УДК 517.929

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З АБСОЛЮТНО НЕСТІЙКИМИ НУЛЬОВИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

We obtain conditions for the absolute instability of the trivial solutions of nonlinear differential equations.

Получены условия абсолютной неустойчивости нулевых решений нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Основні позначення й об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}_+$ — множина всіх дійсних невід'ємних чисел, $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, E — комплексний банаховий простір нескінченної розмірності з нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X_1, X_2)$ — банаховий простір усіх лінійних неперервних операторів $A\colon X_1 \to X_2$ з нормою $\|A\|_{L(X_1,X_2)} = \sup_{\|x\|_{X_1}=1} \|Ax\|_{X_2}$ (X_1 і X_2 — довільні банахові простори).

Позначимо через $\mathcal{K}$ алгебру цілком неперервних операторів $K \in L(E,E)$, а через $\mathfrak{F}$ клас усіх неперервних відображень $F\colon \mathbb{R}_+ \times E \to E$, кожне з яких задовольняє такі умови:

1) для деякої неперервної функції $L\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, що залежить від F, та всіх $x_1, x_2 \in E$ і $t \in \mathbb{R}_+$

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\|_E \leqslant L(t)\|x_1 - x_2\|_E; \tag{1}$$

2) існують неперервні неспадна функція $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ і відображення $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{K}$, залежні від F, для яких

$$\varphi(0) = 0 \tag{2}$$

і

$$\|F(t,x)\|_E \leqslant \varphi\left(\|K(t)x\|_E\right) \tag{3}$$

для всіх $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times E$.

Очевидно, що на підставі (2) і (3)

$$F(t,0) \equiv 0$$

для кожного $F \in \mathfrak{F}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(t,x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

де $A \in L(E,E)$ і $F \in \mathfrak{F}$.

Завдяки вимогам до розглянутих вище операторів для кожних числа $t_0 \in \mathbb{R}_+$ і вектора $x_0 \in E$ рівняння (4) має єдиний залежний від t_0 і x_0 розв'язок $x = x(t,t_0,x_0)$, що задовольняє початкову умову

$$x(t_0,t_0,x_0) = x_0.$$

Очевидно, що $x(t,t_0,0) \equiv 0$.

Метою статті є встановлення умов нестійкості нульового розв'язку рівняння (4) одночасно для всіх відображень $F \in \mathfrak{F}$.

Нагадаємо, що нульовий розв'язок рівняння (4) називається *нестійким*, якщо існує таке число $a > 0$, що для кожного як завгодно малого числа $\delta > 0$ для деяких вектора $x_0 \in E$ і числа $T > 0$ справджуються співвідношення

$$\|x_0\|_E < \delta$$

і

$$\|x(T, 0, x_0)\|_E \geqslant a.$$

Нульовий розв'язок рівняння (4) будемо називати *абсолютно нестійким* по відношенню до відображень $F \in \mathfrak{F}$, якщо цей розв'язок нестійкий для кожного відображення $F \in \mathfrak{F}$.

2. Формулювання основного результату. Позначимо через $\sigma_{ess.a}(A)$ істотно апроксимативний спектр оператора A (означення та деякі властивості цього спектра наведемо в наступному пункті), а через $\mathbb{C}_+$ множину $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\sigma_{ess.a}(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing$. Тоді нульовий розв'язок рівняння* (4) *абсолютно нестійкий по відношенню до відображень $F \in \mathfrak{F}$.*

Доведення наведемо після розгляду допоміжних результатів.

3. Допоміжні результати. Наведемо потрібні для подальшого дані про істотно апроксимативний спектр лінійного неперервного оператора та про зображення розв'язків рівняння (4).

3.1. Істотно апроксимативний спектр оператора. Обмежену послідовність (y_n) векторів простору E називатимемо *істотно розбіжною*, якщо вона не містить збіжних підпослідовностей. Множина таких послідовностей не є порожньою завдяки нескінченній розмірності простору E і, як наслідок, некомпактності кожної кулі радіуса $R > 0$ цього простору [1, с. 235].

