УДК 517.98

**А. І. Грод** (Ін-т математики НАН України, Київ),
**С. О. Кужель** (AGH Ун-т науки і технологій, Краків, Польща)

# ТЕОРІЯ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ 0-ЗБУРЕНИХ $\mathcal{PT}$-СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ*

The aim of the work is to develop the scattering theory for 0-perturbed $\mathcal{PT}$-symmetric operators using the Lax–Phillips method. The presence of stable $\mathcal{C}$-symmetry leading to the property of self-adjointness (with a proper choice of the inner product) for these $\mathcal{PT}$-symmetric operators is described in terms of the corresponding $S$-matrix (scattering matrix).

Целью данной работы является развитие теории рассеяния для 0-возмущенных $\mathcal{PT}$-симметричных операторов с использованием идей подхода Лакса – Филлипса. Для таких операторов охарактеризовано наличие стабильной $\mathcal{C}$-симметрии (что гарантирует их самосопряженность при определенном выборе скалярного произведения) в терминах соответствующей $S$-матрицы (матрицы рассеяния).

**1. Вступ.** Останнім часом спостерігається стійкий інтерес до досліджень нового класу несамоспряжених операторів – так званих $\mathcal{PT}$-симетричних операторів [1, 2]. Великою мірою це обумовлено тим, що деякі $\mathcal{PT}$-симетричні оператори можна використовувати як гамільтоніани $\mathcal{PT}$-симетричної квантової механіки (PTQM) [3, 4].

Зазвичай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор не є самоспряженим оператором. Тому розвиток теорії розсіяння для таких операторів потребує певних модифікацій вже існуючих методів та пошуку нових підходів [5 – 10]. Зокрема, в роботах [11, 12] було відмічено, що теорія розсіяння Лакса – Філліпса [13] може бути корисною при дослідженні $\mathcal{PT}$-симетричних операторів Шредінгера з *локальними* потенціалами. Це пояснюється тим, що метод Лакса – Філліпса дозволяє природним чином встановити зв’язок між аналітичністю $S$-матриці та властивістю локальності (фінітності) збурення. Іншою важливою рисою методу розсіяння Лакса – Філліпса є його операторно-теоретична інтерпретація в рамках теорії розширень симетричних операторів [14, 15].

Метою даної роботи є розвиток теорії розсіяння для 0-збурених $\mathcal{PT}$-симетричних операторів з використанням ідей підходу Лакса – Філліпса. Термін „0-збурений” означає, що розглядаються локальні збурення, які фактично зосереджені в одній точці. Більш загальний випадок „$\rho$-збурених” (збурення зосереджено в інтервалі $(-\rho, \rho)$) операторів розглянуто в [12]. Обмеження в цій роботі на частинний „0-збурений” випадок дозволяє отримати значно глибші результати щодо прямої та оберненої задач розсіяння (наприклад, тільки для 0-збурених операторів ми можемо ввести і дослідити поняття стабільної $\mathcal{C}$-симетрії), що, як наслідок, дає можливість використовувати результати цієї роботи в якості повністю розв’язних моделей PTQM.

Дослідження розсіяння для 0-збурених $\mathcal{PT}$-симетричних операторів було розпочато в [11], і дану роботу можна розглядати як її логічне продовження. В наступному пункті наведено необхідні результати з теорії $\mathcal{PT}$-симетричних операторів та теорії розсіяння Лакса – Філліпса для випадку 0-збурених самоспряжених операторів. Показано, що у випадку сингулярного збурення одновимірного оператора Шредінгера загальна формула для $S$-матриці (2.9) трансформується у матрицю, компоненти якої складають правосторонні (лівосторонні) коефіцієнти відбиття $R_k^r$ ($R_l^r$) та проходження $T_k^r$ ($T_l^r$) відповідних хвильових функцій

* Частково підтримано грантом Швейцарського наукового фонду (проект JRP IZ73Z0 (28135) SCOPES 2009-2012) і проектом 03-01-12 спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

$$f_1 = \begin{cases} e^{-i\bar{k}x} + R_k^r e^{ikx}, & x > 0, \\ T_k^r e^{-ikx}, & x < 0, \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} T_k^l e^{ikx}, & x > 0, \\ e^{i\bar{k}x} + R_k^l e^{-ikx}, & x < 0. \end{cases}$$

Цей результат використано як обґрунтування до „правильного” означення $S$-матриці для $\rho$-збурених $\mathcal{PT}$-симетричних (несамоспряжених) операторів у [12]. Ідея полягала в тому, що загальна формула (2.9) використовувалась для означення $S$-матриці $\mathcal{PT}$-симетричного оператора для всіх $k \in \mathbb{C}_+$, де ця формула має сенс. Як було показано у [12], такий підхід дозволяє отримувати вирази для $S$-матриці в термінах коефіцієнтів відбитя/проходження. Це, в свою чергу, дає можливість встановити більш інформативний зв'язок між коефіцієнтами відбитя/проходження та спектральними властивостями $\mathcal{PT}$-симетричного оператора, що може бути корисним при розгляді обернених задачах теорії розсіяння.

Пункт 3 є основним у даній роботі. Наведено формальне означення $S$-матриці для 0-збуреного (несамоспряженого) оператора $H$ і показано, що її область визначення є фактично „квадратним коренем” з резольвентної множини $\rho(H)$ оператора $H$ (теорема 3.1).

У випадку $\mathcal{PT}$-симетричного 0-збуреного оператора $H$ нашою основною метою є встановлення умов, при яких цей оператор буде самоспряженим (при відповідному виборі скалярного добутку в $\mathfrak{H}$). Нагадаємо [3], що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ можна розглядати як гамільтоніан PTQM лише у випадку, коли цей оператор буде самоспряженим у деякому гільбертовому просторі. Одним із популярних методів розв'язання проблеми самоспряженості є знаходження для даного оператора $H$ нової симетрії у вигляді лінійного обмеженого оператора $\mathcal{C}$, комутуючого одночасно з операторами $H$ і $\mathcal{PT}$ (див. означення (3.12)). Таке означення є достатньо загальним і в принципі не завжди забезпечує самоспряженість. У зв'язку з цим у випадку 0-збурених операторів доцільно розглядати більш вузький клас операторів $\mathcal{C}$ — так звані стабільні $\mathcal{C}$-симетрії (3.13). Існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для 0-збуреного $\mathcal{PT}$-симетричного оператора $H$ вже гарантує його самоспряженість при відповідному виборі скалярного добутку (наслідок 3.3). В цьому напрямку вдалось охарактеризувати наявність стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для 0-збуреного $\mathcal{PT}$-симетричного оператора $H$ у термінах відповідної $S$-матриці (теореми 3.2, 3.4).

Далі символи $\mathcal{D}(H)$, $\rho(H)$ та $\sigma(H)$ будемо використовувати відповідно для області визначення, резольвентної множини та спектра лінійного оператора $H$. Символ $H\restriction_{\mathcal{D}}$ означає звуження $H$ на множину $\mathcal{D}$. Через $W_2^m\big((a,b),\mathcal{N}\big)$ ми позначаємо простір Соболєва вектор-функцій на $(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, із значеннями в допоміжному гільбертовому просторі $\mathcal{N}$; множина $\overset{0}{W}{}_2^m\ ((a,b),\mathcal{N})$ є підпростором простору $W_2^m\big((a,b),\mathcal{N}\big)$, визначеного умовою $f \in \overset{0}{W}{}_2^m\ \big((a,b),\mathcal{N}\big)$, якщо всі похідні $f^{(k)}(x)$, $k = 0,\ldots,m-1$, дорівнюють нулю в точках $x = a$, $x = b$ (докладніше див. [17]).

**2. Допоміжні твердження.** ***2.1. $\mathcal{PT}$-симетричні оператори.*** Нехай $\mathfrak{H}$ — комплексний гільбертів простір. Лінійний оператор $\mathcal{P}$, визначений на $\mathfrak{H}$, називається *унітарною інволюцією*, якщо

$$\mathcal{P}^2 = I, \tag{2.1$'$}$$

$$(\mathcal{P}f, \mathcal{P}g) = (f, g) \quad \forall f, g \in \mathfrak{H}. \tag{2.1$''$}$$

Незначна модифікація умови (2.1$''$) приводить до означення оператора спряження. Антилінійний оператор $\mathcal{T}$, визначений на $\mathfrak{H}$, називається *оператором спряження,* якщо

$$\mathcal{T}^2 = I, \tag{2.2$'$}$$

$$(\mathcal{T}f, \mathcal{T}g) = (g, f) \quad \forall f, g \in \mathfrak{H}. \tag{2.2$''$}$$

Зафіксуємо деяку унітарну інволюцію $\mathcal{P}$ та оператор спряження $\mathcal{T}$ в $\mathfrak{H}$ і припускатимемо далі, що вони комутують: $\mathcal{PT} = \mathcal{TP}$.

**Означення 2.1.** *Замкнений щільно визначений у просторі $\mathfrak{H}$ лінійний оператор $H$ називатимемо $\mathcal{PT}$-симетричним, якщо рівність $\mathcal{PT}Hf = H\mathcal{TP}f$ виконується для всіх елементів $f$ з області визначення $\mathcal{D}(H)$ оператора $H$.*

Властивість $\mathcal{PT}$-симетричності зберігається при переході до спряженого оператора, тобто якщо оператор $H$ є $\mathcal{PT}$-симетричним, то спряжений до нього оператор $H^*$ також буде $\mathcal{PT}$-симетричним [11].

Поняття $\mathcal{PT}$-симетрії є досить загальним, і множина $\mathcal{PT}$-симетричних операторів може містити оператори з різноманітними властивостями. В цій роботі будемо розглядати спеціальний клас $\mathcal{PT}$-симетричних операторів, що мають безпосереднє відношення до теорії розсіяння Лакса – Філліпса. Перейдемо до його визначення.

Нехай $S$ — замкнений щільно визначений симетричний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Далі будемо припускати, що $S$ є невід'ємним оператором, тобто $(Su, u) \geq 0$ для всіх $u \in \mathcal{D}(S)$.

Нехай $\mathcal{D}_0 \subset \mathfrak{H}$ — замикання множини $\mathcal{D}(S)$ відносно норми $\|\cdot\|_0^2 = \big((S + I)\cdot, \cdot\big)$. Відомо [16], що оператор $H_\mu$, визначений як звуження $S^*$ на $\mathcal{D}(H_\mu) = \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}(S^*)$, є невід'ємним самоспряженим розширенням оператора $S$, який зберігає нижню границю оператора $S$ :

$$\inf_{f \in \mathcal{D}(S)\setminus\{0\}} \frac{(Sf, f)}{(f, f)} = \inf_{f \in \mathcal{D}(H_\mu)\setminus\{0\}} \frac{(H_\mu f, f)}{(f, f)}.$$

Оператор $H_\mu$ називається розширенням Фрідріхса оператора $S$.

