УДК 512.5

О. В. Поляков (Днепропетр. нац. ун-т)

О НАИЛУЧШИХ $(\alpha;\beta)$-ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПОСТОЯННЫМИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

We prove inequalities that connect the constants of the best $(\alpha;\beta)$-approximation in the space L_p for different p.

Встановлено нерівності, що пов'язують константи найкращого $(\alpha;\beta)$-наближення у просторі L_p при різних значеннях p.

Пусть $C[0,1]$, $L_p[0;1]$, $1 \le p < \infty$, — пространства соответственно непрерывных и суммируемых в p-й степени на $[0;1]$ функций с соответствующими нормами.

Пусть $\alpha, \beta > 0$ — заданные числа. Для $f(x) \in L_p[0;1]$ и $H \subset L_p[0;1]$ рассмотрим величину

$$E(f;H)_{p;\alpha,\beta} = \inf\left\{\|f-u\|_{p;\alpha,\beta} : u \in H\right\},$$

где $\|g\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha g_+ + \beta g_-\|_p$ и $g_\pm(x) = \max\{\pm g(x); 0\}$. Эту величину будем называть наилучшим (α,β)-приближением функции f множеством H в пространстве $L_p[0;1]$ [1]. Функция $u_0(x)$, реализующая точную нижнюю грань, называется элементом наилучшего (α,β)-приближения.

Ясно, что при $\alpha = \beta = 1$ будем иметь обычное наилучшее приближение (см., например, [2, 3]).

Величины

$$E^\pm(f;H)_p = \inf\left\{\|f-u\|_p : u \in H, \pm u(x) \le \pm f(x)\right\}$$

называются наилучшими односторонними приближениями (снизу (+) и сверху (–)) функции f множеством H в пространстве $L_p[0;1]$.

Общие свойства наилучших односторонних приближений подробно изложены в [4].

В работе [1] В. Ф. Бабенко установил следующий результат.

Теорема. *Пусть* $p \in [1;+\infty)$, H *— локально компактное подмножество* $L_p[0;1]$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p[0;1]$ *имеют место равенства*

$$\lim_{\beta\to\infty} E(f;H)_{p;1,\beta} = E^+(f;H)_p,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} E(f;H)_{p;\alpha,1} = E^-(f;H)_p.$$

Таким образом, задачи наилучшего (α,β)-приближения позволяют изучать с единой точки зрения задачи обычного наилучшего приближения и наилучшего одностороннего приближения. Более детально с вопросами наилучших (α,β)-приближений можно ознакомиться в работах [1, 2, 5, 6].

Для $\alpha,\beta>0$ через $C_{p;\alpha\beta}(f)$ будем обозначать постоянную на $[0;1]$ функцию $C_{p;\alpha\beta}(f;x)\equiv C_{p;\alpha\beta}(f)$, являющуюся элементом наилучшего (α,β)-приближения функции f в пространстве $L_p[0;1]$, т. е.

$$\left\| f - C_{p;\alpha\beta}\right\|_{p;\alpha\beta} = \inf\left\{\| f-c\|_{p;\alpha\beta} \colon c\in\mathbb{R}\right\} = \inf\left\{\|\alpha(f-c)_+ + \beta(f-c)_-\|_p \colon c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Как известно, критерием элемента наилучшего (α,β)-приближения функции f в пространстве $L_p[0;1]$ является следующая теорема.

Теорема ([1], [2], гл. 1)**.** *Для того чтобы функция* $C(x)\equiv C$ *была элементом наилучшего* (α,β)*-приближения функции* f *постоянными в пространстве* $L_p[0;1]$, *достаточно, а в случае* $p=1$ *при условии* $\operatorname{mes}\left\{x\in[0;1]\colon f(x)=C\right\}=0$ *необходимо, чтобы выполнялось равенство*

$$\int_0^1 |f(x)-C|^{p-1}\left(\alpha^p \operatorname{sign}(f(x)-C)_+ - \beta^p \operatorname{sign}(f(x)-C)_-\right)dx = 0 . \qquad (1)$$

Введем величину

$$A_{\alpha\beta}(f) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(0) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(1) .$$

Из равенства (1) следует, что если функция $f\in C[0;1]$ возрастающая, то $C_{1;\alpha\beta}(f) = f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$. Если, кроме того, функция f выпукла вниз, то в силу неравенства Йенсена

$$C_{1;\alpha\beta}(f) = f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = f\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot 0 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot 1\right) \le \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(0) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(1) = A_{\alpha\beta}(f) .$$

Таким образом, если функция $f\in C[0;1]$ возрастающая и выпуклая вниз, то $C_{1;\alpha\beta}(f)\le A_{\alpha\beta}(f)$. Если же функция $f\in C[0;1]$ возрастающая и выпуклая вверх, то $C_{1;\alpha\beta}(f)\ge A_{\alpha\beta}(f)$.

Отсюда следует, что если функция $f\in C[0;1]$ возрастающая и выпуклая, то равенство $C_{1;\alpha\beta}(f) = A_{\alpha\beta}(f)$ является необходимым и достаточным условием линейности функции f.