Нехай Ω — довільна підмножина простору E і $\operatorname{diam}\Omega$ — її *діаметр*, визначений рівністю

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup\{\|x - y\| \colon x, y \in \Omega\},$$

який для необмеженого Ω вважається рівним нескінченності, а для порожнього Ω — нулю.

Для обмеженої множини Ω *мірою некомпактності* (див. [2, с. 7; 3, с. 321]) називається число

$$\alpha(\Omega) = \inf \Bigg\{ d \colon \text{існує скінченне число підмножин } \Omega_1, \ldots, \Omega_n \text{ простору } E,$$

$$\text{для яких } \operatorname{diam}\Omega_1 \leqslant d, \ldots, \operatorname{diam}\Omega_n \leqslant d \text{ і } \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \Bigg\}.$$

Істотно апроксимативним спектром оператора $A \in L(E, E)$ називається множина $\sigma_{ess.a}(A) \subset \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ — спектр оператора A), для кожної точки λ якої існує така істотно розбіжна послідовність (x_n) елементів простору E, що

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)x_n\|_E = 0.$$

Наведемо деякі властивості істотно апроксимативного спектра оператора за допомогою наступних теорем.

Теорема 2 [4, с. 241]. *У випадку* $\dim\ E = \infty$ *для кожного оператора* $A \in L(E, E)$ *істотно апроксимативний спектр* $\sigma_{ess.a}(A)$ *є непорожньою компактною множиною.*

Теорема 3 [5]. *Наступні твердження рівносильні*:

1) $\lambda \in \sigma_{ess.a}(A)$;

2) *існує обмежена множина* $B \subset E$, *для якої* $\alpha(B) > 0$ *і* $\alpha((A - \lambda I)B) = 0$;

3) $\dim \ker(A - \lambda I) = \infty$ *або* $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)}$.

Теорема 4 [5]. *Кожна гранична не внутрішня точка спектра* $\sigma(A)$ *є точкою істотно апроксимативного спектра* $\sigma_{ess.a}(A)$.

Теорема 5 [5]. *Для довільних числа* $\lambda \in \sigma_{ess.a}(A)$ *і відносно компактної множини* $\mathcal{B}$ *цілком неперервних операторів* $K \in L(E, E_1)$ (E_1 — *банаховий простір*) *існує істотно розбіжна послідовність* (x_n) *векторів простору* E, *для якої*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|(A - \lambda I)x_n\|_E + \sup_{K\in\mathcal{B}} \|Kx_n\|_{E_1}\right) = 0.$$

Теорема 6 [6, с. 47]. *Нехай* A — *лінійний неперервний оператор, що діє в комплексному банаховому просторі* E *і* f — *локально голоморфна на* $\sigma(A)$ *функція.*

Тоді

$$\sigma_{ess.a}(f(A)) = f(\sigma_{ess.a}(A)).$$

***3.2. Зображення розв'язків диференціального рівняння* (4).** Зафіксуємо довільні число $t_0 \in \mathbb{R}_+$, вектор $x_0 \in E$ і відображення $F \in \mathfrak{F}$.

Розглянемо задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Ця задача має єдиний розв'язок $x = x(t, t_0, x_0)$ (див., наприклад, [7, с. 46; 8, с. 392 – 394]), який можна подати у вигляді

$$x(t, t_0, x_0) = x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t) - x_n(t)), \tag{6}$$

де

$$x_0(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$$

і

$$x_{n+1}(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}F(s, x_n(s))\, ds, \qquad n \geqslant 0. \tag{7}$$

У цьому легко переконатися, якщо врахувати, що розв'язки задачі (5) та інтегрального рівняння

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}F(s, x(s))\, ds,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

збігаються між собою [8] і для членів ряду в рівності (6) завдяки (1) і (7) для кожного числа $T > 0$ виконується співвідношення