Позначимо $\mathcal{H} = \ker(S^* + I)$. Тоді $\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(H_\mu)\dot{+}\mathcal{H}$ [17, с.163] і, отже, кожна функція $f \in \mathcal{D}(S^*)$ однозначно розкладається:

$$f = u + h, \qquad u \in \mathcal{D}(H_\mu), \quad h \in \mathcal{H}. \tag{2.3}$$

Розклад (2.3) дозволяє визначити лінійні відображення $\Gamma_0$ і $\Gamma_1$ з $\mathcal{D}(S^*)$ в $\mathcal{H}$ :

$$\Gamma_0 f = \Gamma_0(u + h) = h, \qquad \Gamma_1 f = \Gamma_1(u + h) = P_{\mathcal{H}}(H_\mu + I)u, \tag{2.4}$$

де $P_{\mathcal{H}}$ — ортогональний проектор у просторі $\mathfrak{H}$ на підпростір $\mathcal{H}$.

Трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ називається позитивним простором граничних значень (ПГЗ) оператора $S$ [17]. Функція Вейля $M(\cdot)$ оператора $S$, асоційована з ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, визначається формулою

$$M(\mu)\Gamma_0 f_\mu = \Gamma_1 f_\mu \quad \forall f_\mu \in \ker(S^* - \mu I) \qquad \forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Дотримуючись [18] (пункт 114), розширення $H$ оператора $S$ будемо називати *квазісамоспряженим*, якщо воно є власним розширенням оператора $S$ (тобто $S \subset H \subset S^*$) і його область визначення $\mathcal{D}(H)$ задовольняє умову

$$\dim \mathcal{D}(H) = n \ (\operatorname{mod} \dim \mathcal{D}(S)),$$

де $n$ — дефектне число оператора $S$.

***Зауваження* 2.1.** На відміну від [18] (пункт 114) ми не припускаємо, що квазісамоспряжене розширення є обов'язково несамоспряженим. Отже, клас квазісамоспряжених розширень включає самоспряжені розширення як частинний випадок.

Наступне твердження безпосередньо випливає з теореми 2.2 [17] (розділ 3).

**Лема 2.1.** *Квазісамоспряжене розширення $H$ оператора $S$ задається формулою*

$$H = S^* \upharpoonright_{\mathcal{D}(H)}, \qquad \mathcal{D}(H) = \big\{ f \in \mathcal{D}(S^*) \colon T\Gamma_1 f = \Gamma_0 f \big\}, \tag{2.6}$$

*де $T$ є обмеженим оператором у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $-1 \in \in \rho(H)$. У цьому випадку $T = (H+I)^{-1} - (H_\mu + I)^{-1}$.*

Далі припускатимемо, що оператор $S$ комутує з операторами $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$, тобто для всіх $f \in \mathcal{D}(S)$ виконуються тотожності

$$S\mathcal{P}f = \mathcal{P}Sf, \qquad S\mathcal{T}f = \mathcal{T}Sf. \tag{2.7}$$

Це, зокрема, означає, що $S$ є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором.

**Лема 2.2** [11]. *Нехай невід'ємний симетричний оператор $S$ задовольняє умови* (2.7), *а ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора $S^*$ визначається формулами* (2.4). *Тоді виконуються рівності*

$$\mathcal{T}_\mathcal{H}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{T}, \qquad \mathcal{P}_\mathcal{H}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{P}, \qquad j = 0, 1, \tag{2.8}$$

*де $\mathcal{T}_\mathcal{H} = \mathcal{T} \upharpoonright_\mathcal{H}$ — оператор спряження, а $\mathcal{P}_\mathcal{H} = \mathcal{P} \upharpoonright_\mathcal{H}$ — унітарна інволюція в $\mathcal{H}$.*

***Наслідок* 2.1** [11]. *Квазісамоспряжене розширення $H$, що задається формулою* (2.6), *є $\mathcal{PT}$-симетричним тоді і тільки тоді, коли відповідний оператор $T$ в* (2.6) *буде $\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}$-симетричним в $\mathcal{H}$.*

***2.2. Елементи схеми розсіяння Лакса – Філліпса для* 0*-збурених операторів.*** Нехай $B$ — замкнений щільно визначений симетричний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Оператор $B$ називається *простим*, якщо він не визначає самоспряжений оператор у довільному підпросторі простору $\mathfrak{H}$, і *максимальним симетричним*, якщо не існує його симетричних розширень в $\mathfrak{H}$.

Нехай $B$ — простий максимальний симетричний оператор. Тоді оператор $S = B^2$ буде замкненим невід'ємним щільно визначеним симетричним оператором в $\mathfrak{H}$ [14].

Довільне квазісамоспряжене розширення $H$ оператора $S = B^2$ будемо називати 0*-збуреним оператором.*

Враховуючи, що простий максимальний симетричний оператор $B$ є унітарно еквівалентним оператору диференціювання $i\dfrac{d}{dx}$ на півосі [18], можна показати, що довільний 0-збурений оператор $H$ має неперервний спектр на додатній півосі $\mathbb{R}_+$ і водночас не існує власних значень оператора $H$ на $\mathbb{R}_+$.

Розглянемо випадок, коли 0-збурений оператор $H$ є *невід'ємним самоспряженим*. Тоді $H$ задається формулою (2.6) з обмеженим самоспряженим оператором $T$. Відповідна $S$-матриця $\mathsf{S}(\cdot)$ оператора $H$ є аналітичною операторнозначною функцією у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$, яка задається формулою

$$\mathsf{S}(k) = \big[I - 2(1-ik)T\big]\big[I - 2(1+ik)T\big]^{-1}, \quad k \in \mathbb{C}_+. \tag{2.9}$$

Зазначимо, що (2.9) є кінцевим результатом типових для математичної теорії розсіяння міркувань: обґрунтування існування хвильових операторів $W_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt}e^{-iH_\mu t}$ з наступним поданням оператора розсіяння $S = W_+^{-1}W_-$ у спектральному зображенні для групи $e^{-iH_\mu t}$, яка характеризує вільну еволюцію (докладніше див. [14, 15]).

Різні приклади систем розсіяння можна отримати, вибираючи різні прості максимальні симетричні оператори $B$ та простори $\mathfrak{H}$, в яких вони діють. У цьому відношенні загальна формула (2.9) забезпечує єдиний підхід до побудови $S$-матриці. Її застосування у конкретних випадках дозволяє отримати зв'язки між оператором $T$ та стандартними (для даної системи) параметрами опису $S$-матриці. Проілюструємо це на прикладі одновимірного оператора Шредінгера з сингулярним збуренням.

***Приклад* 2.1.** Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ і $\mathbb{R}_\pm = \{x\in\mathbb{R}\colon \pm x > 0\}$. Оператор

$$B = (\mathsf{sgn}\, x)i\frac{d}{dx}, \qquad \mathcal{D}(B) = \overset{0}{W_2^1}(\mathbb{R}_-)\oplus \overset{0}{W_2^1}(\mathbb{R}_+) \tag{2.10}$$

є простим максимальним симетричним в $L_2(\mathbb{R})$ і

$$B^2 = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(B^2) = \overset{0}{W_2^2}(\mathbb{R}_-)\oplus \overset{0}{W_2^2}(\mathbb{R}_+),$$

$$B^{*2} = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(B^2) = W_2^2(\mathbb{R}_-)\oplus W_2^2(\mathbb{R}_+).$$

Розширення Фрідріхса $H_\mu = B^*B$ має вигляд

$$H_\mu = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(H_\mu) = \big\{u\in W_2^2(\mathbb{R}_-)\oplus W_2^2(\mathbb{R}_+)\colon u(0-) = u(0+) = 0\big\}. \tag{2.11}$$

Елементарні обчислення з використанням (2.4), (2.11) показують, що позитивний ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора $S = B^2$ має вигляд: допоміжний простір $\mathcal{H}$ є лінійною оболонкою ортогональних в $L_2(\mathbb{R})$ функцій

$$\psi_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ e^x, & x < 0, \end{cases} \qquad \psi_+(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а оператори $\Gamma_j : \mathcal{D}(B^{*2}) \to \mathcal{H}$ діють таким чином:

$$\begin{gathered} \Gamma_0 f = f(0-)\psi_- + f(0+)\psi_+, \\ \Gamma_1 f = 2\big[f(0-) - f'(0-)\big]\psi_- + 2\big[f(0+) + f'(0+)\big]\psi_+. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Нехай самоспряжений невід'ємний оператор $H$ є 0-збуреним оператором. Тоді $H$ визначається формулою (2.6), в якій оператор $T$ діє у просторі $\mathcal{H}$ з ортогональним базисом $\{\psi_+, \psi_-\}$. Нехай $\mathsf{T} = \|t_{ij}\|_{ij}^2$ — матриця, яка визначає дію оператора $T$ відносно цього базису. Враховуючи таке позначення і беручи до уваги (2.12), записуємо визначення (2.6) оператора $H$ таким (еквівалентним) чином: $H$ діє як $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на всіх функціях $f\in W_2^2(\mathbb{R}_-)\oplus W_2^2(\mathbb{R}_+)$, які в точці 0 задовольняють граничні умови

$$\mathsf{T}\begin{pmatrix} f(0+)+f'(0+) \\ f(0-)-f'(0-) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(0+) \\ f(0-) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Матриця $\mathsf{T}$ в (2.13) повністю визначається двома лінійно незалежними функціями $f_1, f_2 \in \in \mathcal{D}(H) \setminus \mathcal{D}(B^2)$. Точніше, нам потрібно знати лише їхні значення $f_j(0\pm)$ та значення їхніх похідних $f_j'(0\pm)$ для визначення $\mathsf{T}$.

Оскільки $L_2(\mathbb{R}) = \mathcal{R}(B^2 - k^2 I) \oplus \ker(B^{*2} - \overline{k}^2 I)$, робимо висновок, що

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(B^2)\dot{+}(H - k^2 I)^{-1} \ker(B^{*2} - \overline{k}^2 I). \tag{2.14}$$

Нехай $k \in \mathbb{C}_+' = \mathbb{C}_+ \setminus i\mathbb{R}_+ = \{k \in \mathbb{C}_+ : \mathsf{Re}\, k \neq 0\}$. Тоді функції

$$h_1 = \begin{cases} \beta e^{-i\bar{k}x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad h_2 = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \beta e^{i\bar{k}x}, & x < 0, \end{cases} \qquad \beta = \overline{k}^2 - k^2, \tag{2.15}$$

утворюють базис підпростору $\ker(B^{*2} - \overline{k}^2 I)$ (множник $\beta$ спрощує подальші формули). З (2.14) випливає, що функції $f_j = (H - k^2 I)^{-1} h_j$ належать до $\mathcal{D}(H) \setminus \mathcal{D}(B^2)$ і є лінійно незалежними. Отже, шукані функції $f_j$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$-\frac{d^2}{dx^2} f_j - k^2 f_j = h_j, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2. \tag{2.16}$$

Беручи до уваги (2.15), з (2.16) одержуємо явний вигляд функцій $f_j$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$f_1 = \begin{cases} e^{-i\bar{k}x} + R_k^r e^{ikx}, & x > 0, \\ T_k^r e^{-ikx}, & x < 0, \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} T_k^l e^{ikx}, & x > 0, \\ e^{i\bar{k}x} + R_k^l e^{-ikx}, & x < 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

де $R_k^r$ ($R_l^r$) — правосторонній (лівосторонній) коефіцієнт відбиття, а $T_k^r$ ($T_l^r$) — правосторонній (лівосторонній) коефіцієнт проходження. Ці коефіцієнти однозначно визначаються з умови $f_j \in \mathcal{D}(H)$.

