

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t) \cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t) \Psi_{2,n,p}(t) dt, \tag{10}$$

де

$$\delta_{n,p}(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot) - t_{n-p}(\cdot). \tag{11}$$

Вибравши в (10) у ролі $t_{n-p}(\cdot)$ поліном $t_{n-p}^*(\cdot)$ найкращого наближення у просторі L_s функції $f_\beta^\psi(\cdot)$ та використавши формулу (5.29) із роботи [14] і означення (7), рівномірні норми кожного з інтегралів рівності (10) оцінимо таким чином:

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\cos(n-p+1)t\,dt \right\|_C \le \|\delta_{n,p}\|_s \|\cos t\|_{s'} \le \|\cos t\|_{s'} E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_s}, \tag{12}$$

$$\left\| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n,p}(x-t)\Psi_{2,n,p}(t)dt \right\|_C \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\|\delta_{n,p}\|_s \|\Psi_{2,n,p}\|_{s'} \le \frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}} \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_s}. \tag{13}$$

Об'єднуючи (12) і (13), отримуємо (5).

Доведемо другу частину теореми. З інтегрального зображення (8) і ортогональності функції $\Psi_{2,n,p}(t)$ до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p} випливає, що для довільної функції $f \in C_\beta^\psi L_s$, $1 \le s < \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується рівність

$$\big|\rho_{n,p}(f;x)\big| = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t)\cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt \right| +$$

$$+\, O(1) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k) E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_s}. \tag{14}$$

Враховуючи (14), щоб переконатись у справедливості (6), досить показати, що якою б не була функція $\varphi \in L_s$, $1 \le s < \infty$, знайдеться функція $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi;\cdot)$, для якої при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$,

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} \tag{15}$$

і, крім того, має місце рівність

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t)\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt \right| = \|\cos t\|_{s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{16}$$

В якості $\Phi(\cdot)$ розглянемо функцію

$$\Phi(t) =$$

$$= \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \left|\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|^{s'-1} \operatorname{sign}\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{17}$$

Для неї

$$\big\|\Phi(t)\big\|_s = \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|^{(s'-1)s} dt \right)^{1/s} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} =$$

$$= \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} \left\| \cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_{s'}^{s'-1} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{18}$$

Крім того, оскільки для довільного тригонометричного полінома t_{n-p}

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-p}(\tau)\big|\Phi(\tau)\big|^{s-1}\mathrm{sign}\Phi(\tau)d\tau =$$

$$= \Big(\|\cos t\|_{s'}^{1-s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}\Big)^{s-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-p}(\tau)\cos\left((n-p+1)\tau + \frac{\beta\pi}{2}\right) d\tau = 0,$$

то на підставі теореми 1.4.5 із роботи [14, с. 28] можемо зробити висновок, що поліном $t^*_{n-p} \equiv 0$ є поліномом найкращого наближення функції $\Phi(t)$ у метриці простору L_s, $1 \le s < \infty$. Отже, з урахуванням (18)

$$E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = \|\Phi\|_s = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}. \tag{19}$$

Згідно з (17)

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(t)\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right| =$$

$$= \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|^{s'-1} \times\right.$$

$$\left. \times \mathrm{sign}\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right| =$$

$$= \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|^{s'} dt =$$

$$= \|\cos t\|_{s'} E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}.$$

З останніх співвідношень випливає (16).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільної* $f \in C^{\psi}_{\beta} L_\infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, *виконується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\left(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)\right)E_{n-p+1}\left(f_\beta^\psi\right)_{L_\infty}. \quad (20)$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C_\beta^\psi L_\infty$ *і довільних* $n,\ p \in \mathbb{N},\ p \leq n$, *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;p;x) \in C_\beta^\psi C$ *така, що* $E_{n-p+1}\left(F_\beta^\psi\right)_C = E_{n-p+1}\left(f_\beta^\psi\right)_{L_\infty}$, *і для неї при* $n-p \to \infty$ *справджується рівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(F;x)\right\|_C =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\left(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)\right)E_{n-p+1}(F_\beta^\psi)_C. \quad (21)$$

У (20) *і* (21) *коефіцієнти* $\tau_{n,p}(k)$ *означаються рівністю* (7), *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Нехай $f \in C_\beta^\psi L_\infty$, $\psi \in \mathcal{D}_0$. Виходячи з (8) та враховуючи ортогональність функції $\Psi_{1,n,p}(t)$ до будь-якого полінома t_{n-p} порядку не вищого за $n-p$, можемо записати

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\Psi_{1,n,p}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\left(\psi(n-p+1)\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\psi(n-p+2)\cos\left((n-p+2)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt, \quad (22)$$

де $\tau_{n,p}(k)$ і $\delta_{n,p}(\cdot)$ визначаються рівностями (7) і (11) відповідно.