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leqslant \frac{M^{n+1}|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{T\|A\|_{L(E,E)}}\|x_0\|_E,$$

$$t \in [t_0 - T, t_0 + T] \cap \mathbb{R}_+, \qquad n \geqslant 0,$$

в якому

$$M = e^{T\|A\|_{L(E,E)}} \sup_{s\in[t_0-T,t_0+T]\cap\mathbb{R}_+} L(s). \tag{8}$$

4. Доведення теореми 1. Нехай μ — один із елементів множини $\sigma_{ess.a}(A) \cap \mathbb{C}_+$ і ε — довільне додатне число, менше за одиницю. Існує таке додатне число $T(\varepsilon)$, що

$$\varepsilon e^{T(\varepsilon)\mathrm{Re}\,\mu} = 2. \tag{9}$$

За теоремою 6

$$e^{T(\varepsilon)\mu} \in \sigma_{ess.a}(e^{T(\varepsilon)A}).$$

Тому для деякої істотно розбіжної послідовності нормованих векторів $a_m \in E$, $m \geqslant 1$, справджується співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} \left\| e^{T(\varepsilon)A}a_m - e^{T(\varepsilon)\mu}a_m \right\|_E = 0. \tag{10}$$

Далі будемо розглядати задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(t, x(t)), \qquad t \in [0, T(\varepsilon)],$$
$$x(0) = \varepsilon a_m, \tag{11}$$

де F — довільний фіксований елемент множини $\mathfrak{F}$.

Визначимо функції $x_n(t, 0, \varepsilon a_m)$, $n \geqslant 0$, за допомогою співвідношень

$$x_0(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA}\varepsilon a_m \tag{12}$$

і

$$x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA}\varepsilon a_m + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, x_n(s, 0, \varepsilon a_m))\, ds, \quad n \geqslant 0. \tag{13}$$

Згідно з п. 3.2 розв'язок $x(t, 0, \varepsilon a_m)$ задачі (11) можна подати у вигляді

$$x(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA}\varepsilon a_m + \sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) - x_n(t, 0, \varepsilon a_m)) \tag{14}$$

і

$$\|x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) - x_n(t, 0, \varepsilon a_m)\|_E \leqslant \frac{M^{n+1}(T(\varepsilon))^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{T(\varepsilon)\|A\|_{L(E,E)}}\varepsilon\|a_m\|_E, \tag{15}$$

де M — число, визначене рівністю (8) при $T = T(\varepsilon)$, і $t \in [0, T(\varepsilon)]$.

Розглянемо множину $\left\{K(s)e^{sA} \colon s \in [0, T(\varepsilon)]\right\}$, елементами якої є лінійні цілком неперервні оператори, що діють у просторі E. Завдяки неперервній залежності від s на $[0, T(\varepsilon)]$ операторних функцій $K(s)$ і e^{sA} ця множина є компактною в $L(E, E)$. Тому на підставі теореми 5 для деякої істотно розбіжної послідовності нормованих векторів (b_m) буде виконуватися співвідношення

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{s \in [0, T(\varepsilon)]} \left\| K(s) e^{sA} \varepsilon b_m \right\|_E = 0. \tag{16}$$

Не порушуючи загальності, можна вважати (на підставі теореми 5), що

$$b_m = a_m, \qquad m \geqslant 1. \tag{17}$$

Покажемо, що для кожного $n \geqslant 0$

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} \| x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) - x_n(t, 0, \varepsilon a_m) \|_E = 0. \tag{18}$$

Це співвідношення випливає з того, що для кожного $n \geqslant 0$ функцію $x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m)$ можна записати у вигляді

$$x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA} \varepsilon a_m + \varphi_{n,m}(t), \tag{19}$$

де $\varphi_{n,m} \colon [0, T(\varepsilon)] \to E$ — неперервна функція, для якої

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} \| \varphi_{n,m}(t) \|_E = 0. \tag{20}$$