З (2.17) випливає, що

$$f_1(0+) = 1 + R_k^r, \qquad f_1(0-) = T_k^r, \qquad f_1'(0+) = i(-\overline{k} + kR_k^r), \qquad f_1'(0-) = -ikT_k^r,$$
$$\tag{2.18}$$
$$f_2(0+) = T_k^l, \qquad f_2(0-) = 1 + R_k^l, \qquad f_2'(0+) = ikT_k^l, \qquad f_2'(0-) = i(\overline{k} - kR_k^l).$$

Підставляючи ці значення в (2.13) та розв'язуючи відповідні системи лінійних рівнянь, одержуємо

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{1}{2\theta\Delta_k}\big[\Delta_k - (e^{i\alpha} - 1)(R_k^l + e^{i\alpha})\big], \qquad t_{12} = \frac{T_k^l}{2\theta\Delta_k}(e^{i\alpha} - 1), \\ t_{22} &= \frac{1}{2\theta\Delta_k}\big[\Delta_k - (e^{i\alpha} - 1)(R_k^r + e^{i\alpha})\big], \qquad t_{21} = \frac{T_k^r}{2\theta\Delta_k}(e^{i\alpha} - 1), \end{aligned} \tag{2.19}$$

де $\theta = 1 + ik$, $e^{i\alpha} = \dfrac{\overline{\theta}}{\theta}$, $k \in \mathbb{C}_+'$, і

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} R_k^r + e^{i\alpha} & T_k^r \\ T_k^l & R_k^l + e^{i\alpha} \end{vmatrix}.$$

Відносно базису $\{\psi_+, \psi_-\}$ $S$-матриця $\mathsf{S}(\cdot)$ оператора $H$ набирає вигляду

$$\mathsf{S}(k) = \big[I - 2(2-\theta)\mathsf{T}\big][I - 2\theta\mathsf{T}]^{-1} = \frac{2-\theta}{\theta} I + 2\frac{\theta - 1}{\theta}[I - 2\theta\mathsf{T}]^{-1}, \quad k \in \mathbb{C}'_+ \tag{2.20}$$

(тут ми використали співвідношення $1 - ik = 2 - \theta$).

Безпосередні обчислення з використанням явних виразів для коефіцієнтів $t_{ij}$ приводять до висновку, що

$$2\frac{\theta - 1}{\theta}[I - 2\theta\mathsf{T}]^{-1} = -\frac{k}{\operatorname{Re} k}\begin{pmatrix} R_k^r + e^{i\alpha} & T_k^l \\ T_k^r & R_k^l + e^{i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи отриманий вираз у (2.20) та враховуючи, що

$$-\frac{k}{\operatorname{Re} k} e^{i\alpha} + \frac{2-\theta}{\theta} = -i\frac{\operatorname{Im} k}{\operatorname{Re} k},$$

одержуємо вираз для $S$-матриці самоспряженого невід'ємного 0-збуреного оператора $H$:

$$\mathsf{S}(k) = -\frac{k}{\operatorname{Re} k}\begin{pmatrix} R_k^r + \dfrac{i \operatorname{Im} k}{k} & T_k^l \\ T_k^r & R_k^l + \dfrac{i \operatorname{Im} k}{k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}'_+. \tag{2.21}$$

Значення $\mathsf{S}(k)$ при $k \in i\mathbb{R}_+$ отримуємо, продовжуючи вираз (2.21) за неперервністю.

Із загальної теорії [14, 15] відомо, що $\mathsf{S}(k)$ є аналітичною функцією в верхній півплощині $\mathbb{C}_+$. Значеннями $\mathsf{S}(k)$ є стискаючі матриці. При прямуванні $k$ до дійсної осі функція $\mathsf{S}(k)$ збігається до функції

$$\mathsf{S}(k) = -\begin{pmatrix} R_k^r & T_k^l \\ T_k^r & R_k^l \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R},$$

значеннями якої є унітарні матриці.

***Зауваження* 2.2.** Як правило [13], схема розсіяння Лакса – Філліпса визначається через вхідний $D_-$ та вихідний $D_+$ підпростори для унітарної групи $W_H(t)$ розв'язків задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$\frac{d^2}{dt^2} u = -Hu, \tag{2.22}$$

де $H$ — невід'ємний самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$. Зокрема, існування ортогональних підпросторів $D_\pm$ гільбертового простору даних Коші $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_H \oplus \mathfrak{H}$ $\big($тут $\mathfrak{H}_H$ — замикання $\mathcal{D}(H)$ відносно норми $\|\cdot\|_H = (H\cdot,\cdot)\big)$ з властивостями

(i) $W_H(-t)D_- \subset D_-$, $W_H(t)D_+ \subset D_+$, $t \geq 0$;

(ii) $\bigcap_{t\geq 0} W_H(-t)D_- = \bigcap_{t \geq 0} W_H(t) D_+ = \{0\}$;

(iii) $\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} W_H(t)D_+} = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} W_H(t)D_-} = \mathfrak{G}$

характеризує збурену еволюцію в схемі Лакса – Філліпса. Таке означення є узгодженим з означенням 0-збуреного оператора в наступному сенсі: якщо оператор $H$ в (2.22) є 0-збуреним невід'ємним самоспряженим, то відповідна група $W_H(t)$ розв'язків задачі Коші має ортогональні підпростори $D_\pm$ з властивостями (i) – (iii) [14].

**3. Теорія розсіяння для 0-збурених операторів.** ***3.1. Означення $S$-матриці та її загальні властивості.*** Згідно з лемою 2.1 довільне квазісамоспряжене розширення $H$ оператора $B^2$ з умовою $-1 \in \rho(H)$ визначається рівністю (2.6), де $T$ — обмежений оператор в $\mathcal{H}$. У цьому випадку ми можемо формально визначити *$S$-матрицю для оператора $H$* за допомогою формули (2.9) для всіх $k \in \mathbb{C}_+$, де (2.9) має сенс. У зв'язку з цим операторнозначну функцію

$$\mathsf{S}(k) = \big[I - 2(1 - ik)T\big]\big[I - 2(1 + ik)T\big]^{-1}, \tag{3.1}$$

визначену при всіх $k \in \mathbb{C}_+$ таких, що $0 \in \rho(I - 2(1 + ik)T)$, будемо називати *$S$-матрицею для 0-збуреного оператора $H$*.

***Зауваження*** **3.1.** 1. На відміну від випадку 0-збуреного самоспряженого оператора $H$, розглянутого у пункті 2, таке означення є достатньо формальним, тому що існування відповідних хвильових операторів не доводиться. Однак ми вважаємо це означення корисним, оскільки воно встановлює явний зв'язок з операторним параметром $T$, який задає 0-збурений оператор $H$, одночасно добре узгоджується з означенням $S$-матриці, прийнятим у роботах [6 – 8].

2. Умова $-1 \in \rho(H)$ в означенні $S$-матриці є технічною і використовується лише для спрощення викладу. Використовуючи незначну модифікацію формул (2.4), $S$-матрицю можна визначити для довільного 0-збуреного оператора $H$, який має дійсні резольвентні точки.

З означення $S$-матриці випливає, що функція $\mathsf{S}(k)$ визначена і є аналітичною на підмножині

$$\Lambda = \big\{k \in \mathbb{C}_+ \colon 0 \in \rho(I - 2(1 + ik)T)\big\} \tag{3.2}$$

верхньої півплощини $\mathbb{C}_+$. Множина $\Lambda$ є непорожньою (наприклад, $i \in \Lambda$) і відкритою. Наступна теорема показує, що $\Lambda$ однозначно характеризується резольвентною множиною $\rho(H)$ оператора $H$.

**Теорема 3.1.** *Нехай $\mathsf{S}(k)$ — $S$-матриця 0-збуреного оператора $H$, а $\Lambda$ — її множина визначення. Точка $k$ належить $\Lambda$ тоді і тільки, тоді коли $k^2 \in \rho(H)$.*

Доведення теореми базується на наступному допоміжному твердженні.

**Лема 3.1.** *Функція Вейля оператора $S = B^2$ відносно ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, визначеного формулою* (2.4), *має вигляд*

$$M(\mu) = 2(1 + i\sqrt{\mu})I, \tag{3.3}$$

*де $\sqrt{\cdot}$ позначає гілку квадратного кореня, визначеного умовою $\operatorname{Im}\sqrt{\mu} > 0$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.*

***Доведення.*** Не обмежуючи загальності будемо припускати, що нижня півплощина $\mathbb{C}_-$ міститься в резольвентній множині простого максимального симетричного оператора $B$. Тоді $B$ є унітарно еквівалентним оператору диференціювання

$$\mathcal{B} = i\frac{d}{dx}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \big\{u \in W_2^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{N}) \colon u(0) = 0\big\} \tag{3.4}$$

у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, де розмірність допоміжного гільбертового простору $\mathcal{N}$ дорівнює ненульовому дефектному числу оператора $B$ [18]. Це означає, що симетричний оператор $S = B^2$ є унітарно еквівалентним оператору подвійного диференціювання

$$\mathcal{B}^2 = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}^2) = \{u \in W_2^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N}) \colon u(0) = u'(0) = 0\}, \tag{3.5}$$

а розширення Фрідріхса $H_\mu = B^*B$ оператора $S$ — унітарно еквівалентним оператору

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B} = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}^2) = \{u \in W_2^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N}) \colon u(0) = 0\}. \tag{3.6}$$

Інакше кажучи, існує таке унітарне перетворення $U$ простору $\mathfrak{H}$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, що

$$B = U^{-1}\mathcal{B}U, \qquad B^2 = U^{-1}\mathcal{B}^2U, \qquad B^*B = U^{-1}\mathcal{B}^*\mathcal{B}U. \tag{3.7}$$

У випадку оператора $\mathcal{B}$, беручи до уваги (3.5) і (3.6), приходимо до висновку, що формули (2.4) визначають ПГЗ[1] $(\mathcal{H}_\mathcal{B}, \Gamma_{0\mathcal{B}}, \Gamma_{1_\mathcal{B}})$ : $\mathcal{H}_\mathcal{B} = \{e^{-x}n \colon \forall n \in \mathcal{N}\}$, а оператори $\Gamma_j \colon W_2^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N}) \to \mathcal{H}$ діють таким чином:

$$\Gamma_{0\mathcal{B}} f = f(0)e^{-x}, \qquad \Gamma_{1\mathcal{B}} f = 2\big[f(0) + f'(0)\big]e^{-x}.$$

Оскільки $\ker(\mathcal{B}^{*2} - \mu I) = \{e^{i\sqrt{\mu}x}n \colon \forall n \in \mathcal{N}\}$, то для довільної функції $f_\mu = e^{i\sqrt{\mu}x}n$ з $\ker(\mathcal{B}^{*2} - \mu I)$ маємо

$$\Gamma_{0\mathcal{B}} f_\mu = e^{-x}n, \qquad \Gamma_{1\mathcal{B}} f_\mu = 2(1 + i\sqrt{\mu})e^{-x}n.$$

Підставляючи ці значення у формулу (2.5), одержуємо, що функція Вейля задається формулою (3.3) у випадку простого максимального симетричного оператора $\mathcal{B}$.