Вибравши в (22) у ролі t_{n-p} поліном t^*_{n-p} найкращого наближення у просторі L_∞ функції f_β^ψ і застосувавши нерівність

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi}K(t-u)\varphi(u)du\right\|_C \leq \|K\|_{s'}\|\varphi\|_s, \qquad \varphi \in L_s, \quad K \in L_{s'}, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1, \quad (23)$$

при $s=\infty$, отримаємо оцінку

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi p}\left(\left\|\psi(n-p+1)\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+2\psi(n-p+2)\cos\left((n-p+2)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_1+\right.$$

$$+p\left\|\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_1\Bigg)E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_\infty}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi p}\left(\left\|\psi(n-p+1)\cos(n-p+1)t+2\psi(n-p+2)\cos\left((n-p+2)t+\frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}\right)\right\|_1+\right.$$

$$\left.+O(1)p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\right)E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_\infty}. \tag{24}$$

Як випливає з роботи С. О. Теляковського [15, с. 512, 513],

$$\left\|\psi(n-p+1)\cos(n-p+1)t+2\psi(n-p+2)\cos\left((n-p+2)t+\frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}\right)\right\|_1+$$

$$+O(1)\,p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\leq 4\psi(n-p+1)+$$

$$+O(1)\left(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\right). \tag{25}$$

Співвідношення (24) і (25) доводять нерівність (20).

Доведемо другу частину теореми 2. З інтегрального зображення (22) і ортогональності функції $\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\left(kt-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)$ до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p} порядку не вищого за $n-p$ випливає, що для довільної функції f з множини $C_\beta^\psi L_\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta\in\mathbb{R}$, виконується рівність

$$\big|\rho_{n,p}(f;x)\big|=\frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(x-t)\left(\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\right|+$$

$$+\,O(1)\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_\infty}. \tag{26}$$

Для доведення (21), з урахуванням (26), досить встановити, що для довільної функції $\varphi\in$ $\in L_\infty^0=\big\{\varphi\in L_\infty\colon \varphi\perp 1\big\}$ існує функція $\Phi(\cdot)=\Phi(\varphi;\cdot)\in C$, для якої при всіх $n,p\in\mathbb{N}$, $p\leq n$,

$$E_{n-p+1}(\Phi)_C=E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$$

і, крім того, при $n-p\to\infty$ має місце рівність

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)\left(\cos\left((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\right|=$$

$$=\left(4+O(1)\left(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\right)^2\right)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{27}$$

Покладемо

$$\varphi_0(t)=\operatorname{sign}\cos\left((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$$

і через $\varphi_\delta(t)$ позначимо 2π-періодичну функцію, яка збігається з $\varphi_0(t)$ скрізь, за винятком δ-околів $\left(0<\delta<\dfrac{\pi}{2(n-p+1)}\right)$ точок $t_k=\dfrac{(2k+1-\beta)\pi}{2(n-p+1)}$, $k\in\mathbb{Z}$, де вона лінійна і її графік сполучає точки $\big(t_k-\delta,\varphi_0(t_k-\delta)\big)$ і $\big(t_k+\delta,\varphi_0(t_k+\delta)\big)$. Функція $\varphi_\delta(t)$ неперервна і в точках $\tau_k=\dfrac{(2k-\beta)\pi}{2(n-p+1)}$, $k=1,2,\ldots,2(n-p+1)$, періоду $\left(-\dfrac{\beta\pi}{2(n-p+1)},\ 2\pi-\dfrac{\beta\pi}{2(n-p+1)}\right]$ досягає по модулю максимального значення, яке дорівнює $E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}$, почергово змінюючи знак. Тому її поліном найкращого рівномірного наближення порядку не вищого за $n-p$, згідно з критерієм Чебишова, є поліномом, що тотожно дорівнює нулю і, отже,

$$E_{n-p+1}(\varphi_\delta)_C=\|\varphi_\delta\|_C=E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{28}$$