Справді, на підставі (12) і (13) для $n = 0$

$$x_1(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA} \varepsilon a_m + \int_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA} \varepsilon a_m\right) \, ds.$$

Оскільки завдяки (3)

$$\sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA} \varepsilon a_m\right) \, ds \right\|_E \leqslant \int_0^{T(\varepsilon)} e^{T(\varepsilon) \|A\|_{L(E,E)}} \varphi\left(\left\| K(s) e^{sA} \varepsilon a_m \right\|_E \right) \, ds \leqslant$$

$$\leqslant T(\varepsilon) e^{T(\varepsilon) \|A\|_{L(E,E)}} \sup_{s \in [0, T(\varepsilon)]} \varphi\left(\left\| K(s) e^{sA} \varepsilon a_m \right\|_E \right) =$$

$$= T(\varepsilon) e^{T(\varepsilon) \|A\|_{L(E,E)}} \varphi\left(\sup_{s \in [0, T(\varepsilon)]} \left\| K(s) e^{sA} \varepsilon a_m \right\|_E \right)$$

(тут використано те, що функція $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є неперервною і неспадною), то на підставі (2), (16) та (17)

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA} \varepsilon a_m\right) ds \right\|_E = 0$$

і, отже, виконуються співвідношення (19) і (20) при $n = 0$, де

$$\varphi_{0,m}(t) = \int\limits_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA}\varepsilon a_m\right)\, ds.$$

Далі використаємо метод математичної індукції. Припустимо, що рівність (19) справджується при $n = k$. Покажемо, що ця рівність справджується і при $n = k+1$. Звідси випливатимуть співвідношення (19) і (20).

На підставі (13) і (19) при $n = k$ маємо

$$x_{k+2}(t, 0, \varepsilon a_m) = e^{tA}\varepsilon a_m + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA}\varepsilon a_m + \varphi_{k,m}(s)\right)\, ds.$$

Оскільки завдяки (3) та властивостям функції φ

$$\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \left\| \int\limits_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA}\varepsilon a_m + \varphi_{k,m}(s)\right)\, ds \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{T(\varepsilon)} e^{T(\varepsilon)\|A\|_{L(E,E)}} \sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \varphi\left(\left\|K(t)e^{tA}\varepsilon a_m + K(t)\varphi_{k,m}(t)\right\|_E\right) ds =$$

$$= \int\limits_0^{T(\varepsilon)} e^{T(\varepsilon)\|A\|_{L(E,E)}} \varphi\left(\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \left\|K(t)e^{tA}\varepsilon a_m + K(t)\varphi_{k,m}(t)\right\|_E\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{T(\varepsilon)} e^{T(\varepsilon)\|A\|_{L(E,E)}} \varphi\left(\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \left\|K(t)e^{tA}\varepsilon a_m\right\|_E + \sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \left\|K(t)\varphi_{k,m}(t)\right\|_E\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant T(\varepsilon) e^{T(\varepsilon)\|A\|_{L(E,E)}} \varphi\left(\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \left\|K(t)e^{tA}\varepsilon a_m\right\|_E + \sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \|K(t)\|_E \sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} \|\varphi_{k,m}(t)\|_E\right),$$

то на підставі (2), (16), обмеженості $K(t)$ на $[0, T(\varepsilon)]$ та виконання співвідношення (20) при $n = k$ справджуються співвідношення (19) і (20) при $n = k+1$. У цьому випадку

$$\varphi_{k+1,m}(t) = \int\limits_0^t e^{(t-s)A} F\left(s, e^{sA}\varepsilon a_m + \varphi_{k,m}(s)\right) ds.$$

Таким чином, співвідношення (19) і (20) виконуються при всіх $n \geqslant 0$.