Через $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ позначимо ПГЗ, побудований за формулами (2.4) у випадку довільного простого максимального симетричного оператора $B$. Використовуючи (3.7), приходимо до висновку, що $\mathcal{H} = U^{-1}\mathcal{H}_\mathcal{B}$ і $\Gamma_j = U^{-1}\Gamma_{j\mathcal{B}}U$.

Беручи до уваги (2.5), співвідношення $U\ker(B^{*2} - \mu I) = \ker(\mathcal{B}^{*2} - \mu I)$ та враховуючи той факт, що функція Вейля у випадку оператора $\mathcal{B}$ є оператором множення на *скалярну функцію*, яка визначається формулою (3.3), переконуємося, що ця формула залишається правильною для довільного $B$.

Лемму 3.1 доведено.

***Доведення теореми* 3.1** Нехай ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ оператора $B^2$ визначено формулами (2.4). Тоді трійка $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1)$, де $\widetilde{\Gamma}_0 = -\Gamma_1$ і $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_0$, також буде ПГЗ оператора $B^2$ (загальне означення ПГЗ див. у [17, с.158]). З (2.5) і (3.3) одержуємо, що функція Вейля $\widetilde{M}(\cdot)$, асоційована з $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1)$, має вигляд

$$\widetilde{M}(\mu) = -M^{-1}(\mu) = -\frac{1}{2(1 + i\sqrt{\mu})}I.$$

Запишемо формулу (2.6), яка визначає 0-збурений оператор $H$, у термінах ПГЗ $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1)$:

$$H = S^* \restriction_{\mathcal{D}(H)}, \qquad \mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{D}(B^{*2}) \colon -T\widetilde{\Gamma}_0 f = \widetilde{\Gamma}_1 f\}.$$

Нехай $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ і $\mu \neq -1$. З одержаних зображень для $H$ і $\widetilde{M}(\cdot)$ та [19] (твердження 4) випливає, що $\mu \in \rho(H)$ тоді і тільки тоді, коли $0 \in \rho\big(-T - \widetilde{M}(\mu)\big)$. Оскільки

[1] Індекс $\mathcal{B}$ використовується для уникнення непорозумінь із загальним означенням (2.4).

$$-T-\widetilde{M}(\mu)=-T+\frac{1}{2\big(1+i\sqrt{\mu}\big)}I=2\big(1+i\sqrt{\mu}\big)\big[I-2(1+i\sqrt{\mu})T\big], \tag{3.8}$$

то

$$\mu\in\rho(H)\iff 0\in\rho(I-2(1+i\sqrt{\mu})T)\quad\forall\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,\quad \mu\neq-1. \tag{3.9}$$

Зауважимо, що співвідношення (3.9) є правильним і при $\mu=-1$, оскільки $-1\in\rho(H)$. Покладаючи тепер в (3.9) $\mu=k^2$ і $\sqrt{\mu}=k\in\mathbb{C}_+$, завершуємо доведення теореми.

***Наслідок* 3.1.** *Якщо оператор $B$ має скінченний індекс дефекту, то $S$-матриця 0-збуреного оператора $H$ є мероморфною функцією в $\mathbb{C}_+$. Точка $k\in\mathbb{C}_+$ буде полюсом для $S$-матриці $\mathsf{S}(\cdot)$ тоді і тільки тоді, коли $k^2$ буде власним значенням оператора $H$.*

***Доведення.*** Якщо $B$ має скінченний індекс дефекту, то оператор $H$ буде розширенням симетричного оператора $B^2$ з скінченним індексом дефекту. Тому спектр оператора $H$ в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ може складатись лише з ізольованих власних значень. Враховуючи це, з теореми 3.1 одержуємо, що $S$-матриця оператора $H$ буде аналітичною функцією в $\mathbb{C}_+$, за винятком деякої множини ізольованих точок $\{k\}$ таких, що $k^2\in\sigma_p(H)$. Зауважимо, що всі такі $k\neq i$ $\big($оскільки $-1\in\in\rho(H)\big)$, і покладемо $\mu=k^2$ та $\sqrt{\mu}=k$. Використовуючи знову [19] (твердження 4), приходимо до висновку, що $\mu\in\sigma_p(H)$ тоді і тільки тоді, коли $0\in\sigma_p\big(-T-\widetilde{M}(\mu)\big)$. З цієї нерівності та (3.8) випливає, що норма оператора $\big[1-2(1+i\sqrt{\mu'})T\big]^{-1}$ в околі точки $\mu$ прямує до нескінченності при $\mu'\to\mu$. Тому з формули (3.1) випливає, що $S$-матриця має полюс у точці $\sqrt{\mu}$.

Наведені міркування можна повторити і в зворотному порядку. Дійсно, якщо $\sqrt{\mu}$ є полюсом для $S$-матриці, то в околі точки $\sqrt{\mu}$ норма функції $\mathsf{S}(\cdot)$ буде необмежено зростати (при $\mu'\to\mu$). Тоді, використовуючи (3.8), переконуємося, що $0\in\sigma_p\big(-T-\widetilde{M}(\mu)\big)$ $\big($оскільки випадок $0\in\in\rho\big(-T-\widetilde{M}(\mu)\big)$ є неможливим$\big)$. Отже, $\mu\in\sigma_p(H)$.

Наслідок 3.1 доведено.

З наслідку 3.1 одержуємо, що множина визначення $\Lambda$ для $S$-матриці 0-збуреного оператора $H$ є симетричною відносно уявної осі, тобто $k\in\Lambda\iff-\overline{k}\in\Lambda$.

***3.2. Властивості $S$-матриці для випадку 0-збурених $\mathcal{PT}$-симетричних операторів.*** Наведені в попередньому підпункті результати є правильними для довільного 0-збуреного оператора $H$ з умовою $-1\in\rho(H)$. Природно очікувати, що накладання умови $\mathcal{PT}$-симетрії на оператор $H$ сприятиме виникненню додаткових властивостей відповідної $S$-матриці.

*Далі будемо вважати, що простий максимальний симетричний оператор $B$ комутує з унітарною інволюцією $\mathcal{P}$ та антикомутує з оператором спряження $\mathcal{T}$:*

$$\mathcal{P}B=B\mathcal{P},\qquad \mathcal{T}B=-B\mathcal{T}. \tag{3.10}$$

Тоді оператор $S=B^2$ є $\mathcal{PT}$-симетричним і для нього виконуються умови (2.7).

Згідно з наслідком 2.1 $\mathcal{PT}$-симетричний 0-збурений оператор $H$ з умовою $-1\in\rho(H)$ визначається формулою (2.6) з $\mathcal{P_H T_H}$-симетричним оператором $T$. Враховуючи цю властивість в означенні (3.1), отримуємо додаткове співвідношення для відповідної $S$-матриці:

$$\mathcal{P_H T_H}\mathsf{S}(k)=\mathsf{S}(-\overline{k})\mathcal{P_H T_H}\qquad\forall k\in\Lambda. \tag{3.11}$$

Відомо [3], що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ можна розглядати як гамільтоніан квантової механіки лише у випадку, коли цей оператор буде самоспряженим у деякому гільбертовому просторі. Одним із популярних методів розв'язання проблеми самоспряженості є знаходження для даного $\mathcal{PT}$-симетричного оператора $H$ нової симетрії, яка представлена лінійним обмеженим оператором $\mathcal{C}$, комутуючим одночасно з операторами $H$ і $\mathcal{PT}$ [3]. Точніше, ми кажемо, що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ має властивість *$\mathcal{C}$-симетрії*, якщо існує обмежений лінійний оператор $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \neq \pm I$), який задовольняє такі властивості:

$$\mathcal{C}^2 = I, \qquad \mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}, \qquad \mathcal{C}H = H\mathcal{C}. \tag{3.12}$$

Нехай 0-збурений $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ має властивість $\mathcal{C}$-симетрії. У цьому випадку будемо казати, що $H$ має *стабільну $\mathcal{C}$-симетрію*, якщо відповідний оператор $\mathcal{C}$ з (3.12) додатково комутує з $B^2$ і $B^{*2}$, тобто

$$\mathcal{C}B^2 = B^2\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}B^{*2} = B^{*2}\mathcal{C}. \tag{3.13}$$

***Зауваження* 3.2.** Таке означення стабільної $\mathcal{C}$-симетрії трохи відрізняється від попередніх означень [20, 21].

З (3.13) випливає, що підпростір $\mathcal{H} = \ker(B^{*2} + I)$ є інваріантним відносно дії оператора $\mathcal{C}$. Отже, звуження $\mathcal{C}_\mathcal{H} = \mathcal{C} \upharpoonright_\mathcal{H}$ є обмеженим лінійним оператором, що діє в $\mathcal{H}$. Для цього оператора перші дві рівності в (3.12) набирають вигляду

$$\mathcal{C}_\mathcal{H}^2 = I, \qquad \mathcal{C}_\mathcal{H}\mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{T}_\mathcal{H}\mathcal{C}_\mathcal{H}. \tag{3.14}$$

**Лема 3.2.** *Нехай $\mathcal{C}_\mathcal{H}$ — лінійний обмежений оператор в $\mathcal{H}$, що задовольняє умови* (3.14). *Тоді існує лінійний обмежений оператор $\mathcal{C}$ в $\mathfrak{H}$, що задовольняє умови* (3.13) *разом з першими двома рівностями в* (3.12), *і звуження оператора $\mathcal{C}$ на $\mathcal{H}$ збігається з $\mathcal{C}_\mathcal{H}$.*

***Доведення.*** Розглянемо спочатку випадок, коли $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$ і оператор $B$ визначається формулою (3.4), тобто $B = \mathcal{B}$. Тоді $\mathcal{H} = \ker(\mathcal{B}^{*2} + I) = \{e^{-x}n \colon \forall n \in \mathcal{N}\}$. Враховуючи вигляд елементів простору $\mathcal{H}$, одержуємо

$$\mathcal{C}_\mathcal{H}(e^{-x}n) = e^{-x}m_1, \qquad \mathcal{P}_\mathcal{H}(e^{-x}n) = e^{-x}m_2, \qquad \mathcal{T}_\mathcal{H}(e^{-x}n) = e^{-x}m_3, \quad n, m_j \in \mathcal{N}.$$

Отже, дія операторів $\mathcal{C}_\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ та $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ однозначно визначається операторами

$$\mathcal{C}_\mathcal{N}n = m_1, \qquad \mathcal{P}_\mathcal{N}n = m_2, \qquad \mathcal{T}_\mathcal{N}n = m_3,$$

що діють у допоміжному просторі $\mathcal{N}$. Для таких операторів формули (3.14) набирають вигляду

$$\mathcal{C}_\mathcal{N}^2 = I, \qquad \mathcal{C}_\mathcal{N}\mathcal{P}_\mathcal{N}\mathcal{T}_\mathcal{N} = \mathcal{P}_\mathcal{N}\mathcal{T}_\mathcal{N}\mathcal{C}_\mathcal{N}.$$

Покладемо

$$\mathcal{C}f(x) = (\mathcal{C}_\mathcal{N}f)(x) \qquad \forall f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N}). \tag{3.15}$$

Оператор $\mathcal{C}$ є обмеженим лінійним оператором в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, і його звуження $\mathcal{C}$ на $\mathcal{H}$ збігається з $\mathcal{C}_\mathcal{H}$. Беручи до уваги (3.5), приходимо до висновку, що оператор $\mathcal{C}$ задовольняє умови (3.13). В свою чергу перша рівність в (3.12) випливає з $\mathcal{C}_\mathcal{N}^2 = I$.