Если функция $f\in C[0;1]$ возрастающая, то из равенства (1) вытекает равенство

$$\beta^p \int_0^{\gamma} \left(C_{p;\alpha\beta}(f) - f(x) \right)^{p-1} dx \;=\; \alpha^p \int_{\gamma}^{1} \left(f(x) - C_{p;\alpha\beta}(f) \right)^{p-1} dx \,, \tag{2}$$

где $C_{p;\alpha\beta}(f) = f(\gamma)$, $\gamma \in [0;1]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f \in C[0;1]$ *монотонна на* $[0;1]$ *и не является линейной. Тогда*:

1) *если функция* $f(x)$ *выпуклая вверх, то* $A_{\alpha\beta}(f) < C_{p;\alpha\beta}(f) < C_{1;\alpha\beta}(f)$;

2) *если функция* $f(x)$ *выпуклая вниз, то* $C_{1;\alpha\beta}(f) < C_{p;\alpha\beta}(f) < A_{\beta\alpha}(f)$.

Доказательство. Пусть вначале функция $f(x)$ возрастающая и выпуклая вверх. Предположим, что существует такое число $p \in (1;\infty)$, что для элемента $C = C_{p;\alpha\beta}(f)$ наилучшего (α,β)-приближения функции f постоянными в метрике $L_p[0;1]$ выполняется неравенство $C < A_{\alpha\beta}(f)$.

В силу предположения выполняются неравенства

$$\int_0^{\gamma} (C - f(x))^{p-1} dx \;\le\; \int_0^{\delta} \left(A_{\alpha\beta}(f) - f(x) \right)^{p-1} dx \,,$$

$$\int_{\delta}^{1} \left(f(x) - A_{\alpha\beta}(f) \right)^{p-1} dx \;\le\; \int_{\gamma}^{1} (f(x) - C)^{p-1} dx \,,$$

где $A_{\alpha\beta}(f) = f(\delta)$, $\delta \in [0;1]$.

Отсюда и из равенства (2) следует неравенство

$$\alpha^p \int_{\delta}^{1} \left(f(x) - A_{\alpha\beta}(f) \right)^{p-1} dx \;\le\; \beta^p \int_0^{\delta} \left(A_{\alpha\beta}(f) - f(x) \right)^{p-1} dx \,. \tag{3}$$

Поскольку $f(\delta) = A_{\alpha\beta}(f) < C_{1;\alpha\beta}(f) = f\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)$, в силу монотонности f $\delta < \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Отсюда $\beta\delta < \alpha(1-\delta)$. Несложно проверить, что справедливо равенство

$$\beta \left(A_{\alpha\beta}(f) - f(0) \right) \;=\; \alpha \left(f(1) - A_{\alpha\beta}(f) \right).$$

Введем функцию

$$g(x) \;=\; \begin{cases} \beta \left(A_{\alpha\beta}(f) - f(x) \right), & x \in [0,\delta), \\ \alpha \left(f(x) - A_{\alpha\beta}(f) \right), & x \in [\delta, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что $g(0) = g(1)$ и на отрезке $[0;\delta]$ функция $g(x)$ выпукла вниз, а на отрезке $[\delta;1]$ — выпукла вверх. Отсюда следует, что

$$\beta \int_0^{\delta} \big(g(x) \big)^{p-1} dx \; < \; \beta \int_0^{\delta} \left(\frac{g(0)}{\delta} (\delta - x) \right)^{p-1} dx \; = \; \frac{\big(g(0) \big)^p}{p} \beta\delta \; < \; \frac{\big(g(1) \big)^p}{p} \alpha(1-\delta) \; =$$

$$= \; \alpha \int_{\delta}^{1} \left(\frac{g(1)}{1-\delta} (x - \delta) \right)^{p-1} dx \; < \; \alpha \int_{\delta}^{1} \big(g(x) \big)^{p-1} dx \, .$$

Тогда

$$\beta^p \int_0^{\delta} \big(A_{\alpha\beta}(f) - f(x) \big)^{p-1} dx \; < \; \alpha^p \int_{\delta}^{1} \big(f(x) - A_{\alpha\beta}(f) \big)^{p-1} dx \, ,$$

что противоречит неравенству (3).

Следовательно, для всех $p \in (1; \infty)$ $A_{\alpha\beta}(f) < C_{p;\alpha\beta}(f)$.

Пусть теперь существует некоторое число $p \in (1; \infty)$ такое, что для элемента $C = C_{p;\alpha\beta}(f)$ наилучшего (α, β)-приближения функции f постоянными в метрике $L_p[0;1]$ выполняется неравенство $C \geq A_{\alpha\beta}(f)$.

Аналогично предыдущему справедливо равенство

$$\beta^p \int_0^{\gamma} \big(C - f(x) \big)^{p-1} dx \; = \; \alpha^p \int_{\gamma}^{1} \big(f(x) - C \big)^{p-1} dx \, , \tag{4}$$

где $C = f(\gamma)$, $\gamma \in [0;1]$.