Оскільки на підставі (19)

$$x_{n+1}(t, 0, \varepsilon a_m) - x_n(t, 0, \varepsilon a_m) = \begin{cases} \varphi_{0,m}(t), & \text{якщо } \; n = 0, \\ \varphi_{n,m}(t) - \varphi_{n-1,m}(t), & \text{якщо } \; n \geqslant 1, \end{cases}$$

то завдяки (20) виконується співвідношення (18). Звідси, з (14) та (15) випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x(T(\varepsilon), 0, \varepsilon a_m) - e^{T(\varepsilon)A}\varepsilon a_m \right\|_E = 0. \tag{21}$$

Оскільки завдяки (9)

$$\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)-2\|_E=\left|\left\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)-\varepsilon e^{T(\varepsilon)\operatorname{Re}\mu}\right\|_E\right|=$$

$$=\left|\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)\|_E-\left|e^{T(\varepsilon)\mu}\right|\varepsilon\|a_m\|_E\right|=\left|\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)\|_E-\left\|e^{T(\varepsilon)\mu}\varepsilon a_m\right\|_E\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)-e^{T(\varepsilon)\mu}\varepsilon a_m\right\|_E\leqslant\left\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)-e^{T(\varepsilon)A}\varepsilon a_m\right\|_E+$$

$$+\left\|e^{T(\varepsilon)A}\varepsilon a_m-e^{T(\varepsilon)\mu}\varepsilon a_m\right\|_E,$$

то на підставі (10) і (21)

$$\lim_{m\to\infty}\|x(T(\varepsilon),0,\varepsilon a_m)\|_E=2.$$

Це співвідношення, довільність числа $\varepsilon\in(0,1)$ та те, що $\|a_m\|_E=1$, $m\geqslant 1$, означає нестійкість нульового розв'язку рівняння (4).

Теорему 1 доведено.

5. Застосування теореми 1. Наведемо один аналог теореми про нестійкість за першим наближенням.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+G(t,x(t)),\qquad t\in\mathbb{R}_+,\tag{22}$$

де $A\colon E\to E$ — лінійний неперервний оператор і $G\colon\mathbb{R}_+\times E\to E$ — неперервний оператор, що задовольняє такі умови:

1) для деякої додатної сталої N

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|G(t,x_1)-G(t,x_2)\|_E\leqslant N\|x_1-x_2\|_E,\qquad x_1,x_2\in E;\tag{23}$$

2) $G(t,0)\equiv 0$.

Очевидно, що завдяки вимогам до оператора G рівняння (22) має нульовий розв'язок.

Справджується наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай*:

1) $\sigma(A)\cap\{z\colon\operatorname{Re}z>0\}\neq\varnothing$*;*

2) *для деякої неперервної й обмеженої на* $\mathbb{R}_+$ *функції* $K(t)$ *зі значеннями в алгебрі* $\mathcal{K}$ *цілком неперервних операторів* $K\in L(E,E)$ *виконується співвідношення*

$$\|G(t,x)\|_E\leqslant\|K(t)x\|_E$$

для всіх $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times E$.

Тоді для достатньо малого числа

$$Q=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|K(t)\|_{L(E,E)}$$

нульовий розв'язок рівняння (22) *є нестійким.*

***Зауваження* 1.** У сформульованій теоремі алгебру $\mathcal{K}$ цілком неперервних операторів $K \in \in L(E, E)$ не можна замінити алгеброю $L(E, E)$. Нульовий розв'язок рівняння (22) може стати експоненціально стійким [9].

Теорема 7 є наслідком теореми 1 та наступного твердження.

Теорема 8. *Нехай*:

1) *існує таке число* $r \geqslant 0$, *що* $\sigma(A) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z = r\} = \varnothing$ *і* $\sigma(A) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z > r\} \neq \varnothing$;

2) *існують такі числа* $q \in (0, N]$ *і* $\rho > 0$, *що* $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|G(t, x)\|_E \leqslant q\|x\|_E,\ \|x\|_E \leqslant \rho$.