Отже, для завершення доведення у випадку, коли $B = \mathcal{B}$, залишилося показати, що $\mathcal{CPT} = \mathcal{PTC}$.

Відомо [11] (лема 2.8), що розширення Фрідріхса $H_\mu$ оператора $B^2$ комутує з $\mathcal{PT}$. Водночас при $B = \mathcal{B}$ розширення Фрідріхса задається формулою (3.6). Враховуючи це та беручи до уваги (3.15), приходимо до висновку, що $H_\mu$ комутує з операторами $A_1 = \mathcal{CPT}$ і $A_2 = \mathcal{PTC}$. Тому їхня різниця $A_2 - A_1$ відображає $\mathcal{D}(H_\mu)$ в $\mathcal{D}(H_\mu)$. В свою чергу, з другої рівності в (3.14) і (3.15) випливає, що

$$(A_2 - A_1)(e^{-x}n) = (\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{C}_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}})(e^{-x}n) = 0$$

для всіх функцій $e^{-x}n$ з $\mathcal{H}$. Отже,

$$A_2 - A_1 \colon \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(H_\mu)\dot{+}\mathcal{H} \to \mathcal{D}(H_\mu). \tag{3.16}$$

Покладемо $\mathfrak{N}_\lambda = \ker(B^{*2} - \lambda I)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{D}(H_\mu) \cap \mathfrak{N}_\lambda = \{0\}$, з (3.16) випливає, що $(A_1 - A_2) \upharpoonright_{\mathfrak{N}_\lambda} = 0$, тобто $A_1 f_\lambda = A_2 f_\lambda$ для всіх $f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$. Ця рівність залишається правильною і на лінійній оболонці $\mathfrak{M}$ усіх підпросторів $\mathfrak{N}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Оскільки $\mathfrak{M}$ є щільною множиною в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, рівність $A_1 = A_2$ буде правильною на $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли $B$ є довільним простим максимальним симетричним оператором в $\mathfrak{H}$. Нехай $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ — лінійний оператор в $\mathcal{H}$ з властивостями (3.14). Покладемо

$$\mathcal{C}_{\mathcal{H}'} = U\mathcal{C}_{\mathcal{H}}U^{-1}, \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{H}'} = U\mathcal{P}_{\mathcal{H}}U^{-1}, \qquad \mathcal{T}_{\mathcal{H}'} = U\mathcal{T}_{\mathcal{H}}U^{-1},$$

де $U$ — унітарне перетворення простору $\mathfrak{H}$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$ з формул (3.7). Оператори $\mathcal{C}_{\mathcal{H}'}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{H}'}$ та $\mathcal{T}_{\mathcal{H}'}$ діють у підпросторі $\mathcal{H}' = U\mathcal{H} = \ker(\mathcal{B}^{*2} + I)$ простору $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$ і задовольняють умови $\mathcal{C}^2_{\mathcal{H}'} = I$, $\mathcal{C}_{\mathcal{H}'}\mathcal{P}_{\mathcal{H}'}\mathcal{T}_{\mathcal{H}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}'}\mathcal{T}_{\mathcal{H}'}\mathcal{C}_{\mathcal{H}'}$. Зауважимо, що $\mathcal{P}_{\mathcal{H}'}$ та $\mathcal{T}_{\mathcal{H}'}$ є відповідно звуженнями на $\mathcal{H}'$ операторів унітарної інволюції $\mathcal{P}' = U\mathcal{P}U^{-1}$ та спряження $\mathcal{T}' = U\mathcal{T}U^{-1}$, що діють в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$.

Використовуючи вже доведене твердження леми 3.2 для частинного випадку $B = \mathcal{B}$, одержуємо існування лінійного оператора $\mathcal{C}'$ в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, який комутує з операторами $\mathcal{B}^2$ та $\mathcal{B}^{*2}$ і має властивості $\mathcal{C}'^2 = I$, $\mathcal{C}'\mathcal{P}'\mathcal{T}' = \mathcal{P}'\mathcal{T}'\mathcal{C}'$. Звідси випливає, що оператор $\mathcal{C} = U^{-1}\mathcal{C}'U$ комутує з $B^2$ та $B^{*2}$ в $\mathfrak{H}$ і $\mathcal{C}^2 = I$, $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T} = \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{C}$.

Лему 3.2 доведено.

**Теорема 3.2.** *Нехай $\mathcal{P}\mathcal{T}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6), *оператор $B$ задовольняє* (3.10) *і $\mathsf{S}(k)$ є $S$-матрицею для $H$. Оператор $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію тоді і тільки тоді, коли в допоміжному просторі $\mathcal{H} = \ker(B^{*2} + I)$ існує обмежений оператор $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ з властивостями* (3.14) *і такий, що $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}\mathsf{S}(k) = \mathsf{S}(k)\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ при всіх $k \in \Lambda$.*

***Доведення.*** Якщо $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію, то існує обмежений оператор $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C} \neq \pm I)$ з властивостями (3.12) і (3.13). Зауважимо, що $\mathcal{C}$ також комутує з розширенням Фрідріхса $H_\mu = B^*B$ оператора $B^2$. Дійсно, з (3.13) випливає, що рівність $\mathcal{C}H_\mu = H_\mu\mathcal{C}$ еквівалентна умові $\mathcal{C} \colon \mathcal{D}(H_\mu) \to \mathcal{D}(H_\mu)$. З огляду на означення $\mathcal{D}(H_\mu)$ з підпункту 2.1 легко бачити, що остання умова виконується. Отже, $\mathcal{C}$ комутує з $H_\mu$. З цього співвідношення і (3.13) випливає, що граничні оператори $\Gamma_j$ (див. формули (2.4)) задовольняють співвідношення

$$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{C}, \quad j = 0, 1, \tag{3.17}$$

де $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \mathcal{C} \upharpoonright_{\mathcal{H}}$ — обмежений лінійний оператор в $\mathcal{H}$.

Враховуючи перші дві рівності в (3.12) і (2.8), з (3.17) одержуємо, що $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ задовольняє (3.14).

В свою чергу, використовуючи зображення (2.6) оператора $H$ та рівності (3.17), приходимо до висновку, що комутаційне співвідношення $\mathcal{C}H = H\mathcal{C}$ з (3.12) еквівалентне умові $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}T = T\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ на оператор $T$ в (2.6). З останньої рівності та (3.1) одержуємо $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}\mathsf{S}(k) = \mathsf{S}(k)\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ для всіх $k \in \Lambda$.

Навпаки, нехай у допоміжному просторі $\mathcal{H}$ існує оператор $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ з властивостями (3.14). Тоді згідно з лемою 3.2 існує обмежений лінійний оператор $\mathcal{C}$ в $\mathfrak{H}$, який задовольняє рівності (3.13) разом з першими двома рівностями в (3.12). Більш того, звуження $\mathcal{C}$ на $\mathcal{H}$ збігається з $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$. Тому, повторюючи попередні міркування, переконуємося, що $\mathcal{C}$ комутує з $H$ в $\mathfrak{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ комутує з $T$ в $\mathcal{H}$.

Використовуючи зображення (2.20) для $S$-матриці, приходимо до висновку, що

$$\frac{2-\theta}{\theta} = \frac{1-ik}{1+ik} \in \rho(\mathsf{S}(k)) \qquad \text{для всіх} \quad k \in \Lambda \setminus i\mathbb{R}_+$$

і

$$T = \frac{1}{2(1+ik)}\left[I - \frac{2ik}{1+ik}\left(\mathsf{S}(k) - \frac{1-ik}{1+ik}\right)^{-1}\right].$$

З останньої рівності та комутації між $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ та $\mathsf{S}(k)$ маємо $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}T = T\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$. Тому $\mathcal{C}H = H\mathcal{C}$ і, отже, оператор $\mathcal{C}$ є оператором стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для $H$.

Теорему 3.2 доведено.

Наступне твердження безпосередньо випливає з доведення теореми 3.2.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6), *а оператор $B$ задовольняє* (3.10). *Оператор $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію тоді і тільки тоді, коли оператор $T$ в* (2.6) *має властивість $\mathcal{C}$-симетрії.*

***3.3. Випадок, коли ненульове дефектне число оператора B дорівнює* 2.** Якщо $B$ має ненульове дефектне число 2, то симетричний оператор $B^2$ має індекс дефекту $\langle 2,2\rangle$. Тому розмірність допоміжного простору $\mathcal{H} = \ker(B^{*2}+I)$ в означенні ПГЗ буде дорівнювати 2, а дія оператора $T$ з формули (2.6) буде задаватись $(2\times 2)$-матрицею $\mathsf{T} = \|t_{ij}\|_{ij}^2$. Елементи $t_{ij}$ матриці $\mathsf{T}$ залежать від вибору ортонормованого базису $\mathcal{H}$, але її визначник $\det \mathsf{T} = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}$ та слід $\operatorname{tr} \mathsf{T} = t_{11} + t_{22}$ є інваріантами (тобто не залежать від вибору базису).

**Лема 3.3.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6). *Тоді визначник $\det \mathsf{T}$ та слід $\operatorname{tr} \mathsf{T}$ відповідного оператора $T$ в* (2.6) *будуть дійсними числами.*

***Доведення.*** Згідно з наслідком 2.1 оператор $T$ в (2.6) буде $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$-симетричним. Виберемо ортонормований базис простору $\mathcal{H}$ таким чином, щоб дія унітарної інволюції $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ визначалась матрицею $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а оператор спряження $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ діяв як звичайний оператор спряження. Тоді умова $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$-симетричності оператора $T$ буде еквівалентна наступним умовам на коефіцієнти матриці $\mathsf{T} = \|t_{ij}\|_{ij}^2$ [22]: $t_{11}, t_{22} \in \mathbb{R}$ і $t_{12}, t_{21} \in i\mathbb{R}$. Звідси випливає, що визначник $\det \mathsf{T}$ та слід $\operatorname{tr} \mathsf{T}$ є дійсними числами.