В силу предположения $f(\gamma) = C > C_{1;\alpha\beta}(f) = f\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)$. Следовательно, в силу монотонности функции f $\gamma > \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Имеют место неравенства

$$\int_0^{\gamma} \big(C - f(x) \big)^{p-1} dx \; \geq \int_0^{\alpha/(\alpha+\beta)} \big(C_{1;\alpha\beta}(f) - f(x) \big)^{p-1} dx \, ,$$

$$\int_{\gamma}^{1} \big(f(x) - C \big)^{p-1} dx \; \leq \int_{\alpha/(\alpha+\beta)}^{1} \big(f(x) - C_{1;\alpha\beta}(f) \big)^{p-1} dx \, .$$

В силу равенства (4) выполняется неравенство

$$\beta^p \int_0^{\alpha/(\alpha+\beta)} \big(C_{1;\alpha\beta}(f) - f(x) \big)^{p-1} dx \; \leq \; \alpha^p \int_{\alpha/(\alpha+\beta)}^{1} \big(f(x) - C_{1;\alpha\beta}(f) \big)^{p-1} dx \, ,$$

или, что то же самое,

$$\beta^p \int_0^{\alpha/(\alpha+\beta)} \left(f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) - f(x) \right)^{p-1} dx \ \le\ \alpha^p \int_{\alpha/(\alpha+\beta)}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \right)^{p-1} dx\,. \tag{5}$$

Имеют место неравенства

$$\int_0^{\alpha/(\alpha+\beta)} \left(f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) - f(x) \right)^{p-1} dx \ \ge\ \left(f'_-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \right)^{p-1} \frac{\alpha^p}{p(\alpha+\beta)^p}\,, \tag{6}$$

$$\int_{\alpha/(\alpha+\beta)}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \right)^{p-1} dx \ \le\ \left(f'_+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \right)^{p-1} \frac{\beta^p}{p(\alpha+\beta)^p}\,, \tag{7}$$

$$f'_-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \ \ge\ f'_+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right). \tag{8}$$

Пусть неравенство (6) строгое. Тогда с учетом неравенств (7), (8) получим неравенство

$$\beta^p \int_0^{\alpha/(\alpha+\beta)} \left(f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) - f(x) \right)^{p-1} dx \ >\ \alpha^p \int_{\alpha/(\alpha+\beta)}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \right)^{p-1} dx\,,$$

которое противоречит неравенству (5).

Аналогично получаем противоречие с неравенством (5) в предположении, что неравенство (7) строгое.

Если в (6) и (7) имеют место знаки равенств, то $f(x)$ — ломаная из двух звеньев,

$$f'_-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \ >\ f'_+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

и вновь получаем противоречие с (5).

Таким образом, для всех $p \in (1;\infty)$ $C_{p;\alpha\beta}(f) < C_{1;\alpha\beta}(f)$.

Пусть функция $f(x)$ убывающая и выпуклая вверх. Тогда функция $g(x) = f(1-x)$ возрастающая и выпуклая вверх.

Воспользуемся тем фактом, что для всех $p \in (1;\infty)$

$$C_{p;\beta\alpha}(g) \ =\ C_{p;\beta\alpha}(f(1-x)) \ =\ C_{p;\alpha\beta}(f) \qquad \text{и} \qquad A_{\beta\alpha}(g) \ =\ A_{\beta\alpha}(f(1-x)) \ =\ A_{\alpha\beta}(f)\,.$$

Тогда с учетом доказанного $C_{p;\alpha\beta}(f) = C_{p;\beta\alpha}(g) < C_{1;\beta\alpha}(g) = C_{1;\alpha\beta}(f)$ и

$$C_{p;\alpha\beta}(f) \ =\ C_{p;\beta\alpha}(g) \ >\ A_{\beta\alpha}(g) \ =\ A_{\alpha\beta}(f)\,.$$

Пусть функция $f(x)$ убывающая и выпуклая вниз. Тогда функция $h(x) = -f(x)$ возрастающая и выпуклая вверх.

Воспользуемся тем фактом, что для всех $p \in (1;\infty)$ $C_{p;\alpha\beta}(-f) = -C_{p;\beta\alpha}(f)$ и $A_{\alpha\beta}(-f) =$

$= -A_{\beta\alpha}(f)$. Тогда с учетом доказанного $C_{p;\alpha\beta}(f) = -C_{p;\beta\alpha}(-f) > -C_{1;\beta\alpha}(-f) = C_{1;\alpha\beta}(f)$ и $C_{p;\alpha\beta}(f) = -C_{p;\beta\alpha}(-f) < -A_{\beta\alpha}(-f) = A_{\alpha\beta}(f)$.

В заключение заметим, что случай $\alpha = \beta = 1$ изучен в [7].

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 43 – 51.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
5. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521 – 524.
6. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
7. *Черницкая О. В.* Поведение констант наилучшего приближения для выпуклых функций // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 11. – С. 110 – 114.

Получено 23.04.12,
после доработки — 01.04.13