Тоді для достатньо малого числа q *нульовий розв'язок рівняння* (22) *є нестійким.*

Теорема 8 у випадку $r = 0$ випливає з теореми 3.1 монографії [7, с. 65]. Теорему 8 у випадку $r > 0$ отримано автором у [10, с. 37].

***Доведення теореми* 7.** Розглянемо число $\gamma = \max_{z \in \sigma(A)} \operatorname{Re} z > 0$. Очевидно, що $\sigma(A) \cap \cap \{z\colon \operatorname{Re} z = r\} = \varnothing$ для деякого $r \in [0, \gamma)$ або $\sigma(A) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z = r\} \neq \varnothing$ для всіх $r \in [0, \gamma)$. У першому випадку з теореми 8 випливає нестійкість нульового розв'язку рівняння (22) при достатньо малому Q. У другому випадку завдяки теоремі 4 $\sigma_{ess.a}(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing$. Тому за теоремою 1 нульовий розв'язок рівняння (22) також є нестійким (у цьому випадку Q може бути довільним).

Теорему 7 доведено.

***Зауваження* 2.** Оператор G, що задовольняє умову 2 теореми 7, може не бути цілком неперервним, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Розглянемо оператор, що визначається формулою

$$G(t, x) = \|Kx\|_E \operatorname{sgn} x, \qquad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E, \tag{24}$$

де K — ненульовий цілком неперервний елемент простору $L(E, E)$ і

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \|x\|_E^{-1} x, & \text{якщо} \quad x \in E \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases}$$

Цей оператор не є цілком неперервним. Справді, розглянемо довільні вектор $a \in E$ такий, що

$$\|a\|_E = 2 \tag{25}$$

і

$$Ka \neq 0, \tag{26}$$

та істотно розбіжну послідовність нормованих векторів x_n, $n \geqslant 1$, для якої

$$\lim_{n \to \infty} \|Kx_n\|_E = 0. \tag{27}$$

Для цієї послідовності

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{m > n \geqslant k} \|x_n - x_m\|_E > 0. \tag{28}$$

Далі розглянемо обмежену послідовність $(a + x_n)$. Покажемо, що послідовність $\big(\|K(a + + x_n)\|_E \operatorname{sgn}(a + x_n)\big)$ не містить збіжних підпослідовностей.

Припустимо, що існує збіжна підпослідовність $\big(\|K(a+x_{n_k})\|_E\ \mathrm{sgn}\,(a+x_{n_k})\big)$ послідовності $(\|K(a+x_n)\|_E\ \mathrm{sgn}(a+x_n))$. Тоді

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\Big\|\Big\|K(a+x_{n_{k_1}})\Big\|_E\ \mathrm{sgn}(a+x_{n_{k_1}})-\Big\|K(a+x_{n_{k_2}})\Big\|_E\ \mathrm{sgn}(a+x_{n_{k_2}})\Big\|_E=0.$$

Із цього співвідношення, (26) та (27) випливає, що

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\Big\|\mathrm{sgn}(a+x_{n_{k_1}})-\mathrm{sgn}(a+x_{n_{k_2}})\Big\|_E=0,$$

тобто

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\Big\|\Big\|a+x_{n_{k_1}}\Big\|_E^{-1}(a+x_{n_{k_1}})-\Big\|a+x_{n_{k_2}}\Big\|_E^{-1}(a+x_{n_{k_2}})\Big\|_E=0. \qquad (29)$$

Оскільки послідовність $\big(\|a+x_{n_k}\|_E^{-1}\big)$ числова й обмежена, то існує збіжна підпослідовність цієї послідовності. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що сама послідовність $\big(\|a+x_{n_k}\|_E^{-1}\big)$ є збіжною. Завдяки (25) її границею є деяке додатне число. Звідси та з (29) отримуємо, що

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\Big\|(a+x_{n_{k_1}})-(a+x_{n_{k_2}})\Big\|_E=0.$$

Тому

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\Big\|x_{n_{k_1}}-x_{n_{k_2}}\Big\|_E=0,$$

що суперечить (28).