Лему 3.3 доведено.

**Теорема 3.3.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6), *а оператор $B$ задовольняє* (3.10) *і має ненульове дефектне число* 2. *Тоді наступні твердження є еквівалентними*:

(i) *оператор $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію*;

(ii) *оператор $T$ в* (2.6) *задовольняє нерівність* $(\operatorname{tr} \mathsf{T})^2 > 4\det\mathsf{T}$.

***Доведення.*** (i) $\to$ (ii). Якщо $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію, то згідно з теоремою 3.2 оператор $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \mathcal{C} \restriction_{\mathcal{H}}$ має властивості (3.14). Як і при доведенні леми 3.3, виберемо ортонормований базис простору $\mathcal{H}$ таким чином, щоб дія оператора $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ визначалась матрицею $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а оператор спряження $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ діяв як звичайний оператор спряження. Тоді з (3.14) та [22] (твердження 3.1) одержуємо існування таких чисел $\chi \in \mathbb{R}$, $\xi \in [0, 2\pi)$, що дія оператора $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ буде задаватись матрицею

$$\mathsf{C} = e^{\chi i \sigma_1 \sigma_{3\xi}} \sigma_{3\xi} = [\cosh \chi] \sigma_{3\xi} + i [\sinh \chi] \sigma_1, \tag{3.18}$$

де $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\sigma_{3\xi} = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3 = \begin{pmatrix} \cos\xi & -i\sin\xi \\ i\sin\xi & -\cos\xi \end{pmatrix}$.

Нехай $T$ відповідає оператору $H$ в (2.6). Тоді рівність $\mathcal{C}H = H\mathcal{C}$ є еквівалентною рівності $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}T = T\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ (див. доведення теореми 3.2)). Переходячи в останній рівності до матричного зображення, одержуємо

$$\mathsf{CT} = \mathsf{TC}. \tag{3.19}$$

Зауважимо, що $\sigma_{3\xi}$ є унітарною інволюцією, яка антикомутує з $\sigma_1$. Це означає, що набір матриць $\sigma_0$, $\sigma_1$, $i\sigma_1\sigma_{3\xi}$, $\sigma_{3\xi}$ буде базисом для лінійного простору матриць другого порядку. Отже, матрицю $\mathsf{T}$ можна записати у вигляді

$$\mathsf{T} = \beta_0\sigma_0 + \beta_1\sigma_1 + \beta_2 i\sigma_1\sigma_{3\xi} + \beta_3\sigma_{3\xi}, \quad \beta_j \in \mathbb{C}. \tag{3.20}$$

Оскільки $H$ є $\mathcal{PT}$-симетричним, то $T$ буде $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$-симетричним (наслідок 2.1). Враховуючи ототожнення $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ з $\sigma_3$, приходимо до висновку, що ця умова еквівалентна наступним умовам на коефіцієнти $\beta_j$ (детальніше див. доведення теореми 3.2 в [22]):

$$\{\beta_0, \beta_2, \beta_3\} \subset \mathbb{R}, \quad \beta_1 \in i\mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Підставляючи в (3.19) зображення (3.18) і (3.20) та порівнюючи коефіцієнти при базисних матрицях $\sigma_0$, $\sigma_1$, $i\sigma_1\sigma_{3\xi}$, $\sigma_{3\xi}$, переконуємося, що *комутаційне співвідношення* (3.19) *виконується тоді і тільки тоді*, *коли*

$$\beta_2 = 0 \qquad \beta_1 = i\beta_3[\tanh\chi]. \tag{3.22}$$

Враховуючи цей факт у (3.20), одержуємо $\operatorname{tr}\mathsf{T} = 2\beta_0$ і

$$\det\mathsf{T} = \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_3^2 = \beta_0^2 + \beta_3^2[(\tanh\chi)^2 - 1].$$

Тому

$$4\det\mathsf{T} = (\operatorname{tr}\mathsf{T})^2 + 4\beta_3^2[(\tanh\chi)^2 - 1].$$

Звідси випливає справедливість твердження (ii) (оскільки $\beta_3$ є дійсним числом згідно з (3.21)).

(ii) $\to$ (i). Оскільки $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається формулою (2.6), то з [11] (теорема 2.11) і ототожнення $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ з $\sigma_3$ випливає існування такого $\xi \in [0, 2\pi)$, що

$$\sigma_{3\xi}\mathsf{T} = \overline{\mathsf{T}}^t\sigma_{3\xi}.$$

Використовуючи в цій рівності зображення (3.20) для $\mathsf{T}$, приходимо до висновку, що для її виконання необхідна умова $\beta_2 = 0$. Зауважимо також, що $\beta_0, \beta_1, \beta_3$ задовольняють (3.21) (оскільки $H$ є $\mathcal{PT}$-симетричним). Отже, при деякому виборі $\xi \in [0, 2\pi)$ матрицю $\mathsf{T}$ можна записати у вигляді

$$\mathsf{T} = \beta_0\sigma_0 + \beta_1\sigma_1 + \beta_3\sigma_{3\xi}, \qquad \{\beta_0, \beta_3\} \subset \mathbb{R}, \quad \beta_1 \in i\mathbb{R}.$$

Звідси, беручи до уваги зображення для $\sigma_{3\xi}$ з (3.18), одержуємо

$$\operatorname{tr} \mathsf{T} = 2\beta_0 \qquad \det \mathsf{T} = \beta_0^2 + (i\beta_1)^2 - \beta_3^2.$$

Враховуючи, що $(\operatorname{tr} \mathsf{T})^2 > 4 \det \mathsf{T}$, з останніх рівностей виводимо, що $|\beta_1| < |\beta_3|$. Але тоді існує таке $\chi \in \mathbb{R}$, що $i\beta_1 = -\beta_3[\tanh \chi]$. Це означає, що для коефіцієнтів $\beta_j$ розкладу матриці $\mathsf{T}$ виконуються умови (3.22). Тому комутаційне співвідношення (3.19) буде виконуватись для матриці $\mathsf{C}$ вигляду (3.18). Матриця $\mathsf{C}$ визначає оператор $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ у просторі $\mathcal{H}$. Цей оператор комутує з оператором $T$ в $\mathcal{H}$ і задовольняє (3.14). Тобто $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ є $\mathcal{C}$-симетрією для оператора $T$, що діє в $\mathcal{H}$. Згідно з наслідком 3.2 одержуємо, що $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію.

Теорему 3.3 доведено.

***Зауваження* 3.3.** Подібне твердження доведено в [23] при інших умовах на симетричний оператор $S$.

Властивість стабільної $\mathcal{C}$-симетрії дозволяє реалізувати $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ як самоспряжений оператор у деякому гільбертовому просторі.

***Наслідок* 3.3.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задовольняє умови теореми* 3.3. *Тоді якщо $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію, то $H$ буде самоспряженим оператором при деякому виборі нового* (*еквівалентного початковому*) *скалярного добутку простору $\mathfrak{H}$.*

***Доведення.*** Якщо $\mathcal{C}$ є оператором стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для $H$, то дія його звуження на простір $\mathcal{H}$ буде задаватись матрицею (3.18) (при певному виборі $\chi \in \mathbb{R}$ і $\xi \in [0, 2\pi)$). В цій формулі матриця $\sigma_3$ відповідає дії оператора $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ — звуження на $\mathcal{H}$ оператора унітарної інволюції $\mathcal{P}$ в $\mathfrak{H}$.

Позначимо через $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ оператор в $\mathcal{H}$, який визначається матрицею $\sigma_1$. З властивостей матриць $\sigma_1$ та $\sigma_3$ одержуємо, що $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ є унітарною інволюцією в $\mathcal{H}$ і $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = -\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$.

Використавши позначення з доведення леми 3.2, розглянемо оператор $\mathcal{R}_{\mathcal{H}'} = U\mathcal{R}_{\mathcal{H}}U^{-1}$, який є унітарною інволюцією в підпросторі $\mathcal{H}' = \ker(\mathcal{B}^{*2} + I) = \{e^{-x}n \colon \forall n \in \mathcal{N}\}$ простору $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$ і антикомутує з $\mathcal{P}_{\mathcal{H}'}$. Тоді $\mathcal{R}_{\mathcal{H}'}(e^{-x}n) = e^{-x}\mathcal{R}_{\mathcal{N}}n$, де $\mathcal{R}_{\mathcal{N}}$ — унітарна інволюція в $\mathcal{N}$. Із допомогою цього оператора визначимо унітарну інволюцію $\mathcal{R}'f(x) = (\mathcal{R}_{\mathcal{N}}f)(x)$ в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{N})$, яка антикомутує з $\mathcal{P}' = U\mathcal{P}U^{-1}$. Тоді оператор $\mathcal{R} = U^{-1}\mathcal{R}'U$ буде унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$, яка антикомутує з $\mathcal{P}$.

З побудови оператора $\mathcal{R}$ також випливає, що $\mathcal{R}$ комутує з $B^2$ та $B^{*2}$ і дія звуження $\mathcal{R}$ на $\mathcal{H}$ визначається матрицею $\sigma_1$. Тому звуження оператора $\mathcal{P}_\xi = e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P}$ на $\mathcal{H}$ буде визначатись матрицею $\sigma_{3\xi} = e^{i\xi\sigma_1}\sigma_3$. З антикомутації $\mathcal{P}$ і $\mathcal{R}$ також одержуємо, що $\mathcal{P}_\xi$ є унітарною інволюцією в $\mathfrak{H}$, яка антикомутує з $\mathcal{R}$. Міркуючи аналогічно, переконуємося, що звуження $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ оператора $\mathcal{C} = e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}\mathcal{P}_\xi$ на $\mathcal{H}$ визначається матрицею $\mathsf{C}$ з (3.18).