Враховуючи (23) і (28), одержуємо

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_\delta(t)\left(\cos\left((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\right|\le$$

$$\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos(n-p+1)t+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t-\frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}\right)\right|dtE_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{29}$$

Із нерівності (19) роботи [15, с. 513] випливає оцінка

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos(n-p+1)t+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t-\frac{\beta\pi}{2(n-p+1)}\right)\right|dt\le$$

$$\le 4+O(1)\left(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\right)^2. \tag{30}$$

З іншого боку,

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_\delta(t)\left(\cos\left((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\right|=$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) \left(\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) + 2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \cos\left((n-p+2)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) dt \right| +$$

$$+ O(1) r_{n,p}(\delta), \tag{31}$$

де

$$r_{n,p}(\delta) = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)\big) \left(\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \cos\left((n-p+2)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) dt \right|. \tag{32}$$

Оскільки ψ належить $\mathcal{D}_0$, то для досить великих значень $n-p$ справджується нерівність $\dfrac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} < 1$ і, отже,

$$r_{n,p}(\delta) < 3 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)\big| dt \leq 6(n-p+1)\delta E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{33}$$

Вибравши δ настільки малим, щоб виконувалась умова

$$0 < \delta < \frac{1}{n-p+1} \left(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \right)^2, \tag{34}$$

з (33) одержимо оцінку

$$r_{n,p}(\delta) = O(1) \left(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \right)^2 E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{35}$$

Оскільки $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) \cos\left((n-p+2)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt = 0$, то

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) \left(\cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) + 2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \cos\left((n-p+2)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) \cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt \right| =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| dt E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty} = 4E_{n-p+1}(\varphi)_{L_\infty}. \tag{36}$$

Із формул (29)–(31), (35) і (36) випливає, що для функції $\Phi(t) = \varphi_\delta(t)$, у якій параметр δ задовольняє умову (34), при $n-p+1 \to \infty$ має місце рівність (27), а отже, і (21).

Теорему 2 доведено.

Оскільки для сум $\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)$, які фігурують в теоремах 1 та 2, мають місце рівності

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=n-p+j}^{n-1}\frac{k-n+p}{p}\psi(k)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k), & p>j, \quad j\in\mathbb{N},\\ \displaystyle\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k), & p\le j, \quad j\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{37}$$

то, як неважко переконатися, для них справджується наступна оцінка зверху:

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)\leqslant\min\left\{\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k),\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k)\right\},\quad j\in\mathbb{N}.$$

Отже, у співвідношеннях (5) і (6) та співвідношеннях (20) і (21) величини $O(1)\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\psi(k)$ можна замінити на $O(1)\min\Big\{\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k),\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-$ $-n+p)\psi(k)\Big\}$, $j=2,3$.

Нерівності (5) і (20) залишаються асимптотично непокращуваними не тільки на всіх множинах $C_{\beta}^{\psi}L_s$, $1\le s<\infty$, та $C_{\beta}^{\psi}L_{\infty}$ при $\psi\in\mathcal{D}_0$, але і на таких важливих їх підмножинах, як класи $C_{\beta,s}^{\psi}$ і $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. Це випливає із наступних міркувань. Розглянемо точні верхні межі в обох частинах нерівності (5) по класу $C_{\beta,s}^{\psi}$, $1\le s<\infty$, і точні верхні межі в обох частинах нерівності (20) по класу $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. В результаті одержимо нерівності

$$\mathcal{E}(C_{\beta,s}^{\psi};V_{n,p})_C\le\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right),\quad 1\le s<\infty, \tag{38}$$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi};V_{n,p})_C\le\frac{1}{p}\left(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\left(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}+p\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)\right). \tag{39}$$

Зіставляючи два останні співвідношення відповідно з рівностями (24) і (7) із роботи [7, с. 337, 341], приходимо до висновку, що у співвідношеннях (38) і (39) можна поставити знак рівності.