Таким чином, припущення про існування збіжної підпослідовності послідовності $(\|K(a+x_n)\|_E\ \mathrm{sgn}(a+x_n))$ є хибним. Тому оператор G не є цілком неперервним.

Для оператора G також виконується співвідношення (23). Справді, якщо використати нерівність

$$\|\mathrm{sgn}\ x_1-\mathrm{sgn}\ x_2\|_E\leqslant\frac{2\|x_1-x_2\|_E}{\max\{\|x_1\|_E,\|x_2\|_E\}},$$

що справджується для $x_1,x_2\in E\setminus\{0\}$ (див. [11, с. 20]), то одержуємо наступні співвідношення.

Якщо $\|x_1\|_E\geqslant\|x_2\|_E>0$, то

$$\Big\|\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_1-\|Kx_2\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2\Big\|_E=$$

$$=\Big\|(\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_1-\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2)+(\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2-\|Kx_2\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2)\Big\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\Big\|\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_1-\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2\Big\|_E+\Big\|\|Kx_1\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2-\|Kx_2\|_E\ \mathrm{sgn}\ x_2\Big\|_E=$$

$$=\|Kx_1\|_E\|\mathrm{sgn}\ x_1-\mathrm{sgn}\ x_2\|_E+\big|\|Kx_1\|_E-\|Kx_2\|_E\big|\leqslant$$

$$\leqslant\|K\|_{L(E,E)}\|x_1\|_E\frac{2\|x_1-x_2\|_E}{\max\{\|x_1\|_E,\|x_2\|_E\}}+\|K\|_{L(E,E)}\|x_1-x_2\|_E=$$

$$=2\|K\|_{L(E,E)}\|x_1-x_2\|_E+\|K\|_{L(E,E)}\|x_1-x_2\|_E=3\|K\|_{L(E,E)}\|x_1-x_2\|_E.$$

Аналогічні співвідношення отримуємо у випадку $\|x_2\|_E\geqslant\|x_1\|_E>0$.

Якщо $x_1 \neq 0$ і $x_2 = 0$, то

$$\big\|\|Kx_1\|_E \operatorname{sgn} x_1 - \|Kx_2\|_E \operatorname{sgn} x_2\big\|_E =$$

$$= \big\|\|Kx_1\|_E \operatorname{sgn} x_1\big\|_E = \|Kx_1\|_E \leqslant \|K\|_{L(E,E)}\|x_1\|_E = \|K\|_{L(E,E)}\|x_1 - x_2\|_E.$$

Аналогічні співвідношення одержуємо у випадку $x_1 = 0$ і $x_2 \neq 0$.

Отже, для оператора G, що визначається формулою (24), співвідношення (23) виконується, якщо $N = 3\|K\|_{L(E,E)}$.

6. Узагальнення теореми 1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{k=1}^{n} F_k(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{30}$$

де $A \in L(E,E)$, $n \in \mathbb{N}$ і $F_k \in \mathfrak{F}$, $k = \overline{1,n}$, окремим випадком якого є рівняння (4).

За допомогою методу доведення теореми 1 можна показати, що справджується наступне твердження.

Теорема 9. *Нехай $\sigma_{ess.a}(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing$. Тоді нульовий розв'язок рівняння* (30) *є абсолютно нестійким по відношенню до відображень $F_k \in \mathfrak{F}$, $k = \overline{1,n}$.*

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. – Новосибирск: Наука, 1986. – 266 с.
3. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер В.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Рівнен. держ. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2003. – 288 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Существенно неустойчивые решения разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1659 – 1672.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Рівняння з істотно нестійкими розв'язками. – Рівне: Укр. держ. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2005. – 217 с.
7. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 187 с.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
9. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу о неустойчивости систем по первому приближению // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 5. – С. 721 – 723.
10. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Черновцы, 1972. – 91 с.
11. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

Одержано 02.08.12