Покажемо, що $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$, який задається рівністю (2.6), буде задовольняти рівність $H^*\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\xi H$. Дійсно, з огляду на комутацію $\mathcal{P}_\xi$ з $B^{*2}$ приходимо до висновку, що ця операторна рівність є еквівалентною рівності множин $\mathcal{P}_\xi\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H^*)$. Оскільки $H$ задається (2.6), то його спряжений $H^*$ буде задаватись подібною рівністю з заміною $T$ на $T^*$. Тому умова $\mathcal{P}_\xi\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H^*)$ є еквівалентною умові

$$T^*\Gamma_1\mathcal{P}_\xi f = \Gamma_0\mathcal{P}_\xi f, \qquad \text{де} \quad T\Gamma_1 f = \Gamma_0 f, \quad f \in \mathcal{D}(B^{*2}). \tag{3.23}$$

Оскільки унітарна інволюція $\mathcal{R}$ комутує з $B^2$ та $B^{*2}$, повторюючи міркування з доведення леми 2.2, приходимо до висновку, що $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \Gamma_j\mathcal{R}$, $j = 0, 1$. Тому

$$\Gamma_j\mathcal{P}_\xi = \Gamma_j e^{i\xi\mathcal{R}}\mathcal{P} = e^{i\xi\mathcal{R}_{\mathcal{H}}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Gamma_j = \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}\Gamma_j,$$

де $\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} = e^{i\xi\mathcal{R}_{\mathcal{H}}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ — звуженням оператора $\mathcal{P}_\xi$ на $\mathcal{H}$. Отримане співвідношення дозволяє записати (3.23) у вигляді $T^*\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}} = \mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}T$, або, переходячи до матричного зображення, у вигляді

$$\overline{\mathsf{T}}^t\sigma_{3\xi} = \sigma_{3\xi}\mathsf{T}. \tag{3.24}$$

З доведення теореми 3.3 випливає, що матриця $\mathsf{T}$ задається рівністю (3.20) з умовами (3.21) на коефіцієнти $\beta_j$. Більш того, оскільки $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію, то виконується (3.19), що є можливим лише при $\beta_2 = 0$. Отже, зображення (3.20) для $\mathsf{T}$ не містить матриці з коефіцієнтом $\beta_2$. В цьому випадку буде виконуватись рівність (3.24). Таким чином, ми встановили рівність $H^*\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\xi H$.

Покажемо тепер, що $\mathcal{C}H = H\mathcal{C}$, де $\mathcal{C} = e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}\mathcal{P}_\xi$. Ця операторна рівність є еквівалентною співвідношенню $\mathcal{C}\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H)$, тобто

$$T\Gamma_1\mathcal{C}f = \Gamma_0\mathcal{C}f, \quad f \in \mathcal{D}(B^{*2}). \tag{3.25}$$

Міркуючи аналогічно попередньому, одержуємо

$$\Gamma_j\mathcal{C} = \Gamma_j e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}\mathcal{P}_\xi = e^{\chi i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}}\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}\Gamma_j = \mathcal{C}_{\mathcal{H}}\Gamma_j,$$

де $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = e^{\chi i\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}}\mathcal{P}_{\xi_{\mathcal{H}}}$ — звуження оператора $\mathcal{C}$ на $\mathcal{H}$. Це дозволяє записати (3.25) у вигляді $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}T = T\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$. Матричним зображенням для цієї рівності буде вже відома комутаційна рівність (3.19), справедливість якої випливає з існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії (див. доведення теореми 3.3). Тому рівність $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}T = T\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ також буде правильною, що еквівалентно співвідношенню $\mathcal{C}H = H\mathcal{C}$.

З отриманих співвідношень маємо

$$\mathcal{C}H = e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}\mathcal{P}_\xi H = e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}H^*\mathcal{P}_\xi = H\mathcal{C} = He^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}\mathcal{P}_\xi.$$

Отже, $e^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}H^* = He^{\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}$ або $H^*e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi} = e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}H$.

Зауважимо, що оператор $-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi$ є самоспряженим в $\mathfrak{H}$ (оскільки $\chi$ є дійсним числом, а оператори $\mathcal{R}$ і $\mathcal{P}_\xi$ антикомутують). Тому $e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}$ є обмеженим додатним самоспряженим оператором і вираз

$$(f,g)_1 = (e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}f, g), \quad f, g \in \mathfrak{H},$$

є скалярним добутком гільбертового простору $\mathfrak{H}$. Оператор $H$ буде самоспряженим в $\mathfrak{H}$ відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_1$ (оскільки $H^*e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi} = e^{-\chi i\mathcal{R}\mathcal{P}_\xi}H$).

Наслідок 3.3 доведено.

Природно очікувати, що існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для оператора $H$ якимось чином відображається у властивостях відповідної $S$-матриці. Нагадаємо, що $S$-матриця 0-збуреного оператора $H$ визначається у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ за допомогою формули (3.1). Таке означення є цілком достатнім для опису спектра оператора $H$. Дійсно, полюси $S$-матриці в $\mathbb{C}_+$ характеризують точковий спектр оператора $H$ (див. наслідок 3.1), а неперервний спектр збігається з $\mathbb{R}_+$ (це випливає із загальних властивостей 0-збуреного оператора і того факту, що індекс дефекту симетричного оператора $B^2$ є скінченним).

Для доведення існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії зручно розглядати продовження $S$-матриці в нижню півплощину $\mathbb{C}_-$ (так зване продовження на нефізичний лист). Подібно до попереднього означення $S$-матриця 0-збуреного оператора $H$ задається формулою (3.1), ми лише припускаємо, що $k \in \mathbb{C}$.

**Лема 3.4.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6), *а оператор $B$ задовольняє* (3.10) *і має ненульове дефектне число* 2. *Тоді $S$-матриця оператора $H$ є мероморфною функцією на $\mathbb{C}$, і ця функція має два різних уявних полюси в $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\det \mathsf{T} \neq 0, \qquad (\operatorname{tr} \mathsf{T})^2 > 4 \det \mathsf{T}, \tag{3.26}$$

*де* $\det \mathsf{T}$ *та* $\operatorname{tr} \mathsf{T}$ *є визначником та слідом відповідного оператора $T$ в* (2.6).

***Доведення.*** Запишемо (3.1) у вигляді

$$\mathsf{S}(k) = \left[I - 2(1-ik)\mathsf{T}\right]\left[I - 2(1+ik)\mathsf{T}\right]^{-1}, \tag{3.27}$$

де $\mathsf{T} = \|t_{ij}\|_{ij}^2$ — матриця, яка відповідає оператору $T$ в (2.6).

Покладемо $\theta = 1 + ik$, $k \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що при $k = i$ $S$-матриця не має полюсу (оскільки $\mathsf{S}(i) = I - 4\mathsf{T}$). Отже, можемо вважати, що $\theta \neq 0$. У цьому випадку формулу (3.27) можна записати у вигляді (для порівняння див. (2.20))

$$\mathsf{S}(k) = \frac{2-\theta}{\theta} I + 2\frac{\theta - 1}{\theta}[I - 2\theta\mathsf{T}]^{-1}, \quad \theta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Таким чином, $S$-матриця є мероморфною функцією в $\mathbb{C}$ і її полюси визначаються умовою $\det[I - 2\theta\mathsf{T}] = 0$, яка записується в вигляді $4\theta^2 \det \mathsf{T} - 2\theta(\operatorname{tr}\mathsf{T}) + 1 = 0$. Оскільки $\theta = 1 + ik$, з цього рівняння виводимо, що $S$-матриця має два різних уявних полюси $k_{1,2}$ тоді і тільки тоді, коли умова (3.26) виконується. В цьому випадку шуканими полюсами будуть

$$k_{1,2} = i\frac{(4\det \mathsf{T} - \operatorname{tr}\mathsf{T}) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\mathsf{T})^2 - 4\det\mathsf{T}}}{4\det\mathsf{T}}. \tag{3.28}$$

Лему 3.4 доведено.

**Теорема 3.4.** *Нехай $\mathcal{PT}$-симетричний оператор $H$ задається рівністю* (2.6), *а оператор $B$ задовольняє* (3.10) *і має ненульове дефектне число* 2. *$S$-матриця оператора $H$ має два різних уявних полюси в $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли оператор $H$ має стабільну $\mathcal{C}$-симетрію і $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu) = \mathcal{D}(B^2)$.*

***Доведення.*** Нехай $S$-матриця оператора $H$ має два різних уявних полюси. Тоді згідно з лемою 3.4 оператор $T$ в (2.6) задовольняє (3.26). Друга нерівність в (3.26) еквівалентна існуванню стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для $H$ (теорема 3.3). Для завершення доведення достатньо показати, що перша умова в (3.26) є еквівалентною рівності $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu) = \mathcal{D}(B^2)$.

З означення операторів $H$ і $H_\mu$ маємо $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu) \supset \mathcal{D}(B^2)$. Область визначення $\mathcal{D}(H)$ задається (2.6), а з першої рівності в (2.4) отримуємо $\mathcal{D}(H_\mu) = \{f \in \mathcal{D}(B^{*2})\colon \Gamma_0 f = 0\}$. Тому існування елемента $f \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu)$, який не належить до $\mathcal{D}(B^2)$, означає, що $T\Gamma_1 f = 0$, де $\Gamma_1 f \neq 0$. Останнє співвідношення є еквівалентним умові $\det \mathsf{T} = 0$. Таким чином, рівність $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu) = \mathcal{D}(B^2)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\det \mathsf{T} \neq 0$.

Теорему 3.4 доведено.

**4. Приклад.** Оператор Шредінгера з сингулярним потенціалом нульового радіуса на дійсній осі може бути визначений за допомогою формального виразу

$$-\frac{d^2}{dx^2} + a\langle\delta, \cdot\rangle\delta + b\langle\delta', \cdot\rangle\delta + c\langle\delta, \cdot\rangle\delta' + d\langle\delta', \cdot\rangle\delta', \tag{4.1}$$

де $\delta$ і $\delta'$ — відповідно $\delta$-функція Дірака та її похідна (з носієм в 0), $a, b, c, d$ — комплексні числа.

Операторна реалізація (4.1) в $L_2(\mathbb{R})$ визначається як

$$H = l_{\mathrm{reg}} \upharpoonright \mathcal{D}(H), \qquad \mathcal{D}(H) = \big\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})\colon l_{\mathrm{reg}}(f) \in L_2(\mathbb{R}) \big\}, \tag{4.2}$$

де регуляризація $l_{\mathrm{reg}}$ диференціального виразу (4.1) діє на функціях з $W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ і має вигляд

$$l_{\mathrm{reg}}(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + a\langle \delta_{\mathrm{ex}}, \cdot\rangle\delta + b\langle \delta'_{\mathrm{ex}}, \cdot\rangle\delta + c\langle \delta_{\mathrm{ex}}, \cdot\rangle\delta' + d\langle \delta'_{\mathrm{ex}}, \cdot\rangle\delta'.$$

Тут $-d^2/dx^2$ діє на $W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, як узагальнена функція, і

$$\langle \delta_{\mathrm{ex}}, \rangle = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}, \qquad \langle \delta'_{\mathrm{ex}}, f\rangle = -\frac{f'(+0)+f'(-0)}{2}$$

для всіх $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

Еквівалентним описом оператора $H$ є (див. [24], теорема 1): $H = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ і

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0+)+f(0-) \\ -f'(0+)-f'(0-) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} f'(0+)-f'(0-) \\ f(0+)-f(0-) \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.3}$$

З (4.3) випливає, що $H$ є квазісамоспряженим розширенням симетричного оператора $B^2$, де $B$ визначено формулою (2.10). Отже, $H$ є 0-збуреним оператором.