У випадку, коли $\psi(k)=e^{-\alpha k^r}$, $\alpha>0$, $r>1$ (тобто, коли $C_{\beta}^{\psi}L_s=C_{\beta}^{\alpha,r}L_s$), як показано в [7, с. 348], для довільних $\alpha>0$, $r>1$, $j\in\mathbb{N}$ має місце оцінка

$$p\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)=$$

$$=\sum_{k=n-p+j}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\tau_{n,p}(k)=O(1)j^{\sigma(p)-1}\left(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+j)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)}e^{-\alpha(n-p+j)^r}, \tag{40}$$

де

$$\sigma(p) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{якщо} \ \ p \leq j, \\ 2, & \text{якщо} \ \ p > j, \end{cases} \tag{41}$$

а коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ означаються формулою (7). Отже, на підставі (40) із теорем 1 та 2 одержуємо наступні твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, p, $n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, і $1 \leq s < \infty$. Тоді для довільної $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_s$ виконується нерівність*

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_C \leq$$
$$\leq \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} + O(1) \left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}} \right) E_{n-p+1}\big(f^{\alpha,r}_{\beta}\big)_{L_s}, \tag{42}$$

де $\sigma(p)$ означається формулою (41), $s' = s/(s-1)$.

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_s$, $\alpha > 0$, $r > 1$, $1 \leq s < \infty$, і довільних n, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, у множині $C^{\alpha,r}_{\beta} L_s$, $1 \leq s < \infty$, знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}\big(F^{\alpha,r}_{\beta}\big)_{L_s} = E_{n-p+1}\big(f^{\alpha,r}_{\beta}\big)_{L_s}$, і для неї при $n - p \to \infty$ виконується рівність

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C =$$
$$= \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} + O(1) \left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}} \right) E_{n-p+1}\big(F^{\alpha,r}_{\beta}\big)_{L_s}. \tag{43}$$

У (42) *і* (43) *$O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Наслідок 2. *Нехай $\alpha > 0$, $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, p, $n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. Тоді для довільної $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_\infty$ виконується нерівність*

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_C \leq \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p} \left(\frac{4}{\pi} + O(1) \left(\frac{e^{2\alpha(n-p+1)^r}}{e^{2\alpha(n-p+2)^r}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+3)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)} \frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+3)^r}} \right)\right) E_{n-p+1}(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_\infty}, \tag{44}$$

де $\sigma(p)$ означається формулою (41).

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_\infty$, $\alpha > 0$, $r > 1$, і довільних $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, у множині $C^{\alpha,r}_{\beta} L_\infty$ знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x) \in C^{\alpha,r}_{\beta} C$ така, що $E_{n-p+1}\big(F^{\alpha,r}_{\beta}\big)_C = E_{n-p+1}\big(f^{\alpha,r}_{\beta}\big)_{L_\infty}$, і для неї при $n - p \to \infty$ виконується рівність

$$\big\|\rho_{n,p}(F;x)\big\|_C = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p} \left(\frac{4}{\pi} + O(1) \left(\frac{e^{2\alpha(n-p+1)^r}}{e^{2\alpha(n-p+2)^r}} + \right.\right.$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+3)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+3)^r}}\Bigg)\Bigg)\, E_{n-p+1}(F^{\alpha,r}_{\beta})_C. \tag{45}$$

У (44) *і* (45) $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

1. *Мусієнко А. П., Сердюк А. С.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 4. – С. 522 – 537.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
3. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 926 – 936.
4. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653 – 1668.
5. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
6. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97 – 107.
7. *Сердюк А. С., Овсій Є. Ю.* Наближення на класах цілих функцій сумами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 334 – 351.
8. *Сердюк А. С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральных метриках // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 12. – С. 1672 – 1686.
9. *Сердюк А. С., Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 298 – 316.
10. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu.* Uniform approximation of Poisson integrals of functions from the class H_ω by de la Vallée Poussin sums // Anal. math. – 2012. – **38**, № 4. – P. 305 – 325.
11. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu., Musienko A. P.* Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée Poussin sums in uniform metric // Rend. mat. – 2012. – **32**. – P. 1 – 15.
12. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **68**. – 386 с.
13. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – 424 с.
14. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 422 с.
15. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510 – 518.

Одержано 15.06.12