У просторі $L_2(\mathbb{R})$ розглянемо оператор унітарної інволюції $\mathcal{P}f(x) = f(-x)$ і оператор спряження $\mathcal{T}f(x) = \overline{f(x)}$. При такому виборі $\mathcal{P}$ і $\mathcal{T}$ оператор $B$ з (2.10) задовольняє умови (3.10). Отже, оператори $B^2$ і $B^{*2}$ є $\mathcal{PT}$-симетричними. Тому 0-збурений оператор $H$ буде $\mathcal{PT}$-симетричним тоді і тільки тоді, коли його область визначення $\mathcal{D}(H)$ буде інваріантною відносно дії оператора $\mathcal{PT}$.

Беручи до уваги, що

$$(\mathcal{P}f)(0\pm) = f(0\mp), \qquad (\mathcal{P}f)'(0\pm) = -f'(0\mp), \tag{4.4}$$

з (4.3) одержуємо, що $H$ є $\mathcal{PT}$-симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли $a$, $d$ є дійсними числами, а $b$, $c$ — чисто уявними (тобто $b, c \in i\mathbb{R}$). Зауважимо, що ці умови відповідають $\mathcal{PT}$-симетричності формального потенціалу $V = a\langle\delta,\cdot\rangle\delta + b\langle\delta',\cdot\rangle\delta + c\langle\delta,\cdot\rangle\delta' + d\langle\delta',\cdot\rangle\delta'$ в (4.1).

При означенні $S$-матриці у попередніх пунктах ми використовували (технічну) умову $-1 \in \in \rho(H)$. З'ясуємо, коли вона виконується для $\mathcal{PT}$-симетричного оператора $H$ з (4.2). Зрозуміло, що $-1 \notin \rho(H) \iff -1 \in \sigma_p(H)$. Останння умова рівносильна існуванню функції

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-x}, & x > 0, \\ \beta e^{x}, & x < 0, \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

в області визначення оператора $H$. Підставляючи граничні значення цієї функції в (4.3), одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\alpha$, $\beta$. Ця система має нетривіальні розв'язки лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a+b+2 & a-b+2 \\ c+d-2 & c-d+2 \end{vmatrix} = 2\big[bc - ad + 4 + 2(a-d)\big] = 0.$$

Тому $-1 \in \rho(H)$ тоді і тільки, тоді коли

$$bc - ad + 4 + 2(a-d) \neq 0. \tag{4.5}$$

Далі вважаємо, що $-1 \in \rho(H)$ (тобто виконується умова (4.5)). Тоді область визначення оператора $H$ можно записати у вигляді (2.6).

Нехай $k \in \mathbb{C}'_+ = \mathbb{C}_+ \setminus i\mathbb{R}_+ = \{k \in \mathbb{C}_+ : \operatorname{Re} k \neq 0\}$. Повторюючи міркування з підпункту 2.2 (див. приклад 2.1), одержуємо, що $k^2 \in \rho(H)$ тоді і тільки тоді, коли функції $f_j$ з (2.17) належать до області визначення оператора $H$, тобто $f_j$ повинні задовольняти (2.6). Підставляючи граничні значення цих функцій (2.18) у (2.6), отримуємо дві системи лінійних неоднорідних рівнянь відносно змінних $t_{11}, t_{12}$ та $t_{21}, t_{22}$ :

$$2t_{11}\theta(R_k^r + e^{i\alpha}) + 2t_{12}\theta T_k^r = 1 + R_k^r,$$

$$2t_{11}\theta T_k^l + 2t_{12}\theta(R_k^l + e^{i\alpha}) = T_k^l, \qquad \theta = 1 + ik, \quad e^{i\alpha} = \frac{\overline{\theta}}{\theta};$$

$$2t_{21}\theta(R_k^r + e^{i\alpha}) + 2t_{22}\theta T_k^r = T_k^r,$$

$$2t_{21}\theta T_k^l + 2t_{22}\theta(R_k^l + e^{i\alpha}) = 1 + R_k^l.$$

Такі системи *одночасно* мають розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} R_k^r + e^{i\alpha} & T_k^r \\ T_k^l & R_k^l + e^{i\alpha} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.6}$$

Відповідні розв'язки $t_{ij}$ знаходяться за формулою (2.19).

Отже, $k^2 \in \rho(H)$ тоді і тільки тоді, коли виконується (4.6). У цьому випадку в точці $k \in \mathbb{C}'_+$ існує $S$-матриця $\mathsf{S}(k)$ (див. теорему 3.1). Повторюючи міркування з підпункту 2.2 (див. приклад 2.1), приходимо до висновку, що подібно до самоспряженого випадку $S$-матриця визначається формулою (2.21). Зв'язок коефіцієнтів відбиття $R_k^l$, $R_k^r$ та проходження $T_k^l, T_k^r$ в (2.21) з параметрами $a, b, c, d$ з (4.1) можна знайти, підставивши граничні значення (2.18) в (4.3). В загальному випадку такі формули є достатньо громіздкими. Тому розглянемо частинний випадок.

Нехай $a = d = 0$ і $b = c = i\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Тоді вираз (4.1) набирає вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2} + i\gamma\langle\delta', \cdot\rangle\delta + i\gamma\langle\delta, \cdot\rangle\delta'.$$

Область визначення (4.3) для відповідної операторної реалізації $H$ можна записати у вигляді

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) : \quad \begin{matrix} f(0+) = e^{i\beta} f(0-) \\ f'(0+) = e^{-i\beta} f'(0-) \end{matrix} \right\},$$

де $e^{i\beta} = \dfrac{2 + i\gamma}{2 - i\gamma}$, $\beta \in (-\pi, \pi]$.

Умова (4.5) дає $\gamma^2 \neq 4$. Отже, $\gamma \neq \pm 2$ або, що еквівалентно, $\beta \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Коефіцієнти $T_k^l$, $T_k^r$, $R_k^l$, $R_k^r$ визначаються формулами

$$T_k^l = T_k^r = \frac{\operatorname{Re} k}{k\cos\beta}, \qquad R_k^r = i\frac{(\operatorname{Re} k)\sin\beta - (\operatorname{Im} k)\cos\beta}{k\cos\beta},$$

$$R_k^l = -i\frac{(\operatorname{Re} k)\sin\beta + (\operatorname{Im} k)\cos\beta}{k\cos\beta}.$$

Підставляючи ці величини в (2.21), після нескладних перетворень отримуємо

$$\mathsf{S}(k) = -\begin{pmatrix} i\tan\beta & \dfrac{1}{\cos\beta} \\ \dfrac{1}{\cos\beta} & -i\tan\beta \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $S$-матриця $\mathsf{S}(k)$ є константною на $\mathbb{C}_+$.

З результатів [12] (підрозділ E) випливає існування оператора $\mathcal{C}_\mathcal{H}$ в $\mathcal{H} = \ker(B^{*2} + I)$, що комутує з $S$-матрицею та має властивості (3.14). На підставі теореми 3.2 це означає існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії для $\mathcal{PT}$-симетричного оператора $H$. (В цьому випадку теорему 3.4 не можна застосувати для доведення існування стабільної $\mathcal{C}$-симетрії, оскільки $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_\mu) \supset \supset \mathcal{D}(B^2)$.) Згідно з наслідком 3.3 одержуємо, що $H$ буде самоспряженим оператором в $L_2(\mathbb{R})$ при певному виборі скалярного добутку в $L_2(\mathbb{R})$.


1. *Caliceti E., Cannata F., Graffi S.* $\mathcal{PT}$-symmetric Schrodinger operators, reality of the perturbed eigenvalues // SIGMA. – 2010. – **6**. – P. 9 – 17.
2. *Günther U., Kuzhel S.* $\mathcal{PT}$-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space related Clifford algebras // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2010. – **43**, № 39. – P. 392002 – 392011.
3. *Bender C. M.* Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rept. Progr. Phys. – 2007. – **70**, № 6. – P. 947 – 1018.
4. *Mostafazadeh A.* Pseudo-Hermitian representation of Quantum Mechanics // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2010. – **7**. – P. 1191 – 1306.
5. *Ahmed Zafar, Bender Carl M., Berry M. V.* Reflectionless potentials and $\mathcal{PT}$ symmetry // J. Phys. A. – 2005. – **38**. – P. L627 – L630.
6. *Cannata F., Dedonder J.-P., Ventura A.* cattering in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics // Ann. Phys. – 2007. – **322**. – P. 397 – 433.
7. *Jones H. F.* Scattering from localized non-Hermitian potentials // Phys. Rev. D. – 2007. – **76**. – P. 125003 – 125008.
8. *Hernandez-Coronado H., Krejčiřík D., Siegl P.* Perfect transmission scattering as a $\mathcal{PT}$-symmetric spectral problem // Phys. Lett. A. – 2011. – **375**. – P. 2149 – 2152.
9. *Mostafazadeh A.* Spectral singularities of complex scattering potentials and infinite reflection and transmission coefficients at real energies // Phys. Rev. Lett. – 2009. – **102**. – P. 220402 – 220407.
10. *Znojil M.* Scattering theory with localized non-Hermiticites // Phys. Rev. D. – 2008. – **78**. – P. 025026 – 025036.
11. *Albeverio S., Kuzhel S.* On elements of the Lax – Phillips scattering scheme for $\mathcal{PT}$-symmetric operators // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2012. – **45**. – P. 1 – 21.
12. *Cojuhari P. A., Kuzhel S.* Lax – Phillips scattering theory for $\mathcal{PT}$-symmetric $\rho$-perturbed operators // J. Math. Phys. – 2012. – **53**. – P. 073514 – 073531.
13. *Lax P., Phillips R.* Scattering theory. – Acad. Press, 1989.
14. *Kuzhel S.* On the inverse problem in the Lax – Phillips scattering theory method for a class of operator-differential equations // St. Petersburg Math. J. – 2002. – **13**. – P. 41 – 56.
15. *Kuzhel S., Moskalyova U.* The Lax – Phillips scattering approach and singular perturbations of Schrödinger operator homogeneous with respect to scaling transformations // J. Math. Kyoto Univ. – 2005. – **45**, № 2. – P. 265 – 286.
16. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Vol. II. Spectral theory. Self-adjoint operators in Hilbert spaces. – New York; London: Intersci., 1963.

17. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
18. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
19. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4. – С. 435 – 459.
20. *Hassi S., Kuzhel S.* On J-self-adjoint operators with stable $\mathcal{C}$-symmetries // Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A. Math. – 2013. – **143**.
21. *Kuzhel S., Trunk C.* On a class of $J$-self-adjoint-operators with empty resolvent set // J. Math. Anal. and Appl. – 2011. – **379**, Issue 1. – P. 272 – 289.
22. *Грод А. І.* До теорії $\mathcal{PT}$-симетричних операторів // Чернів. наук. вісн. – 2011. – **1**, № 4. – С. 36 – 42.
23. *Patsyuck O. M.* On stable $C$-symmetries for a class of $P\mathcal{T}$-symmetric operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 1.
24. *Albeverio S., Kuzhel S.* One-dimensional Schrödinger operators with $\mathcal{P}$-symmetric zero-range potentials // J. Phys. A. – 2005. – **38**. – P. 4975 – 4988.

Одержано 21.01.13